

正交各向异性圆柱壳裂纹形态求解及其自由振动特性^①谢宗伟^② 谭大鹏^③ 王 彤 李 霖 殷梓超 吴佳峰

(浙江工业大学机械工程学院 杭州 310014)

摘 要 含裂纹正交各向异性圆柱壳自由振动响应及其裂纹形态求解是一个复杂的结构动力学问题。针对此问题,提出一种基于线弹簧模型和波传播方法的含斜裂纹正交各向异性圆柱壳的裂纹形态求解方法。基于 Kirchhoff-Love 壳体理论,建立含斜裂纹的正交各向异性圆柱壳力学模型,得到经典边界条件下的正交各向异性圆柱壳的自由振动响应特性。利用线弹簧模型计算裂纹区域的局部柔度,构造了不同裂纹形态的附加应力关系。结合波传播方法,获得含斜裂纹的正交各向异性圆柱壳的自由振动响应特性,进而得到一种基于固有频率的裂纹形态识别方法。研究表明,裂纹的存在会导致圆柱壳局部柔度的降低和固有频率的下降,且裂纹的尺寸越大、深度越深,固有频率的下降程度越大;随着裂纹角度的增大,固有频率的下降程度先增大后减小;通过不同裂纹形态产生的固有频率变化规律,可以对裂纹形态进行识别,得到裂纹的几何空间分布。研究结果可为正交各向异性薄壳裂纹形态求解和振动响应求解方面的研究提供有益参考,也可为圆柱壳结构的裂纹损伤识别方面提供理论支持。

关键词 正交各向异性圆柱壳;裂纹形态;自由振动;线弹簧模型;波传播方法

0 引 言

薄壁圆柱壳振动响应是一个复杂的非线性动力学问题,对其裂纹形态进行求解是该领域的一个难点。目前针对此类问题的研究对象主要为各向同性材料结构^[1-4]。近年来,正交各向异性圆柱壳开始在航空航天、核电、石油等行业得到广泛应用^[5-6],其结构特性引起国内外学者的关注。Liu 等人^[7]基于 Donnell-Mushtari 壳体理论,给出了具有经典边界条件的正交异性圆柱壳的解析过程,并得到了具有确定系数的封闭振动解。在此基础上,张爱国等人^[8]为了解决边界条件的局限性问题,利用改进的 Fourier 级数法,得到了正交各向异性圆柱壳自由振动的控制方程,研究了不同边界条件对正交各向异

性圆柱壳结构振动行为的影响。此外,波传播法将圆柱壳的边界条件简化成对应的梁边界,可以有效地研究一般边界条件下正交各向异性圆柱形壳的自由振动特性。汪志强等人^[9]基于 Flügge 壳体理论和波传播方法讨论了正交各向异性圆柱壳的自由振动问题。Pang 等人^[10]基于 Reissner-Naghid 壳体理论,建立了控制运动方程,并利用波传播法研究了一般边界条件下,正交各向异性圆柱壳的自由振动特性。

在实际工作中,正交各向异性圆柱壳经常承受复杂的冲击作用,因而产生一定幅度的振动。在某些特殊情况下,冲击振动会致使薄壳产生疲劳裂纹,从而引发断裂,造成严重的生产事故。因此,为了确保其工作的安全,含有裂纹的正交各向异性圆柱壳的振动响应特性研究具有重要意义。关于结构中的

① 国家自然科学基金(51775501),浙江省杰出青年科学基金(LR16E050001)和浙江省大学生科技创新活动计划(2021R403064)资助项目。

② 男,1996年生,硕士生;研究方向:薄壳振动;E-mail: xiezongwei@zjut.edu.cn。

③ 通信作者,E-mail: tandapeng@zjut.edu.cn。

(收稿日期:2022-02-16)

裂纹分析, Joshi 等人^[11]提出了一种含局部裂纹的正交各向异性薄板模型, 分析了 3 种边界条件对第一振型频率的影响。Lai 等人^[12]研究了热环境条件下具有裂纹缺陷的正交各向异性矩形板的振动, 考虑了裂纹矩形板的均匀加热载荷, 研究了有裂纹或无裂纹板的临界屈曲温度。在这些研究中, 裂纹被假设是平行于板的一侧边缘。Googarchin 等人^[13]利用线弹簧模型建立壳体动力学模型, 得出了含裂纹正交各向异性圆柱壳自由振动的解析解, 但其只能分析轴向和周向 2 种特定角度的裂纹, 存在一定的局限性。

综合以上研究发现, 目前关于含裂纹缺陷的正交各向异性圆柱壳振动特性的研究较少, 建立的裂纹模型存在不能充分模拟裂纹的形态、扩展角度和传播方向等问题。针对上述问题, 本文对含有斜裂纹的正交各向异性圆柱壳的自由振动进行了研究, 基于 Kirchhoff-Love 壳体理论, 得到壳体运动的齐次偏微分方程组; 利用线弹簧模型来表示壳体上的表面裂纹, 根据壳体的正交各向异性, 分析裂纹区域附近的附加应力, 从而将裂纹元素引入到系统微分方程组中; 求解方程组, 得到含表面裂纹条件下正交各向异性圆柱壳的振动响应特性, 在此基础上讨论壳体参数以及裂纹形态等对自由振动固有频率的影响, 并基于不同阶数的固有频率下降比等值线图对裂纹形态进行识别, 得到裂纹的几何空间分布。本文提出的方法可以简单有效地求解含表面斜裂纹的正交各向异性圆柱壳的自由振动问题, 可为正交各向异性圆柱壳裂纹扩展规律及其裂纹识别方法的研究提供新的思路。

1 建模与求解

1.1 正交各向异性圆柱壳力学模型

建立如图 1 所示的正交各向异性圆柱壳力学模型, 为了方便计算, 采用圆柱坐标系进行研究。 r 、 θ 和 x 分别代表径向坐标、周向坐标与轴向坐标。圆柱壳的中面半径为 R 、厚度为 h 、长度为 L 。

正交各向异性圆柱壳在坐标方向上的弹性模量为 E_x 、 E_θ , 泊松比为 ν_x 、 ν_θ , 根据 Betti 原理^[14], 弹性

模量和泊松比之间有以下关系:

$$\nu_x E_x = \nu_\theta E_\theta \quad (1)$$

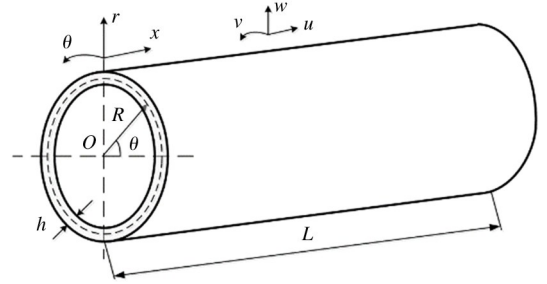


图 1 正交各向异性圆柱壳模型及坐标系示意图

选取壳体微元柱面为研究对象, 设轴向、周向和径向的位移分别为 u 、 v 、 w , 根据 Kirchhoff-Love 壳体理论, 壳体的应变表达式为^[15]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \\ \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} \\ \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中, $\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\phi_\theta = \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$, ε_x 、 ε_θ 、 $\varepsilon_{x\theta}$ 和 κ_x 、 κ_θ 、 $\kappa_{x\theta}$ 分别表示壳体中面的膜应变元和曲率应变元。根据动力学平衡理论以及弹性体应力、应变理论可得到自由振动方程式:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial x \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (4)$$

