doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2024.10.004

基于 SVD-Schmidt 正交化的压缩感知测量矩阵的优化①

王 月② 覃亚丽③

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要 压缩感知(CS)理论中测量矩阵的性能优劣直接影响信号重构性能。为了优化测量矩阵提高其重构性能,本文提出了一种基于奇异值分解-施密特(SVD-Schmidt)正交化的 CS 测量矩阵优化方法。首先对测量矩阵进行奇异值分解(SVD)并选择最大的奇异值替换原来的奇异值形成新的矩阵,同时对其进行施密特正交化,对矩阵的列进行单位化,通过行和列不断循环交替自适应迭代优化得到优化后的测量矩阵。通过一维信号和二维图像的仿真实验验证所提方法的优越性。一方面,本文方法优化的测量矩阵互相关性明显降低;另一方面,实验仿真结果证明了测量矩阵经过优化之后提高了信号重构性能,本文方法重构性能优于现有的 SVD 法和特征值分解法。

关键词 压缩感知(CS);测量矩阵;互相关性;奇异值分解-施密特(SVD-Schmidt)正交化;迭代优化

压缩感知(compressed sensing,CS)理论是一种新的信号采样理论[1-3],主要分为以下 3 个方面:稀疏表示信号、性能良好的测量矩阵的构造和信号重构。该理论表明,当信号具有稀疏性质或可压缩时,在信号采样过程中,采样率的选取不是固定的,而是可以通过对原始信号进行压缩,使其在某个量级上进行测量,这样就可以实现高精度的采样。通过 CS 理论,只要设计出信号与观测值之间的线性变换关系,就可以从少量的测量数据中精确地重构出其全部的信息,因此该采样理论的图像重构效果较好。作为图像压缩和图像处理领域出现的新方法,该理论的采样速率要求较低,并且所需的采样数量少,因此存储数据所需要的空间也更小,同时该采样理论的安全性更高,适合保密要求较高的信号处理用途。

近些年相关学者们也专注于测量矩阵的优化研究,通过优化测量矩阵来提高其性能。Elad[4] 在 2007 年提出了需要对测量矩阵进行优化的理念,同时给出了优化测量矩阵的方法,也就是通过迭代法的原理减小互相关系数,提出了 Elad 优化方法。此后,越来越多的研究人员对优化测量矩阵的兴趣浓厚起来,发展到目前,主要的优化算法可以分成两大类,分别是迭代类优化算法和非迭代类优化算法[5-6]。从优化目标来看,这些测量矩阵优化方法可分为直接相关最小化方法和间接相关最小化方法[7-10]。从优化机制来看,有贪心方法、基于深度学习的方法、基于奇异值分解(singular value decomposition, SVD)的交替最小化方法、基于特征值分解的交替最小化方法和基于梯度的交替最小化方法[11-20]。

为了优化测量矩阵提高其重构性能,本文主要针对迭代类优化算法开展研究,提出了一种基于奇异值分解-施密特(SVD-Schmidt)正交化的测量矩阵优化方法,该方法通过降低矩阵互相关系数提高信号重构性能。

① 国家自然科学基金(61675184)资助项目。
② 女,1998 年生,硕士生;研究方向:压缩感知,计算成像;E-mail:yue_wang0416@163.com。
③ 通信作者,E-mail:ylqin@zjut.edu.cn。
(收稿日期:2023-04-10)

1　相关工作

1.1　CS 基本原理

CS 理论的实质是针对稀疏或者可压缩的信号,使用测量矩阵来对信号进行线性投影操作,从而获得少量的测量数据,并且运用这些少量的测量数据来进行信号重构从而得到原始信号。它的数学模型可以被简单地表达成:对于一个可以压缩的原始信号 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N$,$\boldsymbol{R}$ 表示向量空间,通过少量测量数据组成一个投影矩阵,并利用这个投影矩阵将少量的测量数据投影到一个更低的维度上;然后,根据这个空间中的位置信息来重构原始信号,从而高效重建原信号,这一过程可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{R}^{M\times N}$ 为测量矩阵,采样率为 $R=M/N$,$\boldsymbol{y}$ 为测量向量,根据 CS 理论,原始信号可在变换域中进行稀疏变换,即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Psi x}$,才能更有效被重构:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}=\boldsymbol{\Phi\Psi}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$ 是一个稀疏基,$\boldsymbol{\alpha}$ 是稀疏系数,用来描述信号在变换域中的特征。将 M 维向量恢复成 N 维向量时,可以选择如下重构算法:

$$\arg\min\|\boldsymbol{\alpha}\|_p \text{ subject to } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}=\boldsymbol{\Phi\Psi}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \tag{3}$$

式(3)中 p 根据不同的取值,可以分别代表不同类型的重构算法,可以是基于 l_0 范数的贪婪算法,也可以是基于 l_1 范数的凸优化算法[3-4]。其中一类重构算法是贪婪算法,包括正交匹配追踪算法(orthogonal matching pursuit, OMP)[21] 及其改进算法;另一类是将其转化为 l_1 最小化问题,可以使用基追踪算法(basis pursuit, BP)[22]。

为了从式(3)中重构出原始信号,测量矩阵需要满足一些条件。Candès 和 Tao[3] 提出了受限等距性质(restricted isometry property, RIP),这是 CS 确保信号能被精确重构的充分条件。

定义 1　令 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个 $M\times N$ 的矩阵,对于任意 k 稀疏信号 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N$,$\boldsymbol{\Phi}$ 满足 k 阶受限等距性质,如果一个常数满足 $0<\delta_k<1$ 则有:

$$(1-\delta_k)\|\boldsymbol{x}\|_2^2\leqslant\|\boldsymbol{\Phi x}\|_2^2\leqslant(1+\delta_k)\boldsymbol{x}\|_2^2 \tag{4}$$

其中 δ_k 是一个非负数的受限等距常数(restricted isometry constant, RIC)。由于 RIP 是个充分条件,很难被证明,因此可以通过互相关性作为测量矩阵的评判准则。

定义 2　令 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个 $M\times N$ 的矩阵,$\boldsymbol{\Phi}$ 的互相关性定义为

$$\mu(\boldsymbol{\Phi})\triangleq\max_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\frac{|\langle\boldsymbol{\phi}_i,\boldsymbol{\phi}_j\rangle|}{\|\boldsymbol{\phi}_i\|_2\|\boldsymbol{\phi}_j\|_2} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2,\cdots,\boldsymbol{\phi}_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的列向量,$\langle\boldsymbol{\phi}_i,\boldsymbol{\phi}_j\rangle\triangleq\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_j$。

1.2　奇异值分解

测量矩阵的列向量之间的互相关性与测量矩阵的奇异值密切相关。矩阵的奇异值越大,矩阵的列之间相关性就越弱,也就越独立。因此为了提高测量矩阵不同列之间的不相关性,需要增大矩阵的奇异值来实现,也就是提高测量矩阵的性能。奇异值越大就越能包含更多的信息量,比如在图像压缩中,经过 SVD,选择最大的奇异值并且丢弃较小的奇异值,这样既可以节省资源,图像的信息又可以尽可能保留。

