高技术通讯 2022 年 第32 卷 第3 期:294-302

doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2022.03.008

基于两相幂次趋近律的四旋翼飞行器自适应控制①

何紫云②　陶玫玲　陈　强③　魏　春

(浙江工业大学信息工程学院　杭州 310023)

摘　要　本文研究存在惯性不确定性和外部干扰的四旋翼飞行器系统有限时间位置和姿态跟踪控制问题。首先,设计一种新型两相幂次趋近律,当系统状态远离滑模面时,利用较大的幂次项提高趋近速率;当系统状态接近滑模面时,切换成较小的幂次项削弱抖振。其次,设计有限时间滑模控制器保证位置和姿态输出能够在有限时间内跟踪参考轨迹。同时,构造自适应参数更新律用以估计系统不确定性的上界,进而提高系统鲁棒性。最后,通过数值仿真验证本文所提控制方法的有效性。

关键词　自适应控制;有限时间控制;幂次趋近律;四旋翼飞行器

0　引　言

四旋翼飞行器具有体积小、价格低、灵敏度高、适应力强等优点,引起了人们广泛关注[1-2]。针对四旋翼飞行器非线性、强耦合、欠驱动的特点,许多控制方法如反演控制、自适应控制、有限时间控制、滑模控制等被用于四旋翼飞行器控制策略设计[3-9]。其中,滑模控制作为一种非线性控制方法,因其在动态过程中可以根据系统状态变化,使系统按照设计的“滑动模态”运动,具有快速响应、物理实现简单等优点[10]。采用滑模控制的系统运动过程可以分为趋近阶段、滑动模态阶段和稳态阶段。然而,当系统处于滑动模态阶段时,系统状态难以严格沿着滑模面滑动,从而产生抖振问题。因此,设计基于趋近律的滑模控制策略可以削弱抖振,同时改善滑模到达过程的动态品质。

文献[11]提出一种收敛速率恒定的等速趋近律的滑模负荷频率控制策略,系统状态在有限时间内到达滑模面,系统频率偏差趋近于零。文献[12]针对机械臂模型,提出了一种改进的趋近律,引入饱和函数代替原符号函数,在一定程度上削弱抖振。指数趋近律在等速趋近律的基础上增加了快速项,具有更快的收敛速度,但通过饱和函数替代符号函数不能从根本上解决抖振问题。幂次趋近律相比指数趋近律,滑模变量到达滑模面时趋近速度为零,能够有效削弱抖振,但在远离滑模面时收敛速度较慢[13]。文献[14]结合指数趋近律与幂次趋近律的优势,提出一种快速幂次趋近律。文献[15]针对传统趋近律收敛速度慢和抖振严重问题,提出一种新型双幂次趋近律的滑模控制方法,通过数值仿真验证该方法具有更快的收敛速度。

然而,上述文献中趋近律的控制增益是固定的,不能实时根据滑模变量调节控制增益,控制器的动态品质有待提升。文献[16]基于特殊幂次函数与反双曲正弦函数构造一种新型趋近律,显著削弱高频抖振现象。文献[17]提出一种新型两相形式的吸引律,使状态呈现出两阶段收敛的过程。然而,该方法要求系统参数完全已知,且未考虑系统不确定性与外部扰动的影响,在实际应用中受到一定限制。

本文针对带有模型不确定性与外部扰动的四旋翼飞行器系统,首先,提出两相幂次趋近律,根据系统状态将趋近过程分为两个阶段,提高趋近速率并

①　国家自然科学基金(61973274)资助项目。
②　女,1996 年生,硕士生;研究方向:控制与优化;E-mail: 15958042105@163.com。
③　通信作者,E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn。
(收稿日期:2020-12-30)

削弱抖振,使系统有较好的瞬态性能,且在有限时间内跟踪参考轨迹。其次,文中采用自适应方法估计外部不确定性平方的上界,避免因符号函数存在引起的抖振问题,以保证良好的控制品质。最后,通过 Lyapunov 方法和数值仿真验证本文控制方案的有效性。