其中, t 为时间, ρ 为圆柱壳的密度。对于正交各向异性材料, N_x 、 $N_{\theta x}$ 、 $N_{x\theta}$ 和 N_θ 是单元上的薄膜应力, M_x 、 $M_{x\theta}$ 和 M_θ 是单元内的弯矩, 它们与位移 u 、 v 、 w

的关系为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(5)、(6)中, A_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) 是拉伸刚度, D_{ij} 是弯曲刚度, 且 $D_{ij} = A_{ij}h^2/12$, $i, j = 1, 2, 6$, A_{ij} 的表达式为

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_\theta}, A_{22} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_x \nu_\theta}, A_{12} = \frac{\nu_x E_x h}{1 - \nu_x \nu_\theta}, \\ A_{21} &= \frac{\nu_\theta E_\theta h}{1 - \nu_x \nu_\theta}, A_{66} = G_{x\theta} h \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $G_{x\theta}$ 为壳体材料的剪切模量。

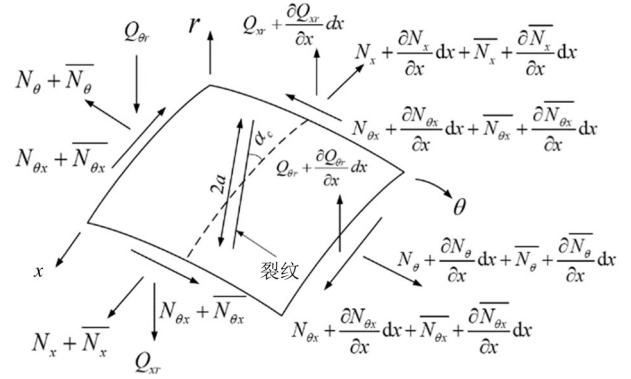
式(4)所示为完整正交各向异性圆柱壳自由振动方程, 为了模拟裂纹的存在, 还需应用合适的裂纹模型。本文利用线弹簧模型来模拟表面裂纹, 将该模型引入正交各向异性圆柱壳模型的重点和难点主要在于, 需要根据壳体的正交各向异性计算裂纹区域的附加应力与附加弯矩。

1.2 裂纹形态求解方法

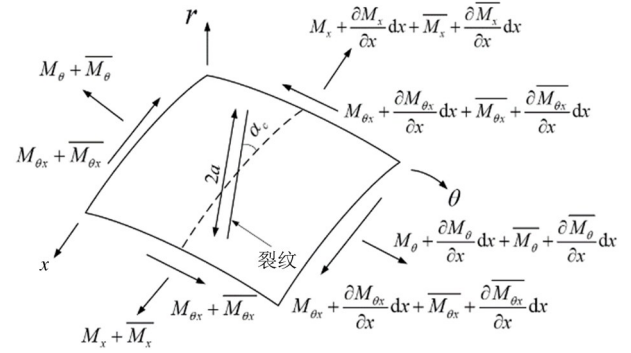
线弹簧模型^[16]是基于 Kirchhoff-Love 壳体理论提出的解决板壳结构表面裂纹问题的简化计算模型, 其主要优点是将表面裂纹这种三维问题降为二维问题进行处理, 从而降低了分析和计算过程的复杂性。假设裂纹的尺寸与壳体尺寸相比很小, 当曲率的影响可以忽略不计时, 用板问题的裂纹柔度系数来模拟壳体裂纹是一个简单有效的方法。因此, 本文利用线弹簧模型来解决正交各向异性圆柱壳的裂纹形态求解问题。

本文假设裂纹位于壳体的中心, 图 2 所示为含裂纹壳体微元柱面作用力和力矩分布, 图中 Q_{xr} 和 $Q_{\theta r}$ 为微元上的横向剪切力, $\overline{N}_x$ 和 $\overline{N}_{\theta x}$ 为裂纹区域的附加薄膜应力, $\overline{M}_x$ 和 $\overline{M}_{\theta x}$ 为裂纹区域的附加弯矩。

Moazzez 等人^[2]计算了各向同性壳体裂纹区域和远离裂纹区域的力和弯曲之间的关系。根据壳体的正交各向异性, 这些关系可以表示为



(a) 力的分布



(b) 力矩的分布

图 2 含裂纹正交各向异性圆柱壳微元的力和力矩分布

$$\overline{N}_x = PaN_x = \frac{a(1 - \cos 2\alpha)}{(6\alpha_{tb} + \alpha_{tt})(1 - \nu_x^2)h + 2a} N_x \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_x &= PbM_x \\ &= \frac{a(1 - \cos 2\alpha)}{3(\frac{\alpha_{tb}}{6} + \alpha_{tt})(3 + \nu_x)(1 - \nu_x)h + 2a} M_x \end{aligned} \quad (9)$$

$$\overline{N}_{x\theta} = PcN_{x\theta} = \frac{asin2\alpha}{(6c_{tb} + c_{tt})(1 - \nu_x^2)h + 2a} N_{x\theta} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_{x\theta} &= PdM_{x\theta} \\ &= \frac{asin2\alpha}{3(\frac{c_{tb}}{6} + c_{tt})(3 + \nu_x)(1 - \nu_x)h + 2a} M_{x\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

式(8)~(11)中, $a = R\theta_c$ 是表面裂纹长度的一半, θ_c 是裂纹张开角的一半, α_c 为表面裂纹与 x 轴之间的夹角, α_{tt} , α_{tb} 和 α_{bb} 是对称加载条件(模式 I)下的裂纹柔度系数; c_{tt} , c_{tb} 和 c_{bb} 是反对称加载条件(模

式2和模式3)下的裂纹柔度系数。

关于对称加载条件下的裂纹柔度系数,模式1的应力强度因子可表示为

$$K = \sqrt{h}(\sigma g_t + m g_b) \quad (12)$$

其中, σ 和 m 分别为名义拉应力和名义弯曲应力。 g_t 和 g_b 分别为结构的薄膜和弯曲应力强度因子,分别可以表示为

$$g_t(\xi) = \sqrt{\pi\xi}(1.1216 + 6.52\xi^2 - 12.3877\xi^4 + 89.0554\xi^6 - 188.6080\xi^8 + 207.387\xi^{10} - 32.0524\xi^{12}) \quad (13)$$

$$g_b(\xi) = \sqrt{\pi\xi}(1.1202 - 1.8872\xi + 18.0143\xi^2 - 87.3851\xi^3 + 241.9124\xi^4 - 319.9402\xi^5 + 168.0105\xi^6) \quad (14)$$

其中, ξ 是裂纹深度与壳体厚度之比。裂纹柔度系数可表示为

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{h} \int_0^s g_i g_j ds \quad (15)$$

其中, $i, j = t, b, s$ 为裂纹的深度。由上式对裂纹深度进行积分,可得:

$$\alpha_{tt} = \xi^2 \sum_{n=0}^{12} C_{tt}^{(n)} \xi^{2n} \quad (16)$$

$$\alpha_{bb} = \xi^2 \sum_{n=0}^{12} C_{bb}^{(n)} \xi^n \quad (17)$$

在非对称加载条件下, c_{ij} 同样为 ξ 的函数^[17]:

$$c_{tt} = \int_0^\xi f_t f_t d\xi \quad (18)$$

$$c_{bb} = \int_0^\xi f_b f_b d\xi \quad (19)$$

$$c_{tb} = c_{bt} = \int_0^\xi f_t f_b d\xi \quad (20)$$

其中, f_t 和 f_b 可以表示为

$$f_t(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \begin{pmatrix} 1 - 0.5\xi + 0.2861637\xi^2 \\ -0.2668382\xi^3 + 0.2215318\xi^4 \\ -0.177216\xi^5 + 0.1090614\xi^6 \\ -0.0441431\xi^7 + 0.0080606\xi^8 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$f_b(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \begin{pmatrix} 1 - 1.77376\xi + 0.937496\xi^2 \\ -0.602894\xi^3 + 1.176914\xi^4 \\ -2.183231\xi^5 + 2.906943\xi^6 \\ -2.121964\xi^7 + 0.659759\xi^8 \end{pmatrix} \quad (22)$$