1.3　施密特正交化

施密特正交化是经典的对基进行的正交化算法,主要原理是将一组线性无关的向量转换成一组单位正交向量,这个算法最早由 Schmidt 提出[23]。

定理 1　令 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维欧式空间 $\boldsymbol{Z}$ 的一组基,那么 $\boldsymbol{Z}$ 中就会存在一组标准正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,存在一个过渡矩阵,这是一个上三角矩阵,并且该矩阵的主对角线上元素都是大于 0 的[24]。

定义 3　对于任何一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,总会存在一个 n 维的正交方阵 $\boldsymbol{P}$,使得:

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{6}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

在 m 维的欧式空间里,对于 n 个线性相关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,得到 m 个标准的正交向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$,具体的计算过程为

步骤 1 假设 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中不含零向量。

步骤 2 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，计算 $\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle\boldsymbol{\beta}_1}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}$。如果 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的，那么可以得到 $\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle\boldsymbol{\beta}_1}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle_2}\neq 0$。，则可以计算出 $\beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle\boldsymbol{\beta}_1}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}$。

步骤 3 对于 $\boldsymbol{\beta}_i(i=3,4,\cdots,m)$ 的计算步骤，采取类似步骤 2 的计算方法，可得到 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_j-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_1\rangle\boldsymbol{\beta}_1}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_2\rangle\boldsymbol{\beta}_2}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}-\cdots-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_{i-1}\rangle\boldsymbol{\beta}_{i-1}}{\langle\boldsymbol{\beta}_{i-1},\boldsymbol{\beta}_{i-1}\rangle}$，其中 i 可能不等于 j。

步骤 4 最后对 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 进行单位化就可以得到 $\varepsilon_i=\frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_i\rangle}$，这样就可以求出需要的 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$。

2 基于 SVD-Schmidt 正交化的测量矩阵优化

2.1 测量矩阵优化的目标函数

通常情形下，稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$ 是已知的且已被固定，因此为了最大限度地降低测量矩阵和稀疏基之间的相关性，可以通过设计和优化测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 来实现。从另一个角度来看就是，如果 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 是不相关的，那么通过对原始信号采样得到的数据就会拥有更多的关键信息。因此，为了提升测量矩阵的性能，需要降低 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的互相关性。从有关的数学理论出发，通过 Gram 矩阵尽最大可能逼近单位矩阵的方法来求解测量矩阵和稀疏基之间的互相关性。因此想要获得更优的测量矩阵，可以求解以下优化问题：

$$\boldsymbol{\Phi}=\operatorname{argmin}\|\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{I}\|_{\mathrm{F}}^{2} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$，$\boldsymbol{I}$ 为 $N\times N$ 的单位矩阵，F 表示 F 范数。最小化式(7)可以降低互相关性，这样测量矩阵的性能就能得到提升。

对于 $M\times N$ 的测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，虽然包含 N 个列向量，但是只有 M 个列向量是线性无关的，通过这 M 个列向量来线性表示剩下的 $N-M$ 个列向量，这也能说明其中包含了大量的冗余信息。如果这些冗余信息可以通过某些方式去除，那么在进行信号表示的时候就能够得到信号最简单的表达，这也会让测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的列向量间的不相关性达到最大。怎样合理地利用列向量中的冗余信息，在对测量矩阵进行优化时并没有制定具体的规则，所以也很难把握这个尺度；如果毫无目的地把这些列向量的冗余信息最大化地去除，可能会导致某些重构算法失效。

在式(7)中把单位矩阵当作最终的目标矩阵是一种十分严格的约束，造成的结果就是计算复杂度变高，收敛速度变慢，因此需要重新定义目标矩阵。定义优化的目标函数为

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{opt}}=\operatorname{argmin}\|\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{G}_{\mathrm{opt}}\|_{\mathrm{F}}^{2} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{opt}}$ 就是新定义的目标矩阵，满足的条件为

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{opt}}=\begin{cases}\boldsymbol{g}_{ij} & |\boldsymbol{g}_{ij}|\geqslant\mu_{\mathrm{welch}},\ i\neq j\\ \mu_{\mathrm{welch}}\cdot\operatorname{sign}(\boldsymbol{g}_{ij}) & |\boldsymbol{g}_{ij}|\geqslant\mu_{\mathrm{welch}},\ i\neq j\end{cases} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{g}_{ij}$ 为 Gram 矩阵 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi})$ 中的元素。通过最小化目标函数，得到最终优化后的测量矩阵。

2.2 测量矩阵优化算法的过程

本文提出一种基于 SVD-Schmidt 正交化的测量矩阵优化方法，算法的过程如下，算法 1 总结的是本文提出的优化方法的具体过程。

(1) 首先生成一个 $M\times N$ 的测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{R}^{M\times N}(M<N)$，并且对其进行奇异值分解得到：

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别是 $M\times N$ 和 $N\times N$ 的正交矩阵，T 表示矩阵的转置；$\boldsymbol{D}$ 是 $M\times N$ 的矩阵，非对角线的元素均为 0，主对角线的元素是由 M 个奇异值和 $N-M$ 个 0 组成的；$\boldsymbol{\Sigma}=\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_M)$，$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\sigma_M$。

(2) 在对角矩阵中选出其中最大的奇异值 σ_1 并且将其余奇异值都替换成最大奇异值，$\boldsymbol{\Sigma}'=\operatorname{diag}(\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma_M')$，$\sigma_1'=\sigma_2'=\cdots\sigma_M'=\sigma_1$ 是新构成的对角矩阵。如此重新形成一个新的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_1$：

$$\boldsymbol{\Phi}_1=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}' & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

(3) 计算 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 各行向量间的夹角，选取最大值

和最小值,计算各行向量的模,选择最大值和最小值,然后进行施密特正交化。

(4) 计算 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 各列向量间的夹角,选取最大值和最小值,单位化各列向量。

(5) 依次对 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 进行行向量施密特正交化和单位化列向量,根据式(9)循环迭代更新至收敛稳定且达到式(8)的最优解。根据式(8)得到最终优化后的测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{opt}}$。

算法 1　基于 SVD-Schmidt 正交化的优化方法

输入:2 个正整数 M 和 N, 其中 $M < N$。

输出:测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{opt}}$。

初始化:初始化一个的测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$。

1. 对测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 进行 SVD 得到:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

2. 对 $\boldsymbol{D}$ 中对角元素选择最大的奇异值,将其余奇异值都换成最大的奇异值,重新构成新的对角矩阵,形成一个新的矩阵:

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}' & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

3. 计算 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 各行向量间的夹角,选取最大值和最小值,计算各行向量的模,选择最大值和最小值,进行施密特正交化。

4. 计算 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 各列向量间的夹角,选取最大值和最小值,单位化各列向量。

5. 依次对 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 进行行向量施密特正交化和列向量单位化操作并且根据式(9)循环迭代更新至收敛稳定并且达到式(8)的最优解。根据式(8)得到最终优化后的测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{opt}}$。