1 四旋翼飞行器模型建立

1.1 坐标系定义

通常四旋翼飞行器的坐标系可分为机体坐标系与惯性坐标系,均为右手坐标系。机体坐标系由坐标轴 x_B、y_B、z_B 确定,以正方向作为四旋翼飞行器的前进方向。惯性坐标系由坐标轴 x_W、y_W、z_W 确定。如图 1 所示,四旋翼飞行器的 4 个旋翼呈“十”字形状对称分布,且均处于同一平面。四旋翼飞行器的运动包括了 6 个自由度,即垂直、侧向、前后方向的位置运动以及翻滚、俯仰和偏航的姿态运动。

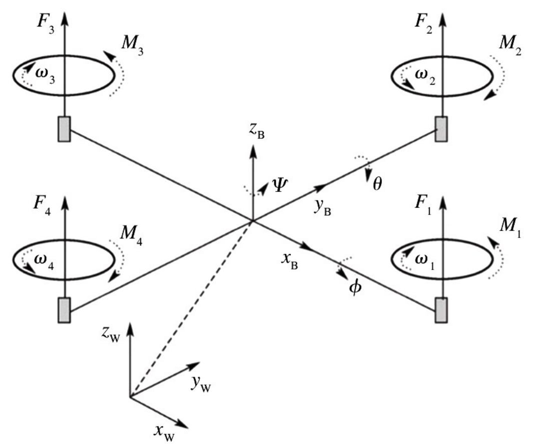

图 1　四旋翼飞行器模型

在考虑陀螺效应等条件时,对其完整动力学分析仍然较为复杂。为简化分析,忽略陀螺效应等对机体的影响,并作如下假设:

假设 1　四旋翼飞行器具有对称的刚性结构。

假设 2　忽略了地面效应、四旋翼飞行器的弹性变形和所受的冲击力。

假设 3　电机的旋转轴均平行于 Z 轴方向。

1.2 动力学模型

考虑系统不确定性影响,四旋翼飞行器的平动运动和旋转运动可以根据牛顿-欧拉公式进行动力学建模[18-19]:

$$\begin{cases}\ddot{x} = u_x + d_1 + \Delta f_x \\ \ddot{y} = u_y + d_2 + \Delta f_y \\ \ddot{z} = u_z + d_3 + \Delta f_z \\ \ddot{\phi} = a_\phi \dot{\theta}\dot{\psi} + b_\phi u_\phi + d_4 + \Delta f_\phi \\ \ddot{\theta} = a_\theta \dot{\phi}\dot{\psi} + b_\theta u_\theta + d_5 + \Delta f_\theta \\ \ddot{\psi} = a_\psi \dot{\phi}\dot{\theta} + b_\psi u_\psi + d_6 + \Delta f_\psi \end{cases} \tag{1}$$

其中,x、y、z 表示四旋翼飞行器在惯性坐标系下的位置,ϕ、θ、ψ 分别为俯仰角、翻滚角和偏转角;$\ddot{x}$、$\ddot{y}$、$\ddot{z}$ 分别为惯性坐标系下沿 x、y、z 轴方向的加速度;$\ddot{\phi}$、$\ddot{\theta}$、$\ddot{\psi}$ 分别为俯仰角、翻滚角和偏转角的加速度;$a_\phi = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}$、$a_\theta = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}$、$a_\psi = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$、$b_\phi = \frac{1}{I_{xx}}$、$b_\theta = \frac{1}{I_{yy}}$、$b_\psi = \frac{1}{I_{zz}}$,$I_{xx}$、$I_{yy}$、$I_{zz}$ 分别为在机体坐标系下各轴的转动惯量,且均为标称值;Δf_x、Δf_y、Δf_z、Δf_ϕ、Δf_θ、Δf_ψ 分别表示各控制通道的模型不确定项;d_1、d_2、d_3、d_4、d_5、d_6 分别表示各控制通道的外部扰动;u_x、u_y、u_z 分别为 3 个位置通道的控制输入,表示为

$$\begin{cases}u_x = (\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) \cdot \frac{u_1}{m} \\ u_y = (\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi) \cdot \frac{u_1}{m} \\ u_z = (-g + \cos\varphi\cos\theta) \cdot \frac{u_1}{m} \end{cases} \tag{2}$$