将式(8)~(11)中的裂纹项带入式(4)中可得到含表面裂纹正交各向异性圆柱壳的自由振动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{N}_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 \bar{M}_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + N_\theta \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (23)$$

1.3 含裂纹圆柱壳自由振动方程的求解

将式(5)、(6)带入式(23)中,可得到3个位移方向上的运动方程:

$$[J_{ij}] \{u, v, w\}^T = \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u, v, w\}^T \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (24)$$

以简支边界条件为例,该边界条件为

$$v = w = N_x = M_x = 0, x = 0, L \quad (25)$$

采用波传播方法进行研究,考虑周向和轴向模态间的耦合作用,可将自由振动方程位移解的形式设为^[18]

$$\begin{cases} u(x, \theta, t) = U_{mn} \cos \lambda x \cos n \theta \cos \omega t \\ v(x, \theta, t) = V_{mn} \sin \lambda x \sin n \theta \cos \omega t \\ w(x, \theta, t) = W_{mn} \sin \lambda x \cos n \theta \cos \omega t \end{cases} \quad (26)$$

其中, U_{mn} 、 V_{mn} 、 W_{mn} 分别对应 x 、 r 和 θ 方向上的位移幅值, λ 为 x 方向的特征波数。当边界条件为两端简支时, $\lambda = m\pi/L$ 、 n 为周向的模式阶数, m 为轴向半波数, ω 为轴向的圆频率。将所设的3个方向的位移解代入式(24)中的圆柱壳自由振动位移方程组中,约去公共因子化简得到系统特征方程的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

经求解,式(27)中系统特征方程的系数矩阵各

元素为

$$L_{11} = -A_{11}\lambda^2(1 - Pa) - A_{66}\frac{n^2}{R^2}(1 - Pc) + \rho h\omega^2 \quad (28)$$

$$L_{12} = A_{12}\lambda\frac{n}{R}(1 - Pa) + A_{66}\lambda\frac{n}{R}(1 - Pc) \quad (29)$$

$$L_{13} = A_{12}\frac{\lambda}{R}(1 - Pa) \quad (30)$$

$$L_{21} = A_{12}\lambda\frac{n}{R} + A_{66}\lambda\frac{n}{R}(1 - Pc) \quad (31)$$

$$L_{22} = -A_{66}\lambda^2\frac{n}{R}(1 - Pc) - A_{22}\frac{n^2}{R^2} - D_{66}\frac{\lambda^2}{R^2}(1 - Pd) - D_{22}\frac{n^2}{R^4} + \rho h\omega^2 \quad (32)$$

$$L_{23} = -n\frac{A_{22}}{R^2} - D_{66}\frac{2n\lambda^2}{R^2}(1 - Pd) - D_{12}\frac{n\lambda^2}{R^2} - D_{22}\frac{n^3}{R^4} \quad (33)$$

$$L_{31} = A_{12}\frac{\lambda}{R} \quad (34)$$

$$L_{32} = -n\frac{A_{22}}{R^2} - D_{66}\frac{2n\lambda^2}{R^2}(1 - Pd) - D_{12}\frac{n\lambda^2}{R^2}(1 - Pb) - D_{22}\frac{n^3}{R^4} \quad (35)$$

$$L_{33} = -D_{11}\lambda^4(1 - Pb) - D_{12}\frac{(n\lambda)^2}{R^2}(1 - Pb) - D_{12}\frac{(n\lambda)^2}{R^2} - 4D_{66}\frac{(n\lambda)^2}{R^2}(1 - Pd) - D_{22}\frac{n^4}{R^4} - \frac{A_{22}}{R^2} + \rho h\omega^2 \quad (36)$$

若式(27)有非零解,则行列式的值 $\det([L_{ij}]) = 0$ 。若已知壳体的特征波数,将特征波数代入到行列式中,按行列式规则进行展开,可得到关于自由振动固有频率 ω 的六次方程:

$$a_6\omega^6 + a_4\omega^4 + a_2\omega^2 + a_0 = 0 \quad (37)$$

式中, a_i 为方程的系数,通过求解该方程,可得到 3 对复数根,其中最小的正实根即为对应耦合模态下正交异性圆柱壳的自由振动固有频率。本文讨论的裂纹形态因素包括裂纹的长度、角度和深度,通过求解式(37)可以得到含有不同形态裂纹的圆柱壳的固有频率,进而分析固有频率随着裂纹形态的变化

规律,由此探寻基于固有频率的裂纹形态识别方法。

2 数值分析

2.1 方法验证

为了验证所提出计算方法的准确性,将本文计算方法所得结果与已发表文献进行对比。通过将式(8)~(11)中的裂纹长度 a 设置为 0,可以得到现有模型的无裂纹结果。选取文献[19]中给出的 4 种材料情况进行验证,其具体材料属性如表 1 所示,将正交各向异性圆柱壳的边界条件设置为两端简支。文献结果和采用本文方法计算所得结果如表 2 所示(壳体参数:相对长度 $L/R=2$,相对厚度 $h/R=0.01$,轴向半波数 $m=1$ 。无量纲固有频率 Ω 可以表示为 $\Omega = \omega R / \sqrt{E_x/\rho/(1 - \nu_x\nu_\theta)}$)。

文献[19]和[20]在建立正交各向异性圆柱壳模型时,分别使用了 Novozhilov 理论和 Flügge 理论。从表 2 中的比较结果中可以看出,本文方法计算所得结果与 2 组文献中的计算结果相比,整体误差很小,其最大值均不超过 0.9%。此外,本文方法在分析裂纹问题时,利用线弹簧模型将复杂的三维问题转化为二维问题,可使用 Matlab 编写程序进行求解,具有计算简单、求解效率高的优点。

表 1 圆柱壳的材料属性

	ν_θ	E_x/GPa	E_θ/GPa	G/GPa
情况 1	0.012 114	227.350	20.876	7.958
情况 2	0.040 000	68.599	20.799	7.958
情况 3	0.131 926	20.545	20.545	7.958
情况 4	0.131 926	20.799	68.599	7.958

2.2 壳体参数对固有频率的影响

为了分析壳体参数对自由振动固有频率的影响,结合参考文献采用如表 3 所示的圆柱壳参数进行计算分析。

取 $L/R=5$, $m=1$,无量纲频率 Ω 随周向模态数 n 的变化曲线如图 3(a) 所示,当 $n=0,1,2$ 时,各组 h/R 对应的 Ω 几乎重合;当 $n>2$ 时, $h/R=0.05$ 、 0.1 对应的 Ω 随着 n 的上升迅速增加,且 h/R 值越大,增加速度越快,而 $h/R=0.001,0.01$ 对应的 Ω