3　仿真实验和分析讨论

这一部分主要通过一维信号和二维图像的仿真实验,说明本文提出的基于 SVD-Schmidt 正交化的测量矩阵优化方法的性能,并且与未优化的随机高斯矩阵、伯努利矩阵、托普利兹矩阵进行比较。仿真结果表明,本文提出的优化方法在 OMP 和 BP 算法下,性能得到提高。此外将提出的优化方法与已有的优化方法(SVD[19] 和特征值分解[20])比较,仿真结果表明本文提出的方法性能更优、信号重构性能提高。

3.1　一维信号的重构性能

本小节使用 Matlab R2019a 进行仿真。通过仿真实验验证提出的测量矩阵优化方法的重构性能的优越性。在仿真实验中,对于每一个 k 稀疏信号和每一个测量矩阵,进行 1 000 次实验,最终得到信号稀疏度和重构成功率的关系。稀疏信号是均匀随机生成的,而非零元素的相应值是根据标准高斯正态分布生成的。在第 i 次的实验中,一个相对重构误差 e_i 的表示公式如式(12)所示。

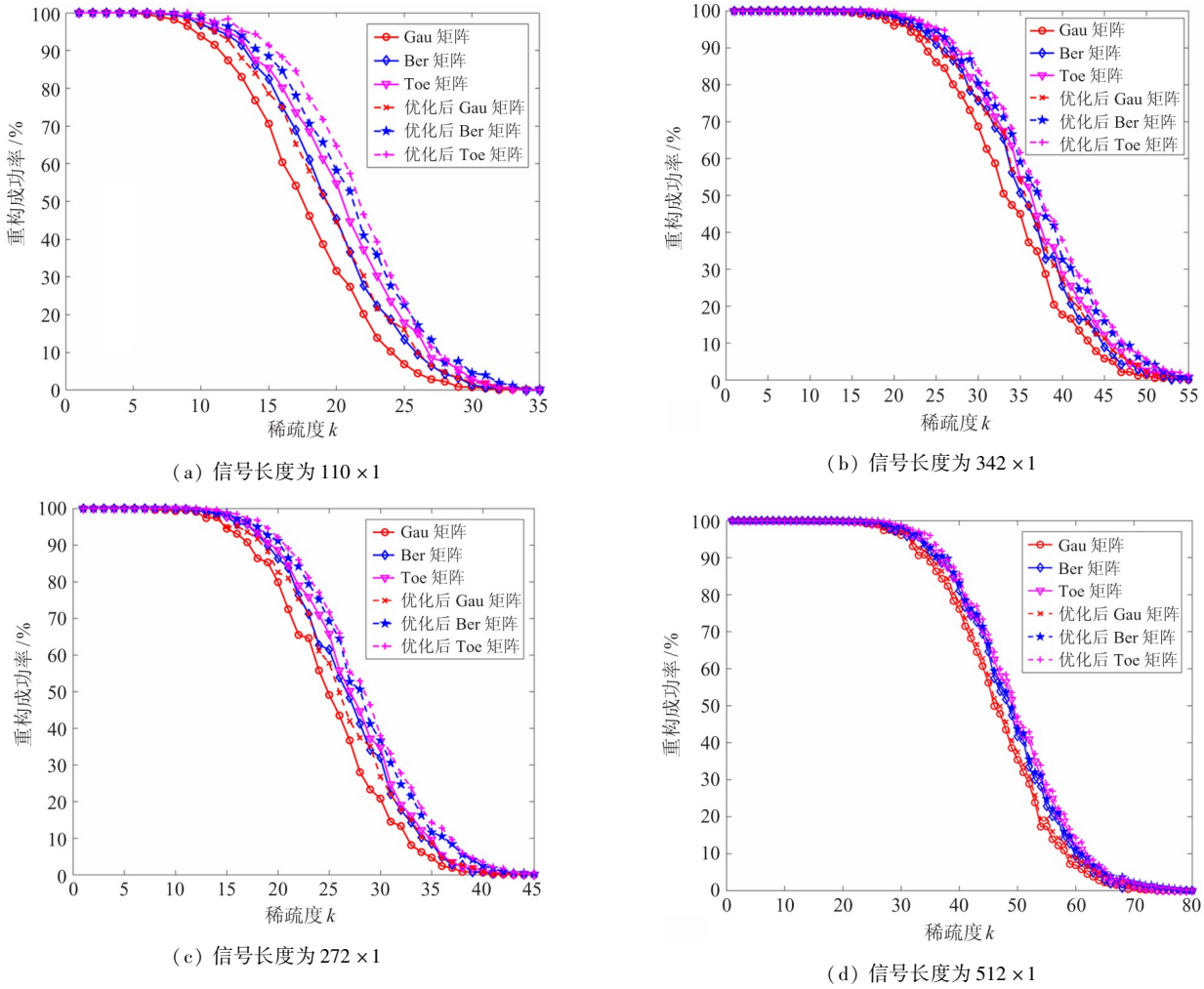
$$e_i = \frac{\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|}{\boldsymbol{x}_2} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{x}'$是重构后的信号,$\boldsymbol{x}$ 是原始信号。如果 $e_i \leqslant 0.001$, 则表示第 i 次实验为“完美重构”。重构算法分别采用 OMP 算法和 BP 算法。OMP 算法中,迭代次数设置为 M/4,BP 算法中,迭代次数设置为 M,初始化参数分别设置为 $\alpha = 0.01$,$\beta = 0.5$,$\lambda = 10$。分别比较“Gau 矩阵”、“Ber 矩阵”、“Toe 矩阵”的重构性能,表 1 是 3 种测量矩阵优化前后的互相关性的比较,从中可以看出提出的优化方法可以明显降低测量矩阵的互相关性。

为了比较信号的重构性能,图 1 选取了 OMP 算法作为重构算法,为了更方便地描述图中的曲线和性能的比较,分别用“Gau 矩阵”、“Ber 矩阵”、“Toe 矩阵”表示随机高斯矩阵、伯努利矩阵、拓普利兹矩阵。通过本文提出的优化算法对 3 种测量矩阵进行优化,并且与未优化的测量矩阵进行对比,比较稀疏度 k 和重构成功率的关系。图 2 选取了 BP 算法作为重构算法,其他参数设置与图 1 中一致。从图 1 和图2可以看出,本文提出的优化算法可以明显提

表 1　测量矩阵优化前后互相关性

测量矩阵	$\boldsymbol{\Phi}_{55\times110}$	$\boldsymbol{\Phi}_{114\times342}$	$\boldsymbol{\Phi}_{85\times272}$	$\boldsymbol{\Phi}_{160\times512}$
	未优化 μ | 优化后 μ			
Gau	0.520 4|0.410 2	0.487 8|0.386 1	0.395 3|0.326 7	0.365 7|0.325 2
Ber	0.490 9|0.321 8	0.458 8|0.327 9	0.386 0|0.342 4	0.337 5|0.300 5
Toe	0.454 5|0.287 9	0.388 2|0.302 0	0.333 3|0.310 6	0.300 0|0.287 7