其中,u_ϕ、u_θ、u_ψ 分别为 3 个姿态通道的控制力矩输入,m 表示质量,g 表示重力加速度,u_1 表示 4 个旋翼产生的总升力。

四旋翼飞行器期望位置轨迹 x_d、y_d、z_d 和期望姿态轨迹 ϕ_d、θ_d、ψ_d 以及总升力 u_1 满足以下耦合关系。

$$\begin{cases}u_1 = m\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + (u_z + g)^2} \\ \phi_d = \arcsin\left(\frac{m}{u_1}u_x\sin\psi_d - u_y\cos\psi_d\right) \\ \theta_d = \arcsin\left[\frac{1}{u_z + g}(u_x\cos\psi_d + u_y\sin\psi_d)\right] \end{cases} \tag{3}$$

令状态变量 $\boldsymbol{x}_1 = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$,$\boldsymbol{x}_2 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$,将模型式(1)简化为如式(4)所示的二阶多输入多输出非线性系统。

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_2 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{bu} + \boldsymbol{d}\end{cases} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{f} = [0,0,0,a_\phi\dot{\theta}\dot{\psi},a_\theta\dot{\phi}\dot{\psi},a_\psi\dot{\phi}\dot{\theta}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$，$\boldsymbol{b} = \mathrm{diag}([b_x,b_y,b_z,b_\phi,b_\theta,b_\psi])\ \mathbb{R}^{6\times6}$，控制输入 $\boldsymbol{u} = [u_x,u_y,u_z,u_\phi,u_\theta,u_\psi]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$，同时将模型不确定性和外部扰动看作外部不确定性 $\boldsymbol{d} = [d_x,d_y,d_z,d_\phi,d_\theta,d_\psi]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$，其中，$d_x = d_1 + \Delta f_x, d_y = d_2 + \Delta f_y, d_z = d_3 + \Delta f_z, d_\phi = d_4 + \Delta f_\phi, d_\theta = d_5 + \Delta f_\theta, d_\psi = d_6 + \Delta f_\psi$，并对外部不确定性 $\boldsymbol{d}$ 作如下假设：

假设4　四旋翼飞行器系统式(4)中的外部不确定性 d 是有界的且满足：

$$\|\boldsymbol{d}\| \leqslant \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2\|\boldsymbol{x}_1\| + \boldsymbol{\gamma}_3\|\boldsymbol{x}_2\| \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}_1 = [\gamma_{1x},\gamma_{1y},\gamma_{1z},\gamma_{1\phi},\gamma_{1\theta},\gamma_{1\psi}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$ 为未知正定向量；$\boldsymbol{\gamma}_2 = [\gamma_{2x},\gamma_{2y},\gamma_{2z},\gamma_{2\phi},\gamma_{2\theta},\gamma_{2\psi}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_3 = [\gamma_{3y},\gamma_{3z},\gamma_{3\phi},\gamma_{3\theta},\gamma_{3\psi}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$ 均为未知正定矩阵。

本文的控制目标是针对四旋翼飞行器位置和姿态控制系统式(4)，考虑未知外部不确定性和干扰，设计自适应滑模控制器 $\boldsymbol{u}$，使位置信号 x、y、z 和姿态角 ϕ、θ、ψ 能在有限时间内跟踪上参考轨迹。

为实现控制目标，定义跟踪误差向量 $\boldsymbol{e} = [e_x,e_y,e_z,e_\phi,e_\theta,e_\psi]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$ 如下：