表 2 无量纲固有频率理论计算结果与文献中结果对照

结果	情况	Ω					
		周向波数 n					
		2	3	4	5	6	7
文献[19]	1	0.119 875	0.085 272	0.065 184	0.054 311	0.050 975	0.054 227
	2	0.207 798	0.139 463	0.100 747	0.081 915	0.079 310	0.089 311
	3	0.330 057	0.198 610	0.134 684	0.113 414	0.122 501	0.150 636
	4	0.335 754	0.201 822	0.148 874	0.153 026	0.194 244	0.256 190
文献[20]	1	0.119 888	0.085 277	0.065 190	0.054 336	0.051 014	0.054 286
	2	0.207 822	0.139 494	0.100 772	0.081 952	0.079 335	0.089 433
	3	0.330 100	0.198 607	0.134 742	0.113 515	0.122 652	0.150 753
	4	0.335 802	0.201 833	0.148 975	0.153 209	0.194 549	0.256 795
本文结果	1	0.119 640	0.085 065	0.065 010	0.054 161	0.050 826	0.054 080
	2	0.206 940	0.138 920	0.100 420	0.081 699	0.079 094	0.089 173
	3	0.330 110	0.198 650	0.134 820	0.113 610	0.122 750	0.150 830
	4	0.332 770	0.199 440	0.147 680	0.153 090	0.195 080	0.257 600
最大误差 /%	1	0.21	0.25	0.28	0.32	0.37	0.38
	2	0.42	0.41	0.35	0.31	0.30	0.29
	3	0.02	0.02	0.10	0.17	0.20	0.13
	4	0.90	0.12	0.87	0.04	0.43	0.55

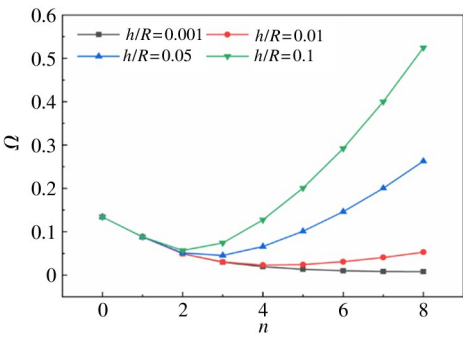
表 3 圆柱壳材料参数

ν_θ	E_x/GPa	E_θ/GPa	G/GPa	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$
0.27	120	10	5.5	1700

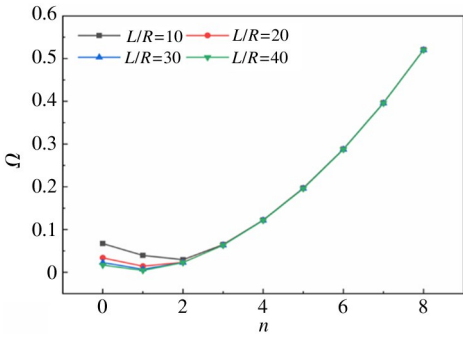
值则持续下降;当 $n > 4$ 后趋于平稳或呈缓慢增加趋势。取 $h/R = 0.1$, 其 Ω 随 n 的变化曲线如图 3(b) 所示, 当 $n = 0, 1$ 时, 壳体的 L/R 值越小则 Ω 值越高; 当 $n > 1$ 时, $L/R = 10, 20, 30, 40$ 时对应的 Ω 变化曲线几乎重合, 其变化趋势总体上与图 3(a) 中曲线 $h/R = 0.1$ 基本相同。由图 3 可知, 当 $n > 2$ 时, Ω 的值只受相对厚度 h/R 的影响, 对相对长度 L/R 的变化不敏感。

取 $L/R = 20, n = 1$, 其 Ω 随 m 的变化曲线如图 4(a) 所示, 取不同的 h/R 值的壳体, Ω 均随 m 的上升而增加, 且各条曲线几乎重合, 说明随着 m 的变化, Ω 基本不受 h/R 值的影响。取壳体 $h/R = 0.1$, 其 Ω 随 m 的变化曲线如图 4(b) 所示, 随着 m 的上升, Ω 均呈增加趋势, 且壳体 L/R 值越小, Ω 增加得越快。由图 4 可知: 随着 m 的变化, Ω 只受 L/R 的影响, 且 L/R 值越小, Ω 增加得越快。

取 $L = 5 \text{ m}, h/R = 0.01, m = 1, E_\theta = 10 \text{ GPa}$, 具有不同 E_x/E_θ 比的圆柱壳体的无量纲固有频率 Ω 随周向波数 n 的变化曲线如图 5(a) 所示。当 $n < 4$



(a) 不同 h/R 值



(b) 不同 L/R 值

图 3 无量纲频率随周向模态数变化曲线 ($m = 1$)

时, 各种壳体对应的 Ω 逐渐减小; 当 $n > 4$ 时, Ω 的值逐渐增大。同时, 当 E_x/E_θ 比越大时, 无量纲固有频率 Ω 的值越小。

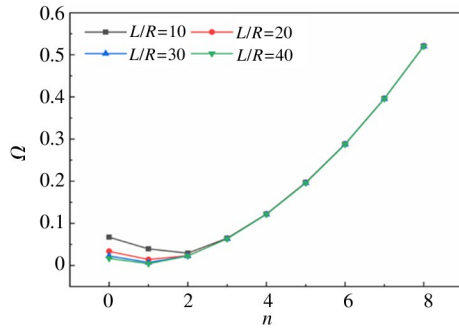
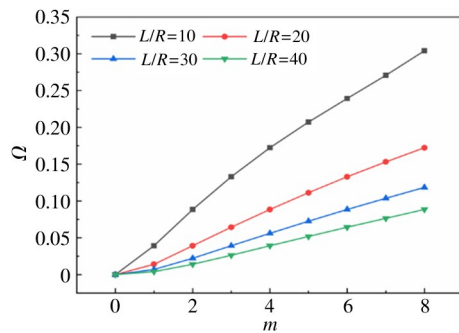

 (a) 不同 h/R 值

 (b) 不同 L/R 值

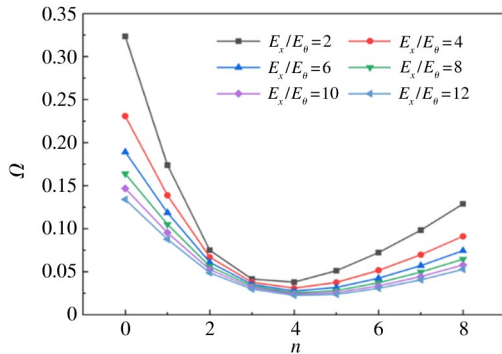
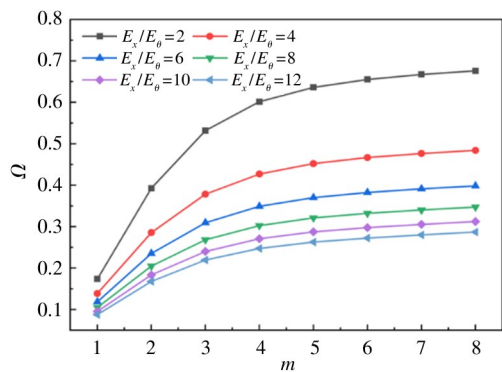
 图 4 无量纲频率随轴向模态数变化曲线 ($n=1$)

 (a) 无量纲固有频率随 n 的变化

 (b) 无量纲固有频率随 m 的变化

 图 5 不同 E_x/E_θ 值的圆柱壳无量纲频率变化曲线

取 $L=5\text{ m}$ 、 $h/R=0.01$ 、 $n=1$ 、 $E_\theta=10\text{ GPa}$, 具有不同 E_x/E_θ 比的圆柱壳体的无量纲固有频率 Ω 随轴向波数 m 的变化曲线如图 5(b) 所示, 随着 m 的增加, 各种壳体对应的 Ω 逐渐增大, 当 $m>4$ 时, Ω 的值趋于平稳。同样地, 当 E_x/E_θ 比越大时, 无量纲固有频率 Ω 的值越小。