（a）信号长度为 110 ×1　（b）信号长度为 342 ×1

（c）信号长度为 272 ×1　（d）信号长度为 512 ×1

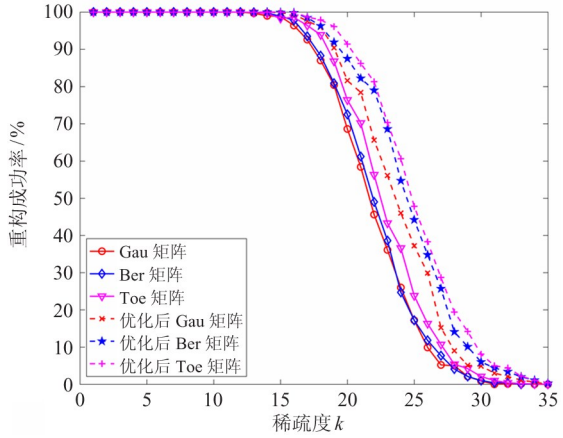
图 1　采用 OMP 算法，不同测量矩阵优化前后的重构信号稀疏度与重构成功率的关系

高信号的重构性能，3 类测量矩阵的性能均得到提升。

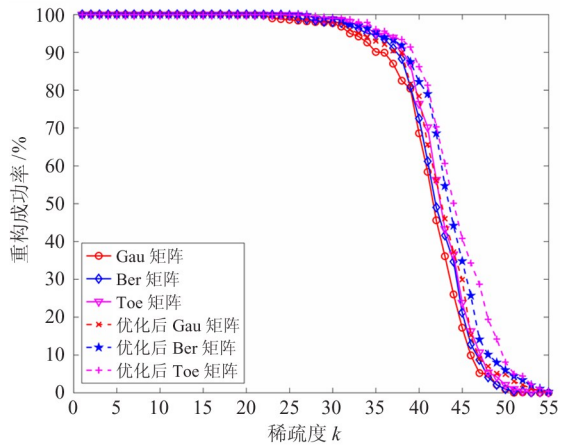
为了表明本文提出的优化方法的优越性，将其与 SVD 和特征值分解这 2 种优化方法进行比较。图 3 选取了 2 种测量矩阵进行比较，重构算法选取了 OMP 算法。图 3(a)选取的是 Gau 矩阵，图 3(b)选取的是 Toe 矩阵，展示了信号稀疏度和重构成功率的关系。从图 3 可以看出 3 种优化方法均能提高这 2 种测量矩阵的重构性能，其中本文提出的优化算法比 SVD 方法和特征值分解法更有优势，测量矩阵性能提高更多，信号重构性能更好。

3.2　二维图像的重构性能

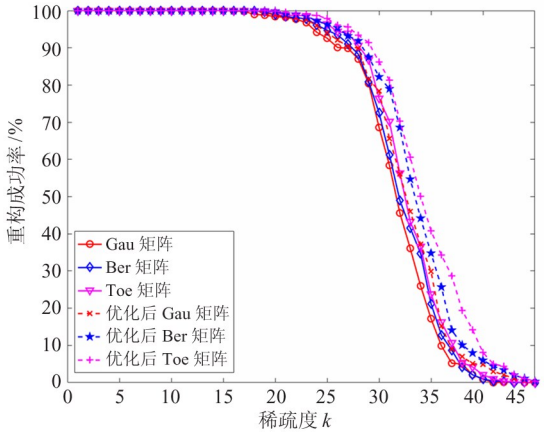
本小节实验使用Matlab R2019a进行仿真。从美国南加州大学信号与图像处理研究所图像库中选取 10 幅图像(512 像素 ×512 像素)作为测试图像，如图 4 所示。使用离散余弦变换(discrete cosine Transform，DCT)作为稀疏基来稀疏信号，采用分块采样，块的大小设置为32像素 ×32像素，采用OMP



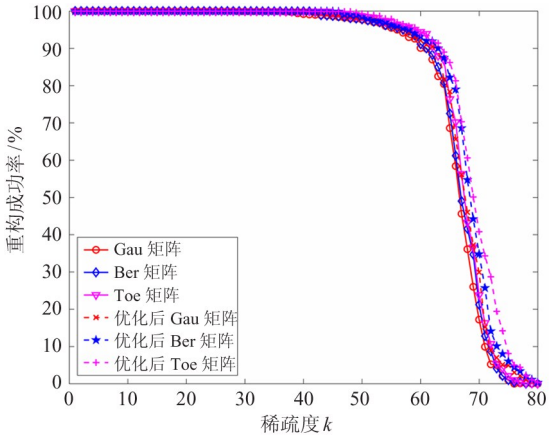
(a) 信号长度为 110 × 1



(b) 信号长度为 342 × 1

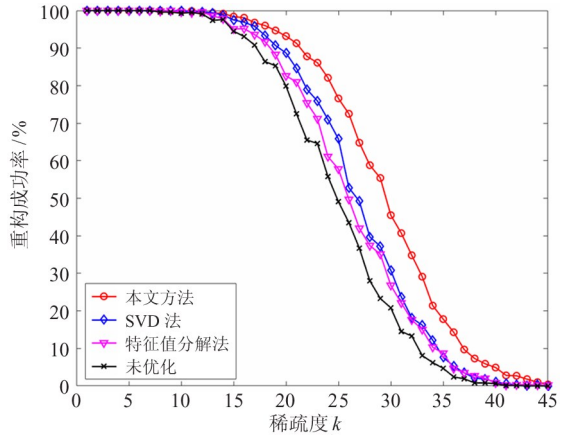


(c) 信号长度为 272 × 1

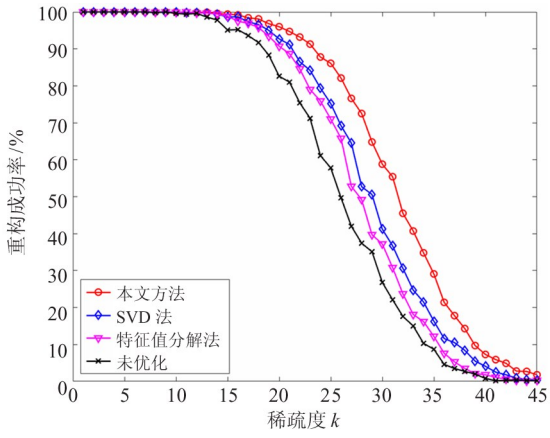


(d) 信号长度为 512 × 1

图 2　采用 BP 算法,不同测量矩阵优化前后的重构信号稀疏度与重构成功率的关系



(a) Gau 矩阵



(b) Toe 矩阵

图 3　3 种优化算法对不同测量矩阵优化后重构信号稀疏度与重构成功率的关系

算法作为重构算法。然后,通过改变采样率来比较重构图像的峰值信噪比(peak signal to noise ratio, PSNR)和结构相似度(structural similarity index, SSIM)来说明重构的性能。

图 5 选取随机高斯矩阵、伯努利矩阵、托普利兹矩阵，图像 Barbara 和 Peppers 的峰值信噪比（peak signal to noise ratio，PSNR）和结构相似度（structual similarity index，SSIM）比较，采样率为 0.05、0.10、0.20、0.30、0.40、0.50。为了更方便地描述图中的曲线和性能的比较，分别用“Gau矩阵”、“Ber矩