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_D \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{x}_D = [x_d,y_d,z_d,\phi_d,\theta_d,\psi_d]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{6\times1}$ 为惯性坐标系下期望向量。

2　自适应控制器设计

2.1　两相幂次趋近律设计

以位置 x 通道为例，进行自适应控制器设计。根据式(6)，得到 x 通道跟踪误差 e_x：

$$e_x = x - x_d \tag{7}$$

对式(7)分别求一阶和二阶导数：

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{x}_d \tag{8}$$

$$\ddot{e}_x = \ddot{x} - \ddot{x}_d \tag{9}$$

设计位置 x 通道的滑模面 s_x 如下：

$$s_x = \dot{e}_x + \lambda_x e_x \tag{10}$$

其中，$\lambda_x > 0$ 为滑模面式(10)的参数。

对式(10)求导：

$$\dot{s}_x = \ddot{e}_x + \lambda_x\dot{e}_x \tag{11}$$

考虑四旋翼飞行器非线性系统式(4)，将式(8)和式(9)代入式(11)得：

$$\dot{s}_x = f_x + b_x u_x + d_x - \ddot{x}_d + \lambda_x\dot{e}_x \tag{12}$$

本文设计一种新型的两相幂次趋近律 $\dot{s}_x$ 如下：

$$\dot{s}_x = -h_x = -k_{1x}|s_x|^{\alpha}\mathrm{sgn}(s_x) - k_{2x}s_x \tag{13}$$

其中，参数 $k_{1x} > 0, k_{2x} > 0$，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ 为符号函数，且

$$\alpha = \begin{cases} p_1/q_1 & |s_x| \geqslant 1 \\ q_2/p_2 & |s_x| < 1 \end{cases} \tag{14}$$

其中，$p_1 > q_1, p_2 > q_2$，且 p_1、p_2、q_1 和 q_2 均为正奇数。

如图2(a)所示，当滑模变量初值 $|s_x(0)| \geqslant 1$ 时，式(13)可改写为

$$s_x^{-p_1/q_1}\mathrm{d}s_x/\mathrm{d}t = -k_{2x}s_x^{1-p_1/q_1} - k_{1x} \tag{15}$$

选择 $|s_x(t_1)| = 1$ 为分界，由式(15)可得，滑模变量 $s_x(0) \to s_x(t_1)$ 所需时间 t_1 为

$$t_1 = \frac{1}{k_{2x}(p_1/q_1 - 1)}\ln\frac{1 + k_{2x}/k_{1x}}{1 + k_{2x}s_x^{1-p_1/q_1}(0)/k_{1x}} \tag{16}$$

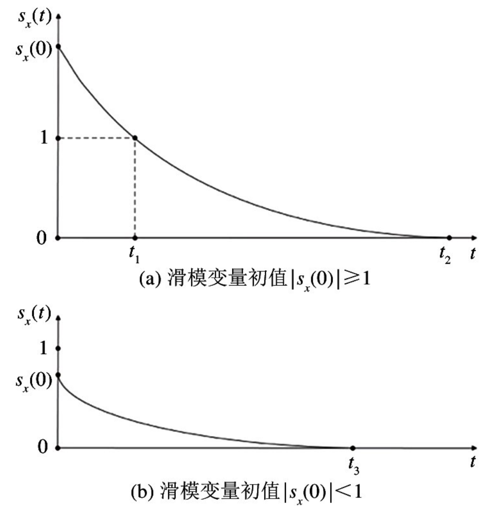

图2　不同初值条件下滑模变量

滑模变量 $s_x(t_1) = 1 \to s_x(t_2) = 0$，所需时间由式(17)可得。

$$s_x^{-q_2/p_2}\mathrm{d}s_x/\mathrm{d}t = -k_{2x}s_x^{1-q_2/p_2} - k_{1x} \tag{17}$$