2.3 裂纹形态对圆柱壳固有频率的影响

正交各向异性圆柱壳上的裂纹形态如图 6 所示。为了方便表示裂纹的尺寸, 定义一个无量纲参数 $\beta = \theta_c/\theta_{\max}$ ($\beta \in [0, 1]$), 其中 θ_c 是裂纹的半开角, $\theta_{\max}$ 是裂纹的最大半开角。由于线弹簧模型仅在裂纹尺寸远小于壳体尺寸 (特别是其半径) 的情况下有效, 因此, 假设 $\theta_{\max} = 2^\circ$ 。

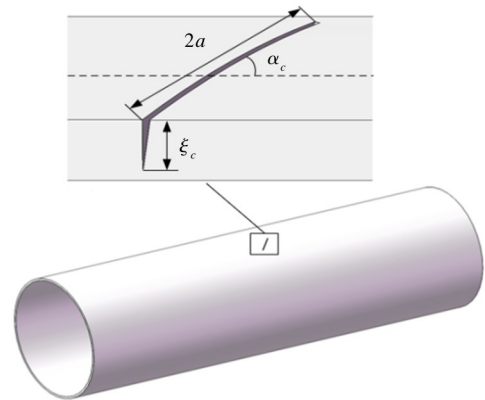


图 6 裂纹形态示意图

为了表示裂纹的角度, 引入了一个无量纲参数 $\eta = \alpha_c/\alpha_{\max}$ ($\eta \in [0, 1]$), α_c 为表面裂纹与 x 轴之间的夹角, $\alpha_{\max} = 90^\circ$ 。另外, ξ_c 为裂纹的深度, 则裂纹深度与壳体厚度之比 $\xi = \xi_c/h$ (本文限制 $\xi \in [0, 0.9]$)。定义第一振型 ($m=1, n=1$) 固有频率下降比 $\tau = [(\omega_i - \omega_c)/\omega_i] \times 100\%$, 其中 ω_i 和 ω_c 分别为完整壳体和含裂纹壳体的第一振型固有频率。

在 ABAQUS 软件中建立含裂纹正交各向异性圆柱壳体的三维有限元模型, 并进行模态分析, 以验证裂纹模型的准确性。在建立有限元模型时, 根据式(25)中的约束条件对简支边界进行模拟 (如图 7 所示)。根据在裂纹附近对有限元模型的网格进行加密处理 (如图 8 所示), 在裂纹尖端进行进一步加密 (如图 9 所示), 以减少裂纹尖端的应力奇异性, 提高模型的计算精度。

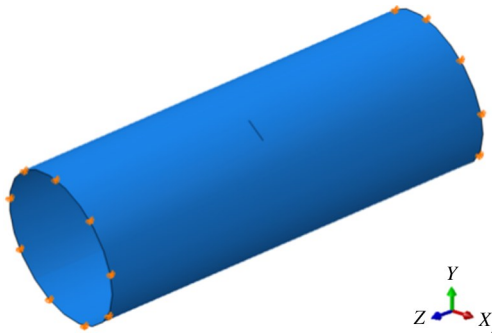


图7 有限元模型及边界条件设置

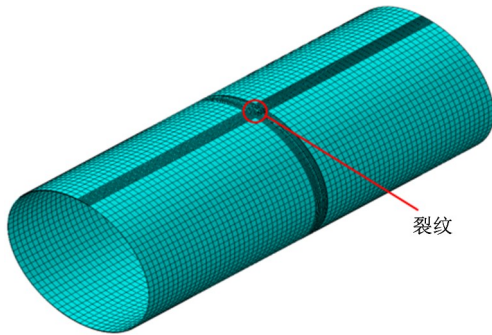


图8 有限元模型的网格划分及裂纹区域加密

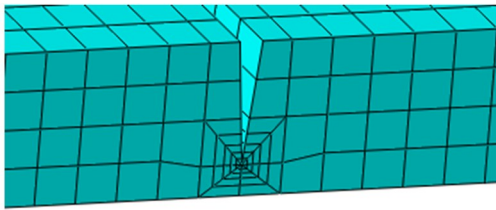


图9 裂纹尖端的网格加密细节

采用不同的网格划分策略对有限元计算结果可能有一定的影响,因此需要进行网格收敛性验证。从图10中可以得出结论,对于全局种子大小小于0.1的网格配置,第一振型固有频率几乎保持不变,因此在建立有限元模型时,将全局种子大小设置为0.1,局部种子为0.01~0.05。

表4中给出了理论计算得出的简支边界条件下,含裂纹壳体固有频率与有限元仿真结果的对比(圆柱壳的材料参数与表3中的相同, $L=5\text{ m}$, $R=1\text{ m}$, $h=0.01\text{ m}$, $\beta=1$, $\eta=1$, $m=1$)。结果表明,理论计算的结果与有限元仿真结果吻合性良好,因此建立的模型可以用来分析裂纹对正交各向异性圆柱壳固有频率的影响。

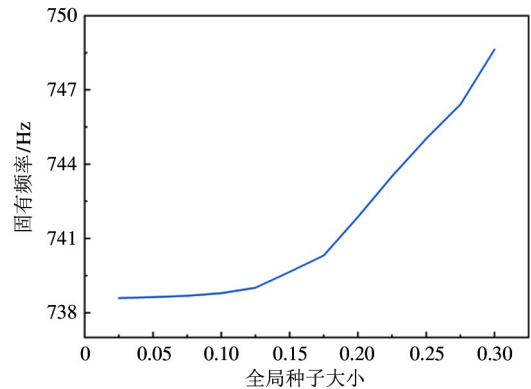


图10 网格收敛性验证

表4 含裂纹圆柱壳固有频率的理论计算结果与有限元仿真计算结果的对照($m=1$)

n	有限元结果/Hz	理论计算结果/Hz	误差/%
1	741.54	738.79	0.37
2	413.24	411.38	0.45
3	253.72	252.24	0.58
4	192.33	191.02	0.68
5	202.57	201.50	0.53
6	259.75	258.77	0.38
7	344.26	342.78	0.43
8	446.92	445.25	0.37

图11研究了不同裂纹尺寸对壳体第一振型($m=1$, $n=1$)固有频率下降比 τ 的影响。图11(a)所示为 $\eta=1$ 、 $L=20\text{ m}$ 、 $R=1\text{ m}$ 时,不同相对厚度圆柱壳的 τ 随 β 变化而变化的曲线,可见固有频率随着裂纹长度增大而减小,这是由于裂纹的存在使壳体刚度减小所导致的,当 h/R 越小时,固有频率下降越明显。图9(b)所示为 $\eta=1$ 、 $h=0.01\text{ m}$ 、 $R=1\text{ m}$ 时,不同相对长度圆柱壳的 τ 随 β 变化而变化的曲线,从图中可以看出,对于具有恒定相对厚度的壳体,随着裂纹长度的增大,固有频率逐渐减小,同时,对于恒定的裂纹尺寸,在 L/R 值较大的壳体中,固有频率的变化更明显。

图12研究了不同裂纹深度对壳体第一振型固有频率下降比 τ 的影响。图12(a)所示为 $\beta=1$ 、 $\eta=1$ 、 $L=20\text{ m}$ 、 $R=1\text{ m}$ 时,不同相对厚度圆柱壳的 τ 随裂纹相对深度 ξ 变化而变化的曲线,可见固有频率随着裂纹深度增大而减小,当 h/R 越小时,固有频率下降越明显。