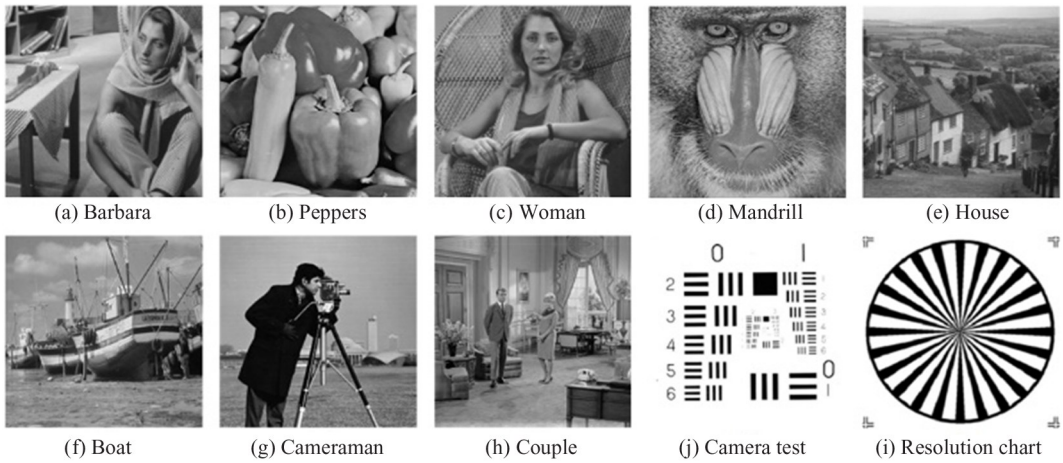
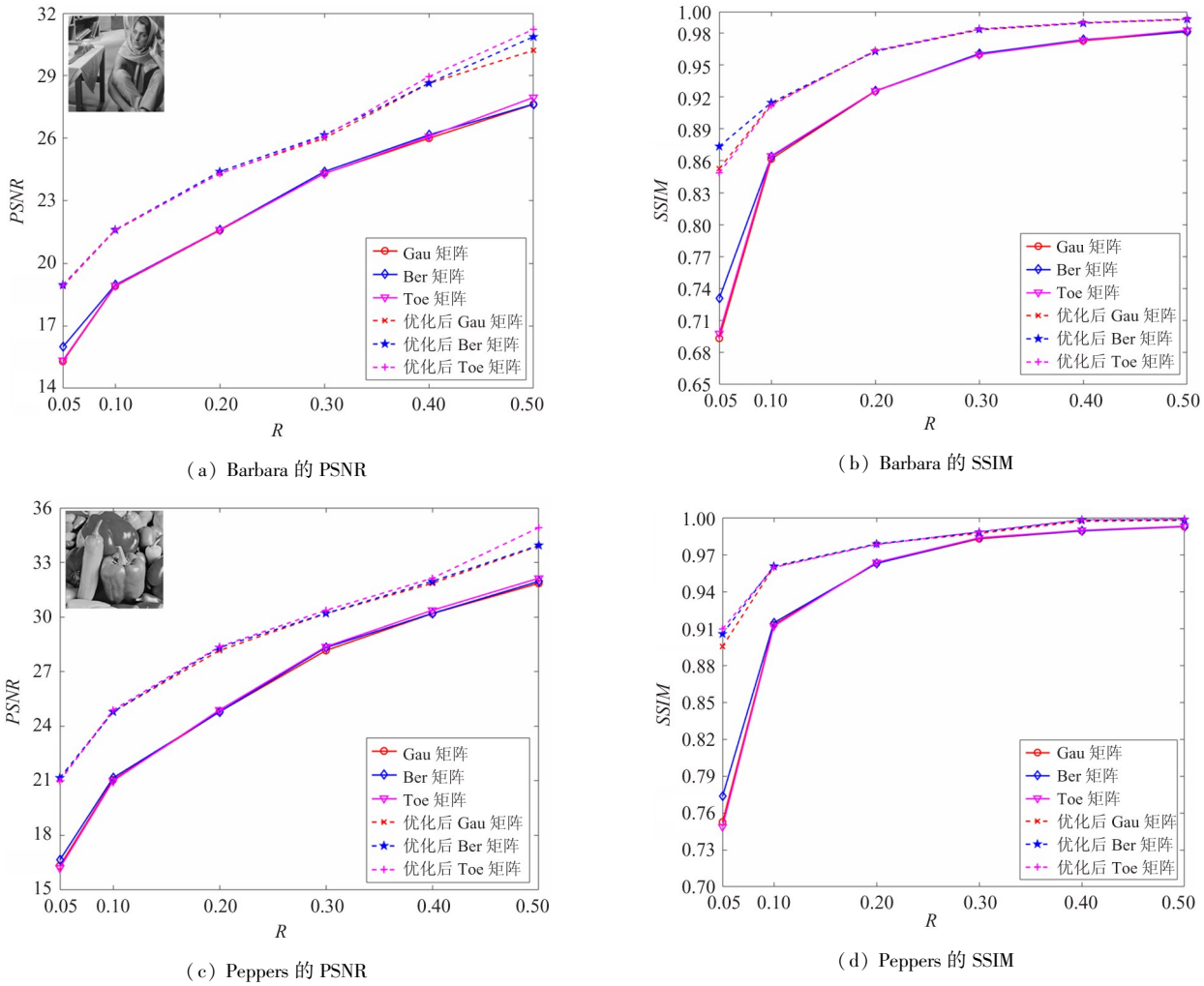