即：

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{k_{2x}(1 - q_2/p_2)}\ln(1 + k_{2x}/k_{1x}) \tag{18}$$

当初值 $|s_x(0)| \geqslant 1$ 时,由式(16)和式(18)可得滑模变量 $s_x(t) \to 0$ 的到达时间 t_2 为

$$t_2 = \frac{1}{k_{2x}(p_1/q_1 - 1)} \ln\left(\frac{1 + k_{2x}/k_{1x}}{1 + \dfrac{k_{2x}s_x^{1-p_1/q_1}(0)}{k_{1x}}}\right) + \frac{1}{k_{2x}(1 - q_2/p_2)} \ln(1 + k_{2x}/k_{1x}) \leqslant \frac{1}{k_{2x}} \ln(1 + k_{2x}/k_{1x}) \left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right) \tag{19}$$

同理,当滑模变量初值 $|s_x(0)| < 1$ 时,由式(17)可得滑模变量 $s_x(t) \to 0$ 的到达时间 t_3 为

$$t_3 = \frac{1}{k_{2x}(1 - q_2/p_2)} \ln(1 + k_{2x}s_x^{1-q_2/p_2}(0)/k_{1x}) \leqslant \frac{1}{k_{2x}(1 - q_2/p_2)} \ln(1 + k_{2x}/k_{1x}) \tag{20}$$

由式(19)和式(20)可知,到达时间的上界 $t_{\max}$ 只与两相幂次趋近律参数相关,满足:

$$t_{\max} = \frac{1}{k_{2x}} \ln(1 + k_{2x}/k_{1x}) \left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right) \tag{21}$$

2.2 有限时间控制器设计

针对四旋翼飞行器系统式(4),将控制器设计分成6个控制通道,即位置 x 通道、位置 y 通道、位置 z 控制通道、翻滚角 ϕ 通道、俯仰角 θ 通道和偏航角 ψ 通道。本文以位置 x 通道为例,设计有限时间控制器。

根据假设4,位置 x 通道的外部不确定性 d_x 满足:

$$|d_x| \leqslant \gamma_{1x} + \gamma_{2x}|x| + \gamma_{3x}|\dot{x}| \leqslant \gamma_{1x} + \gamma_{4x}\chi \tag{22}$$

其中,$\chi = |x| + |\dot{x}|$,参数 γ_{1x}、γ_{2x}、γ_{3x}、γ_{4x} 均为未知正常数。

由式(22)可得:

$$|d_x|^2 \leqslant \gamma_{1x}^2 + 2\gamma_{1x}\gamma_{4x}\chi + \gamma_{4x}\chi^2 = c_{1x} + c_{2x}\chi + c_{3x}\chi^2 \tag{23}$$

其中,参数 $c_{1x} = \gamma_{1x}^2, c_{2x} = 2\gamma_{1x}\gamma_{4x}, c_{3x} = \gamma_{4x}$。

设计 x 位置通道控制器 u_x 为

$$u_x = \frac{1}{b_x}(-h_x - f_x + \ddot{x}_d - \lambda_x \dot{e}_x + u_{px}) \tag{24}$$

其中,$u_{px} = -\dfrac{s_x}{2\varepsilon^2}\hat{\rho}_x$,$\hat{\rho}_x = \hat{c}_{1x} + \hat{c}_{2x}\chi + \hat{c}_{3x}\chi^2$ 为对 $|d_x|^2$ 的估计,$\varepsilon > 0$。

自适应更新律设计如下:

$$\dot{\hat{c}}_{1x} = r_1\left(\frac{|s_x|^2}{2\varepsilon^2} - \varepsilon_1\hat{c}_{1x}\right) \tag{25}$$

$$\dot{\hat{c}}_{2x} = r_2\left(\frac{|s_x|^2\chi}{2\varepsilon^2} - \varepsilon_2\hat{c}_{2x}\right) \tag{26}$$

$$\dot{\hat{c}}_{3x} = r_3\left(\frac{|s_x|^2\chi^2}{2\varepsilon^2} - \varepsilon_3\hat{c}_{3x}\right) \tag{27}$$