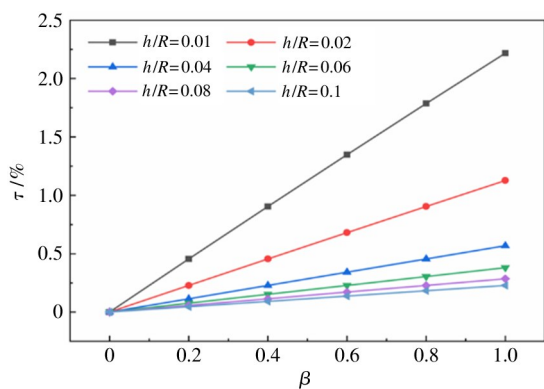
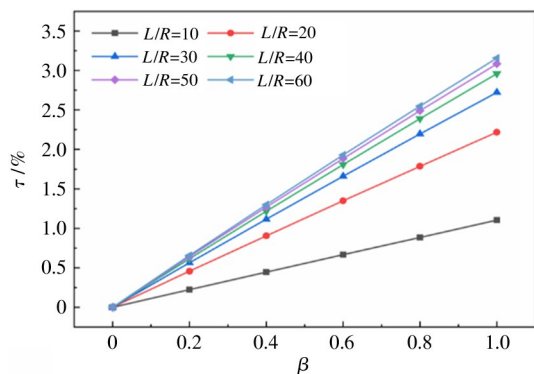

 (a) 不同 h/R 值

 (b) 不同 L/R 值

图 11 不同裂纹尺寸的频率下降比

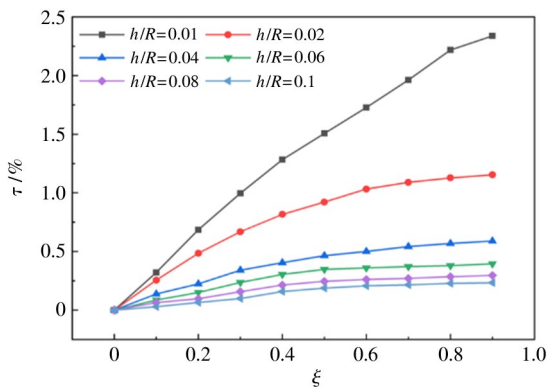
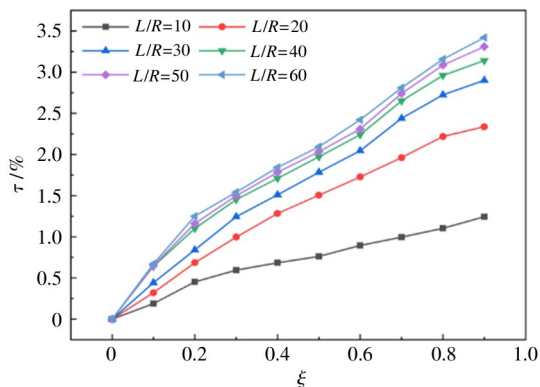

 (a) 不同 h/R 值

 (b) 不同 L/R 值

图 12 不同裂纹深度的频率下降比

图 12(b) 所示为 $\beta = 1$ 、 $\eta = 1$ 、 $h = 0.01 \text{ m}$ 、 $R = 1 \text{ m}$ 时, 不同相对长度圆柱壳固有频率随 ξ 变化而变化的曲线。从图中可以看出, 对于具有恒定相对厚度的壳体, 随着裂纹深度的增大, 固有频率逐渐减小, 同时, 对于恒定的裂纹尺寸, 在较长的壳体中, 固有频率的变化更明显。

图 13 研究了裂纹角度对裂纹壳体第一振型固有频率下降比 τ 的影响, 图 13(a) 中所示为 $\beta = 1$ 、 $R = 2 \text{ m}$ 、 $L/R = 40$ 时, 不同相对厚度圆柱壳的 τ 随 η 变化而变化的曲线。从图中可以看出, 当 $\eta < 0.5$ 时, 随着 η 的增大, 各组固有频率逐渐减小; 当 $\eta = 0.5$, 即 $\alpha_c = 90^\circ$ 时, 固有频率减小到最小; 当 $\eta > 0.5$ 时, 固有频率逐渐增大。另外, 固有频率的变化在 R/h 较大时更明显。

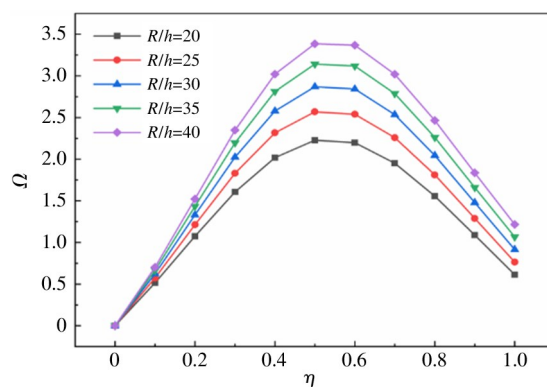
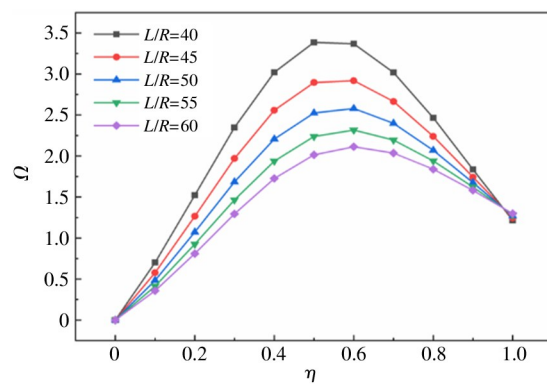

 (a) 不同 h/R 值

 (b) 不同 L/R 值

图 13 不同裂纹角度的频率下降比

图 13(b) 中 ($\beta = 1$ 、 $R = 2 \text{ m}$ 、 $R/h = 40$), 不同相对长度圆柱壳的 τ 随 η 的变化与图 13(a) 有相似的趋势, 但固有频率的变化在 L/R 值较小时更明显。

2.4 基于固有频率下降比的裂纹形态识别

对于含有斜裂纹的正交各向异性圆柱壳,裂纹形态的不同,会产生不同的受力状态,引起不同的裂纹扩展行为,因此对裂纹形态的识别是十分重要的。

取圆柱壳的 $L=40\text{ m}$ 、 $R=0.5\text{ m}$ 、 $h=0.01\text{ m}$,定义 $m=2$ 、 $n=1$ 时的固有频率下降比为 τ' 。分别绘制不同阶固有频率下降比 τ 和 τ' 随裂纹长度和角度变化的三维曲面图,如图 14 所示。