图 4　10 幅测试图像



（a）Barbara 的 PSNR　（b）Barbara 的 SSIM

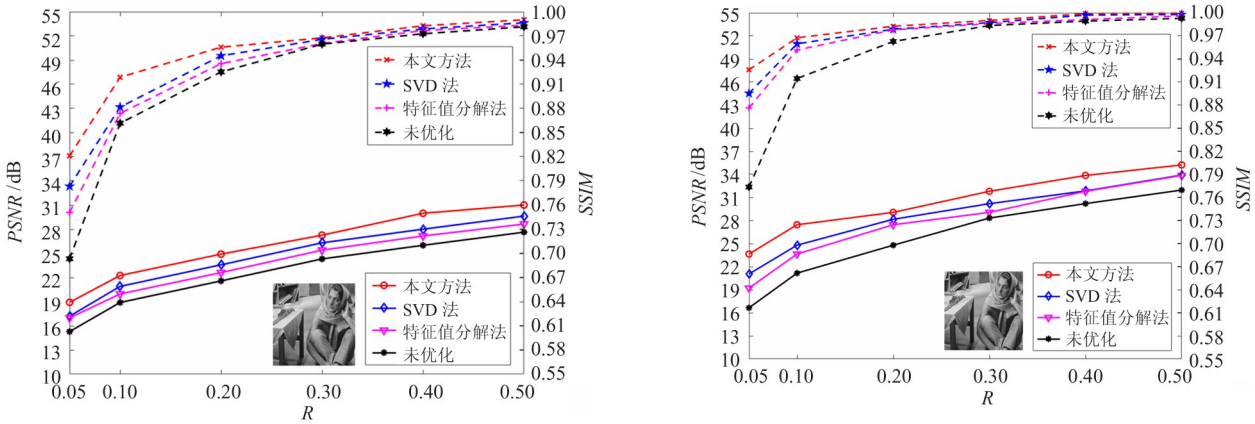
（c）Peppers 的 PSNR　（d）Peppers 的 SSIM

图 5　不同测量矩阵优化前后重构图像的 PSNR 和 SSIM 随采样率的变化

阵”、“Toe 矩阵”表示随机高斯矩阵、伯努利矩阵、拓普利兹矩阵。图 5(a)和(b)是测量矩阵优化前后重构图像 Barbara 的 PSNR 和 SSIM 值的对比,图 5(c)和(d)是测量矩阵优化前后重构图像 Peppers 的 PSNR 和 SSIM 值的比较。从图 5 可以看出本文提出的测量矩阵优化算法可以提高测量矩阵的性能,从而提高图像重构性能。以采样率 $R=0.10$、选取 Gau 矩阵和 Toe 矩阵为例,对于 Gau 矩阵来说,本文提出的优化方法的 PSNR 和 SSIM 值平均提升了3.72 dB和0.082 3;对于 Toe 矩阵来说,本文提出的优化算法的 PSNR 和 SSIM 值平均提升了3.95 dB和0.091 2。

为了表明本文提出的优化方法的优越性,将其与 SVD 和特征值分解这 2 种优化方法进行比较。图 6 选取了 2 种测量矩阵进行比较,采样率分别为 0.05、0.10、0.20、0.30、0.40 和 0.50。图 6(a)选择的是 Gau 矩阵,图 6(b)选择的是 Toe 矩阵,测试图像选择的是 Barbara,重构算法选择的是 OMP 算法,比较不同采样率下的 PSNR 和 SSIM 值。从图中可以看出,随着采样率的增加,图像的 PSNR 和 SSIM 值均有明显不断增加的趋势,3 种优化算法均能提高测量矩阵的重构性能,其中本文提出的优化算法使图像的 PSNR 和 SSIM 值相对更高,该方法优化能力更具有优越性。表 2 展示了采样率为 0.10 时,Gau 矩阵、Ber 矩阵、Toe 矩阵通过 3 种优化算法进行优化后的 10 幅重构图像 PSNR 和 SSIM 值的对比,并且与未优化时的值对比,重构算法选择 OMP 算法,其中对最优数据进行了字体加粗。根据表格中的数据可以看出,3 种优化算法均可以提高 3 种测量矩阵的性能,重构图像的 PSNR 和 SSIM 值均得到了提升,而本文提出的方法性能优于其他 2 种优化算法。以 Gau 矩阵和 Toe 矩阵为例,对于 Gau 矩阵来说,本文所提出的优化算法的 PSNR 值(SSIM 值)相比于 SVD 方法和特征值分解法平均提升了 1.33 dB(0.020 7)和2.32 dB(0.030 1);对于 Toe 矩阵来说,本文所提出的优化算法的 PSNR 值(SSIM 值)相比于 SVD 方法和特征值分解法平均提升了 1.46 dB(0.026 7)和 2.57 dB(0.037 8)。

图7展示的是当采样率为0.10时,4张测试图



(a) Gau 矩阵　　(b) Toe 矩阵

图 6　不同优化算法对测量矩阵优化后重构图像 PSNR 和 SSIM 值随采样率的变化

表 2　采样率为 0.10 时不同优化方法优化测量矩阵后 10 幅测试图像的 PSNR 和 SSIM 值

	测量矩阵	*PSNR*/dB|*SSIM*(采样率 $R=0.10$)			
		未优化	SVD 法	特征值分解法	本文方法
Barbara	Gau	18.90|0.861 7	20.20|0.897 8	19.78|0.889 1	**21.62|0.913 0**
	Ber	18.96|0.863 8	20.23|0.898 8	19.89|0.889 9	**21.72|0.914 6**
	Toe	18.93|0.864 6	20.89|0.900 1	20.01|0.892 1	**21.93|0.911 9**
Peppers	Gau	21.05|0.913 0	22.89|0.947 8	22.01|0.942 3	**24.05|0.952 8**
	Ber	21.16|0.914 6	23.09|0.949 8	22.55|0.941 2	**24.69|0.958 9**
	Toe	20.99|0.911 9	23.23|0.956 3	22.78|0.948 7	**25.01|0.960 1**

续表 2

Woman	Gau	19.87|0.818 9	21.01|0.853 4	20.56|0.850 1	**22.23|0.893 4**
	Ber	19.80|0.816 3	21.23|0.859 4	20.61|0.857 8	**22.34|0.894 3**
	Toe	19.85|0.817 4	21.70|0.861 2	20.78|0.860 1	**22.86|0.901 3**
Mandrill	Gau	16.14|0.578 7	17.01|0.670 1	16.77|0.667 8	**17.23|0.682 1**
	Ber	16.05|0.580 9	16.88|0.672 3	16.99|0.671 3	**17.10|0.680 1**
	Toe	16.05|0.575 7	16.89|0.680 1	16.88|0.680 0	**17.34|0.712 3**
House	Gau	21.41|0.903 6	22.67|0.926 7	22.42|0.921 1	**23.21|0.946 7**
	Ber	21.25|0.903 0	22.87|0.929 8	22.54|0.923 4	**23.67|0.949 8**
	Toe	21.46|0.905 5	23.01|0.931 1	22.89|0.930 1	**24.01|0.956 7**
Boat	Gau	19.18|0.822 6	20.21|0.906 5	20.11|0.901 2	**21.43|0.925 1**
	Ber	19.36|0.830 7	20.39|0.909 9	20.21|0.906 7	**21.99|0.929 8**
	Toe	19.37|0.830 2	20.37|0.904 6	20.18|0.904 4	**21.90|0.929 9**
Cameraman	Gau	20.09|0.917 6	21.42|0.946 7	21.12|0.941 3	**22.45|0.952 3**
	Ber	20.00|0.916 6	21.39|0.945 4	21.07|0.943 2	**22.42|0.956 7**
	Toe	20.06|0.917 8	21.23|0.943 1	21.07|0.943 3	**22.21|0.959 9**
Couple	Gau	19.29|0.807 7	20.55|0.913 4	20.41|0.912 3	**21.78|0.929 9**
	Ber	19.26|0.807 8	20.47|0.913 2	20.39|0.911 8	**21.23|0.929 8**
	Toe	19.25|0.809 6	21.23|0.924 5	20.89|0.921 0	**22.12|0.930 1**
Resolution chart	Gau	10.18|0.442 3	12.07|0.776 5	11.45|0.768 9	**13.23|0.798 7**
	Ber	10.40|0.449 1	12.34|0.779 8	11.78|0.770 1	**13.78|0.801 2**
	Toe	10.59|0.454 6	12.66|0.780 1	12.01|0.779 2	**14.05|0.801 2**
Camera test	Gau	8.33|0.646 2	10.22|0.851 9	9.11|0.946 5	**11.53|0.864 5**
	Ber	8.30|0.641 2	10.78|0.858 8	9.91|0.850 1	**11.98|0.867 8**
	Toe	8.07|0.625 6	11.01|0.860 1	10.34|0.860 0	**12.12|0.870 1**

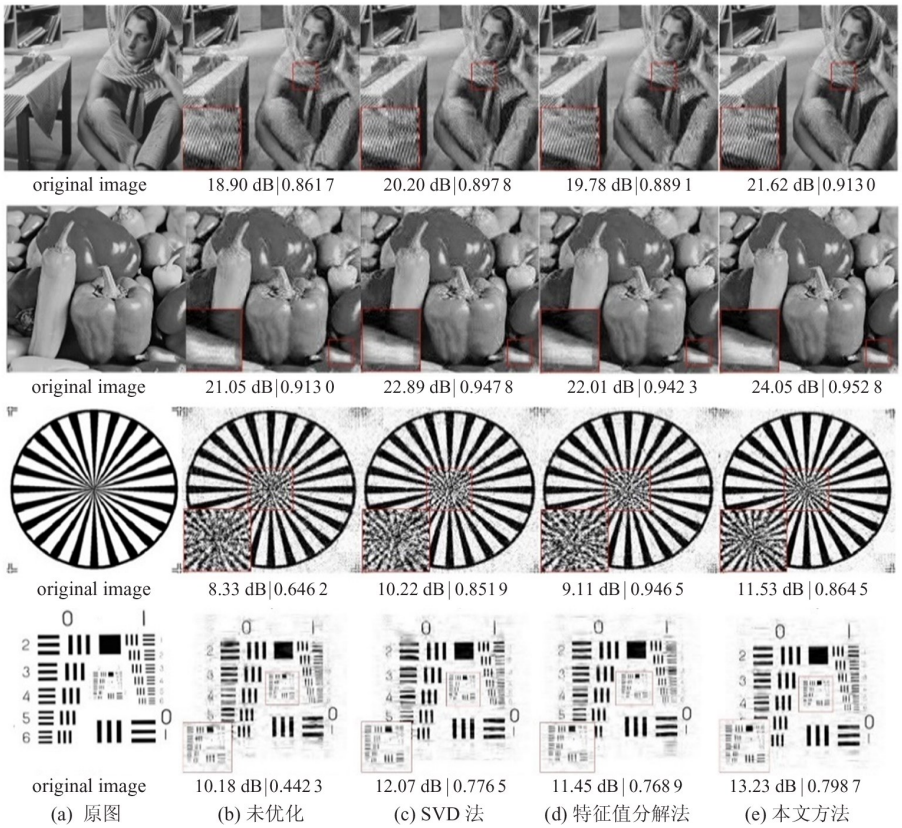
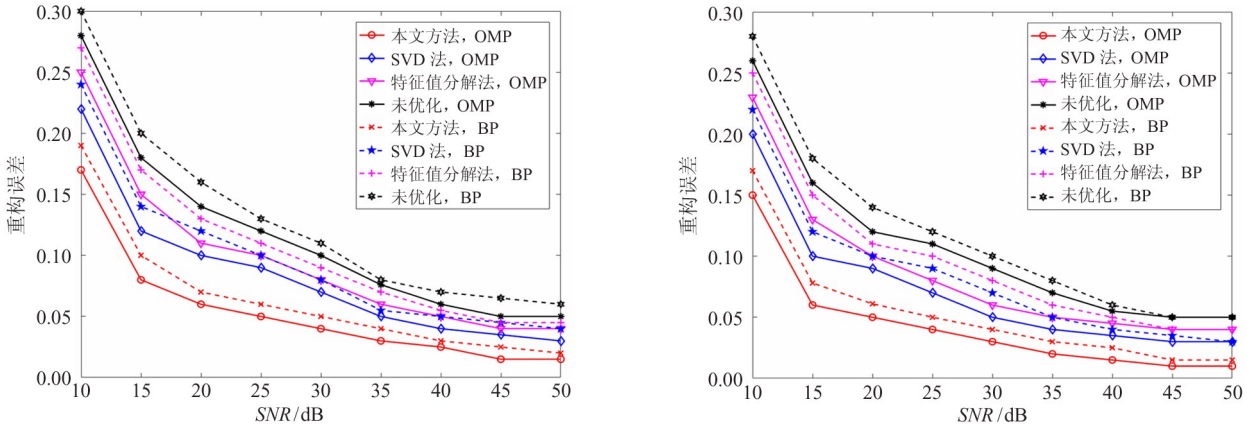


图 7　4 幅图像在采样率 $R=0.10$ 时 3 种优化方法对 Gau 矩阵优化后的重构结果

像经过3 种优化算法对 Gau 矩阵优化后的重构图像的视觉效果,并且与未优化的结果进行对比。此外对图像的局部细节放大处理,放置在图像左下角用矩形框框住以对比重构的细节差异。三种优化方法的重构图像的局部细节基本可见,纹理细节基本清晰,但是特征值分解法和 SVD 法的重构图像存在不同程度的伪影,视觉效果相当,而本文提出的优化方法的重构图像视觉效果优于另外 2 种优化方法,更接近原始图像。

为了验证所提出的优化方法在噪声情况下的鲁棒性,考虑噪声模型 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}+\boldsymbol{v}$,其中 $\boldsymbol{v}$ 是均值为 0 的加性高斯噪声向量。测量矩阵大小为 55 × 110,以信噪比(signal noise ratio,SNR)取值范围为 10 ~ 50 dB来进行实验,重构算法分别选取 OMP 和 BP 算法。从图 8 可以看出,重构误差随着信噪比的增加而减小,并且本文的优化方法的误差小于其他方法,鲁棒性更好。