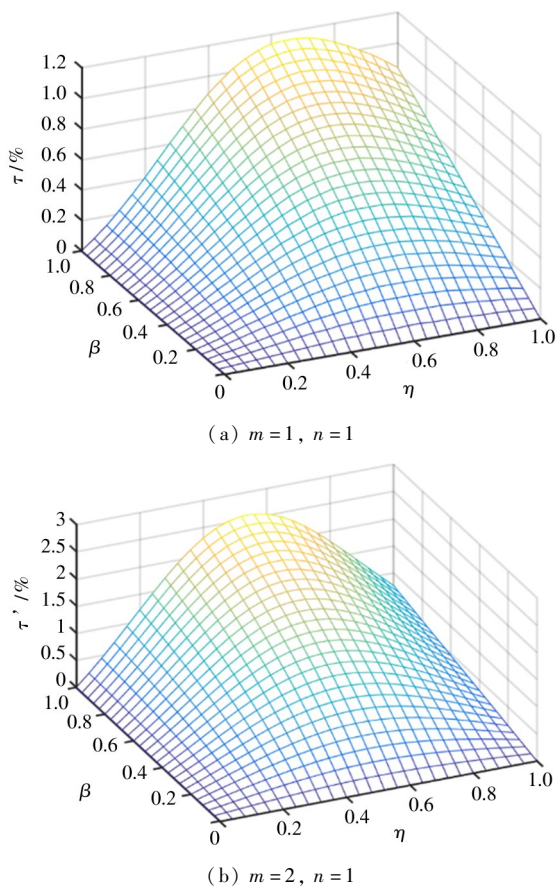


图 14 不同阶固有频率下降比

由图 14 可知,相同几何参数的正交各向异性圆柱壳中含有不同角度或长度的裂纹时,会得到不同的固有频率下降比,因此可以绘制固有频率下降比在不同裂纹长度 β 和相对角度 η 下的等值线图。由于裂纹点既在第一条等值线也在第二条等值线上,则这 2 条等值线必会有交点,交点信息即为裂纹信息。基于上述思路,假设正交各向异性圆柱壳上有一裂纹,裂纹的长度 $\beta=0.8$ 、角度为 $\eta=0.4$,通过之前的计算得一阶固有频率下降比 τ 为 0.48%,二阶固有频率下降比 τ' 为 0.91%。根据这两阶固有

频率下降比,得到其对应的固有频率下降比等值线图,如图 15 所示。从图中可以看到这 2 条等值线相交于 $\beta=0.8$ 、 $\eta=0.4$,即识别出了裂纹的长度和角度。该裂纹形态如图 16 所示,裂纹的长度为 28.2 mm,角度为 36° ,深度为 4 mm。裂纹形态的影响因素包括裂纹的长度、角度和深度,这些因素的改变均会导致固有频率下降比的变化。绘制不同阶固有频率下降比的等值线图,根据不同等值线图的交点可以确定裂纹长度、角度和深度,从而有效地识别了正交各向异性圆柱壳上的裂纹形态。

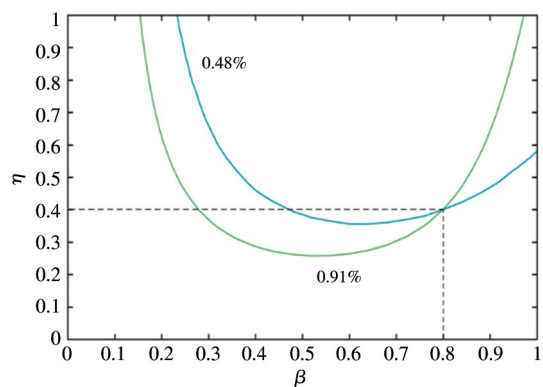


图 15 基于等值线的裂纹形态识别

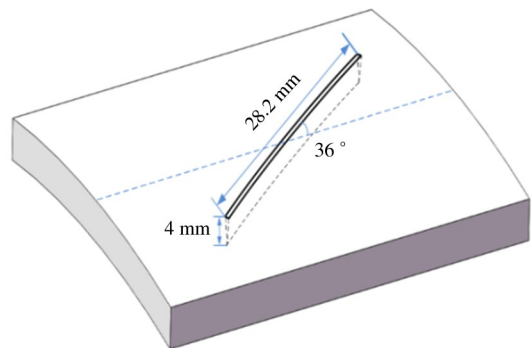


图 16 裂纹形态示意图

3 实验验证

根据第 2 节中建立的有限元仿真模型仿真来搭建相关实验平台(如图 17 所示),采用 LMSTest. Lab 振动测试平台对正交各向异性圆柱壳进行模态频率测试。选择玻璃/环氧树脂材料管道来作为正交各向异性圆柱壳模型,其几何尺寸与材料参数如表 5 所示。

为了验证正交各向异性圆柱壳裂纹求解方法的

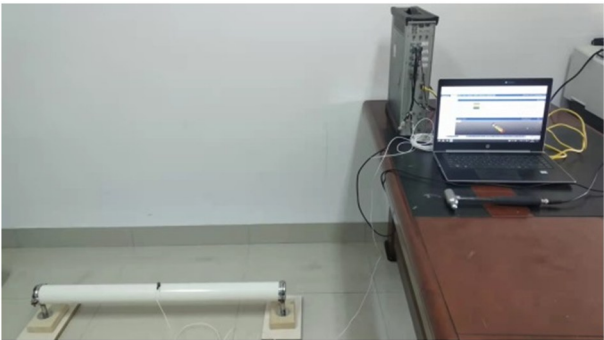
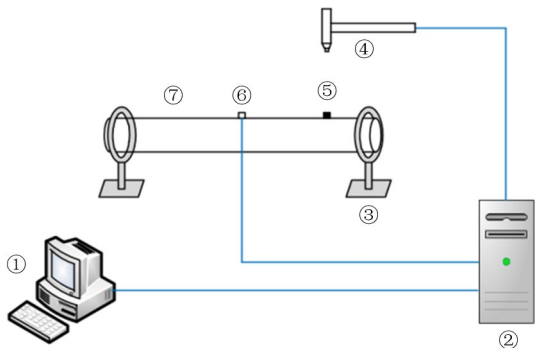


图 17 实验测试平台

表 5 实验圆柱壳参数

参数	数值
内径 D_i/m	0.071
壁厚 h/m	0.002
长度 L/m	1
轴向弹性模量 E_x/GPa	55.9
周向弹性模量 E_θ/GPa	13.7
周向泊松比 ν_θ	0.277
密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1208

准确性,确定实验的基本流程:利用冲击力锤在正交各向异性圆柱壳上施加一个锤击激励,并在其上布置加速度传感器,以获得圆柱壳的频率响应函数,在此基础上利用 LMS Test. Lab 对模态进行提取,以得到圆柱壳的各阶自由振动固有频率。实验原理如图 18所示。



1. PC 机;2. LMS Test. Lab 主机;3. 支架;4. 冲击力锤;
5. 锤击点;6. 加速度传感器;7. 圆柱壳管道

图 18 实验原理示意图

对圆柱壳进行模态频率测试,获得其各阶自由振动固有频率结果($m=1$,边界条件为简支边界),

并与理论和仿真值进行对比,其结果如表 6 所示。从表中可以看出理论值与实验结果存在一定误差(这与外界环境干扰和实验边界条件的设置等因素有关),但误差不超过 5%,且理论值与仿真结果较吻合。

表 6 完整圆柱壳固有频率对比($m=1$)

n	固有频率/Hz			理论与实验的误差/%
	实验	理论	仿真	
1	269.71	259.06	260.15	3.95
2	809.14	775.42	779.55	4.17
3	2273.68	2181.63	2199.37	4.05

表 7~9 分别给出了通过实验方法测得的裂纹长度、深度和角度改变时的正交各向异性圆柱壳第一阶($m=1, n=1$)固有频率下降比。从各表中可以看出,理论所得的固有频率下降比与实验结果的误差均不超过 3.5%,可以认为所提方法具有较好的准确性。

表 7 不同裂纹长度的固有频率下降比($\xi=0.7, \eta=1$)

β	固有频率下降比/%		
	实验	理论	误差/%
0.3	0.166	0.170	2.41
0.7	0.382	0.394	3.14
1.0	0.545	0.563	3.30