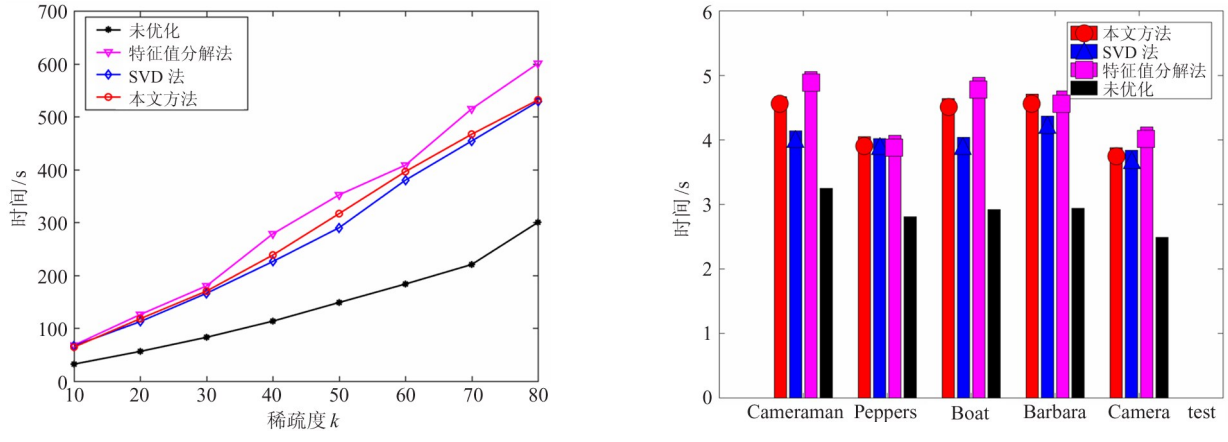


(a) Gau 矩阵　　(b) Toe 矩阵

图 8　不同优化算法对测量矩阵优化后重构误差随 SNR 变化

3.3　重构时间比较

重构时间也是评价优化方法性能的一个指标,图 9(a)显示了 512 × 1 一维信号的重构时间和稀疏度之间的关系。选择 OMP 算法作为重构算法,测量矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}_{160\times512}$,稀疏度取值范围为 $10 \leqslant k \leqslant 80$。图 9(b)选取 5 张测试图像(Cameraman, Peppers, Boat, Barbara, Camera test)比较其重构时间,采样率为 0.1。从图 9 可以看出本文提出的优化算法时间低于特征值分解法,略高于 SVD 法。



(a) 一维信号　　(b) 二维图像

图 9　不同优化算法重构时间比较

4 结 论

本文提出了一种基于 SVD-Schmidt 正交化的测量矩阵优化方法,通过降低矩阵互相关性来提高测量矩阵的性能。同时进行了一维信号和二维图像的仿真实验来验证提出的方法的优越性。一维信号重构实验结果表明优化后的测量矩阵提高了信号重构性能,并且讨论了在有噪声的情况下优化方法的鲁棒性,结果表明本文优化方法的误差小于其他方法,鲁棒性更好;在二维图像重构实验中,以采样率 $R = 0.10$ 为例,本文提出的优化方法性能优于现有的一些优化方法,比如本文选取 SVD 法和特征值分解法,对于 Toe 矩阵来说,本文所提优化算法的 PSNR 值(SSIM 值)相比于 SVD 方法和特征值分解法平均提升了 1.46 dB(0.026 7)和 2.57 dB (0.037 8)。此外对重构时间进行了比较,结果表明本文提出的优化算法时间低于特征值分解法,略高于 SVD 法。这些仿真结果表明了所提的优化方法的有效性和优越性。

参考文献

[1] CANDES E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008,25(2):21-30.

[2] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006,52(4):1289-1306.

[3] CANDES E J, TAO T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005,51 (12):4203-4215.

[4] ELAD M. Optimized projections for compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007,55 (12):5695-5702.

[5] ABOLGHASEMI V, FERDOWSI S, SANEI S. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing [J]. Signal Processing, 2012,92(4):999-1009.

[6] SHIRAZINIA A, DEY S. Optimized compressed sensing matrix design for noisy communication channels[C]// IEEE International Conference on Communications. London,UK: IEEE, 2015:4547-4552.

[7] TONG F, LI L, PENG H, et al. Flexible construction of compressed sensing matrices with low storage space and low coherence [J]. Signal Processing, 2021, 182: 107951-107963.

[8] HESHMATI A, AMINI S, GHAEMMAGHAMI S, et al. Designing low coherent measurement matrix with controlled spectral norm via an efficient approximation of norm[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022, 29: 2243-2247.

[9] LIANG J, PENG H, LI L, et al. Construction of structured random measurement matrices in semi-tensor product compressed sensing based on combinatorial designs [J]. Sensors, 2022,22(21):8260-8277.

[10] WU F, ZHANG N, LI Y, et al. Compressed sensing method for cutting force signals based on improved Gauss random measurement matrix[J]. China Mechanical Engineering, 2021,32(18):2231-2238.

[11] YI R, CUI C, WU B, et al. A new method of measurement matrix optimization for compressed sensing based on alternating minimization[J]. Mathematics, 2021,9(4): 329-347.

[12] WANG P, LIU X, LI X, et al. An improved measurement matrix of compressed sensing for synthetic aperture ultrasound imaging[J]. Applied Acoustics, 2022,188: 108592-108601.

[13] KOLLER M, UTSCHICK W. Learning a compressive sensing matrix with structural constraints via maximum mean discrepancy optimization [J]. Signal Processing, 2022,197:108553-108562.

[14] PARCHAMI M, AMINDAVAR H, ZHU W P. Learning-based design of random measurement matrix for compressed sensing with inter-column correlation using copula function[J]. IET Signal Processing, 2020,14(6):385-395.

[15] WEI Z, ZHANG J, XU Z, et al. Measurement matrix optimization via mutual coherence minimization for compressively sensed signals reconstruction [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020,2020:1-18.

[16] LU C, LI H, LIN Z. Optimized projections for compressed sensing via direct mutual coherence minimization [J]. Signal Processing, 2018,151:45-55.

[17] TONG F, LI L, PENG H, et al. Progressive coherence and spectral norm minimization scheme for measurement

matrices in compressed sensing[J]. Signal Processing, 2022,194:108435-108433.

[18] OBERMEIER R, MARTINEZ-LORENZO J A. Sensing matrix design via capacity maximization for block compressive sensing applications[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2018,5(1):27-36.

[19] 李周,崔琛. 基于奇异值分解的压缩感知观测矩阵优化算法[J]. 计算机应用, 2018,38(2):568-572.

[20] 魏伟,李岚,毛朝阳. 基于梯度下降法与特征值分解的测量矩阵优化方法[J]. 西安文理学院学报(自然科学版), 2021,24(2):12-17.

[21] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010,4(2):310-316.

[22] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1):129-159.

[23] BJÖRCK Å. Numeric of gram-Schmidt orthogonalization [J]. Linear Algebra and its Applications, 1994, 197: 297-316.

[24] 蔡改香. 关于施密特正交化的一点注释与应用[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2015,21(1):106-108.

Optimization of compressed sensing measurement matrix based on SVD-Schmidt orthogonalization

WANG Yue, QIN Yali

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

The performance of measurement matrices in compressed sensing (CS) theory affects the signal reconstruction performance. In order to optimize the measurement matrix and improve its reconstruction performance, this paper proposes an optimization method of CS measurement matrix based on singular value decomposition-Schmidt (SVD-Schmidt) orthogonalization. Singular value decomposition(SVD) of the measurement matrix is performed and the largest singular value is selected to replace original singular values to form a new matrix, and Schmidt normalization of it is performed, columns of the matrix are unitized. The optimization measurement matrix is obtained by the adaptive iterative optimization of rows and columns. The superiority of the proposed method is verified by simulation experiments of one-dimensional signal and two-dimensional image. The proposed optimization measurement matrix reduces the coherence obviously. Furthermore, the simulation results show that the signal reconstruction performance is improved after optimizing the measurement matrix, and the reconstruction performance of the proposed method is better than that of the existing SVD method and eigenvalue decomposition method.

Key words: compressed sensing (CS), measurement matrix, coherence, singular value decomposition-Schmidt (SVD-Schmidt) orthogonalization, iterative optimization