表 8 不同裂纹深度的固有频率下降比($\beta=0.7, \eta=1$)

ξ	固有频率下降比/%		
	实验	理论	误差
0.3	0.307	0.315	2.61
0.5	0.352	0.362	2.84
0.7	0.382	0.394	3.14

表 9 不同裂纹角度的固有频率下降比($\beta=0.7, \xi=0.7$)

η	固有频率下降比/%		
	实验	理论	误差
0.3	1.120	1.150	2.68
0.5	1.520	1.560	2.63
1.0	0.382	0.394	3.14

4 结 论

基于 Kirchhoff-Love 壳体理论推导了正交各向异性圆柱壳偏微分形式的自由振动方程,结合线弹簧模型,得到了含斜裂纹正交各向异性圆柱壳的自由振动响应特性,分析了壳体的几何参数与裂纹的尺寸、角度等因素对自由振动固有频率的影响,并进行了仿真和实验验证,主要研究结果可归纳如下。

(1) 当轴向模态数 m 一定且周向模态数 $n > 2$ 时,完整正交各向异性圆柱壳的无量纲固有频率 Ω 的值只受相对厚度 h/R 的影响,对相对长度 L/R 的变化不敏感;当周向模态数 n 一定时,各阶轴向模态数对应的无量纲固有频率 Ω 只受相对厚度 L/R 的影响,对相对长度 h/R 的变化不敏感。

(2) 表面裂纹的存在会导致正交各向异性圆柱壳体自由振动各阶固有频率的减小。对于给定的 L/R 值,表面裂纹对 h/R 较小的壳体的固有频率的影响较大,对于具有特定裂纹和 h/R 值的壳体, L/R 值较大的壳体会有较大的频率变化。

(3) 裂纹的角度对壳体的固有频率有一定程度的影响,当 $\eta < 0.5$ 时,随着 η 的增大,各组固有频率逐渐减小;当 $\eta = 0.5$, 即 $\alpha_c = 90^\circ$ 时,固有频率减小到最小;当 $\eta > 0.5$ 时,固有频率逐渐增大,这一变化在较短和较薄的壳体中更为明显。

(4) 通过对裂纹长度和角度的分析,得到了不同阶固有频率及其变化规律,并利用不同阶固有频率下降比等值线图实现了对裂纹形态的识别,可为正交各向异性圆柱壳裂纹扩展规律及其裂纹识别方法的研究提供新的思路。

参考文献

- [1] 柳博瀚,陈正寿,鲍健,等. 管道内流对海洋弹性管振动影响的数值仿真研究[J]. 振动与冲击, 2020,39(17):177-185.
- [2] MOAZZEZ K, SAEIDI G H, SHARIFI S M H. Natural frequency analysis of a cylindrical shell containing avarably oriented surface crack utilizing Line-Spring model [J]. Thin-Walled Structures, 2018,125:63-75.
- [3] 朱吟龙,谭大鹏,李霖,等. 含裂纹损伤充液圆柱壳的自由振动响应求解方法[J]. 固体力学报, 2019,40(1):51-73.
- [4] ALI A, OLGA B, STEPHANE P A. Circumferential crack modeling of thin cylindrical shells in modal deformation [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021,90:104360.
- [5] 杨永宝,危银涛. 弹性基础上正交各向异性圆柱壳的自由振动[J]. 工程力学, 2018,35(4):24-32.
- [6] ZHAO J, CHOE K, ZHANG Y, et al. A closed form solution for free vibration of orthotropic circular cylindrical shells with general boundary conditions [J]. Composites Part B, 2018,156:447-460.
- [7] LIU B, XING Y F, QATU M S, et al. Exact characteristic equations for free vibrations of thin orthotropic circular shells [J]. Composite Structures, 2012,94(2):484-493.
- [8] 张爱国,李文达,杜敬涛,等. 不同边界条件正交各向异性圆柱壳结构固有振动分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2014,35(4):420-425.
- [9] 汪志强,黄利华,李学斌. 齐次边界条件下圆柱壳的自由振动研究[J]. 舰船科学技术, 2017,39(7):24-29.
- [10] PANG F, HUO R, LI H, et al. Wave-based method for free vibration analysis of orthotropic cylindrical shells with arbitrary boundary conditions [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019,20:1-15.
- [11] JOSHI P V, JAIN N K, RAMTEKKAR G D. Analytical modelling for vibration analysis of partially cracked orthotropic rectangular plates [J]. European Journal of Mechanics, 2015,50:100-111.
- [12] LAI S K, ZHANG L H. Thermal effect on vibration and buckling analysis of thin isotropic/orthotropic rectangular plates with crack defects [J]. Engineering Structures, 2018,177:444-458.
- [13] GOOGARCHIN H, MOAZZEZ K. Analytical solution for free vibration of cracked orthotropic cylindrical shells [J]. International Journal of Mechanical sciences, 2019,153-154:254-270.
- [14] 李学斌. 正交各向异性圆柱壳的稳态动力响应分析[J]. 船舶力学, 2007(1):79-87.
- [15] LAM K, LOY C. Analysis of rotating laminated cylindrical shells by different thin shell theories [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995,186(1):23-35.
- [16] RICE J R, LEVY N. The part-through surface crack in an elastic plate [J]. Journal of Applied Mechanics, 1971,38(2):321-329.

- 1972,39(1):185-194.
- [17] JALILI S, DANESHMEHR A. Application of chaotic attractor analysis in crack assessment of plates[J]. Results in Physics, 2018,8:836-847.
- [18] 陈忱,李天匀,朱翔,等. 基于波传播法的水下圆柱壳临界载荷-频率特性分析[J]. 中国造船, 2012,53(1):130-136.
- [19] WARBURTON G B, SONI S R. resonant response of orthotropic cylindrical shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1977,53(1):1-23.
- [20] 李学斌. 正交各向异性圆柱壳静态特性分析及比较研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2004.

Solution of crack morphology and free vibration characteristics of orthotropic cylindrical shell

XIE Zongwei, TAN Dapeng, WANG Tong, LI Lin, YIN Zichao, WU Jiafeng

(College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014)

Abstract

The solution of free vibration response and crack morphology of orthotropic cylindrical shell with crack is a complex structural dynamics problem. Aiming at this problem, based on line-spring model and wave propagation approach, a crack morphology solution method of orthotropic cylindrical shell with oblique crack is proposed. Based on Kirchhoff-Love shell theory, the mechanical model of orthotropic cylindrical shell with oblique crack is established, and the free vibration response characteristics of orthotropic cylindrical shell under classical boundary conditions are obtained. The local flexibility of the crack region is calculated by using the line-spring model, and the additional stress relations of different crack morphology are constructed. Combined with the wave propagation approach, the free vibration response characteristics of orthotropic cylindrical shells with oblique cracks are obtained, and then a crack morphology solution method based on natural frequency is obtained. The results show that the existence of crack will lead to the decrease of local flexibility and natural frequency of cylindrical shell, and the larger the size and depth of crack, the greater the decrease of natural frequency; with the increase of crack angle, the decrease degree of natural frequency first increases and then decreases; through the natural frequency variation law of different crack structures, different crack forms can be detected and identified, and the geometric spatial distribution of cracks can be obtained. The results can provide a useful reference for the study of crack morphology and vibration response of orthotropic thin shells, and also provide theoretical support for crack damage identification of cylindrical shells.

Key words: orthotropic cylindrical shell, crack morphology, free vibration, line spring model, wave propagation approach