其中,$\hat{c}_{ix}$ 是对 c_{ix} 的估计,$\varepsilon_i > 0$ 和 $r_i > 0$ 为设计参数,$i = 1,2,3$。

基于类似推导过程,可得其他通道的控制器设计,位置 y 通道、位置 z 控制通道、翻滚角 ϕ 通道、俯仰角 θ 通道和偏航角 ψ 通道的控制器分别为

$$u_y = \frac{1}{b_y}(-h_y - f_y + \ddot{y}_d - \lambda_y \dot{e}_y + u_{py}) \tag{28}$$

$$u_z = \frac{1}{b_z}(-h_z - f_z + \ddot{z}_d - \lambda_z \dot{e}_z + u_{pz}) \tag{29}$$

$$u_\phi = \frac{1}{b_\phi}(-h_\phi - f_\phi + \ddot{\phi}_d - \lambda_\phi \dot{e}_\phi + u_{p\phi}) \tag{30}$$

$$u_\theta = \frac{1}{b_\theta}(-h_\theta - f_\theta + \ddot{\theta}_d - \lambda_\theta \dot{e}_\theta + u_{p\theta}) \tag{31}$$

$$u_\psi = \frac{1}{b_\psi}(-h_\psi - f_\psi + \ddot{\psi}_d - \lambda_\psi \dot{e}_\psi + u_{p\psi}) \tag{32}$$

注1 滑模变量的收敛时间上界 $t_{\max}$ 只与两相幂次趋近律参数 k_{1x}、k_{2x}、p_1、p_2、q_1、q_2 相关。k_{1x}、k_{2x}、p_1/q_1 越大,q_2/p_2 越小,控制器增益越大,滑模变量的收敛速度越快;反之,k_{1x}、k_{2x}、p_1/q_1 越小,q_2/p_2 越大,控制器增益越小,滑模变量的收敛速度越慢。因此,参数选取需要同时考虑收敛速度与控制器增益大小。

3 稳定性分析

定义1[20] 考虑非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$,$\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x})$,其中,$\boldsymbol{x}$ 为状态向量,且 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}(0)$,若存在 $\varepsilon > 0$ 和一个非负常数 $T(\varepsilon, \boldsymbol{x}_0)$,使得对于所有 $t > t_0 + T$ 时,都有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon$ 成立,系统最终一致有界。

定理1 考虑四旋翼飞行器系统式(4)、自适应

有限时间滑模控制器式(24)、自适应更新律式(25)~(27),保证:

(1)位置 x 通道的滑模变量 s_x 和参数估计误差 $\tilde{c}_{1x}$、$\tilde{c}_{2x}$、$\tilde{c}_{3x}$ 均最终一致有界;

(2)滑模变量 s_x 有限时间收敛至平衡点附近的邻域内,收敛时间的上界 $T_{\max}$ 满足式(33)。

$$T_{\max} = \frac{1}{k_{1x}}\left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right) \tag{33}$$

证明　以位置 x 通道为例。

步骤1　选择 Lyapunov 候选函数为

$$V_1 = \frac{1}{2}s_x^2 + \frac{1}{2r_1}\tilde{c}_{1x}^2 + \frac{1}{2r_2}\tilde{c}_{2x}^2 + \frac{1}{2r_3}\tilde{c}_{3x}^2 \tag{34}$$

其中, $\tilde{c}_{1x} = c_{1x} - \hat{c}_{1x}$, $\tilde{c}_{2x} = c_{2x} - \hat{c}_{2x}$, $\tilde{c}_{3x} = c_{3x} - \hat{c}_{3x}$。

对式(34)求导,得到:

$$\dot{V}_1 = s_x\dot{s}_x + \frac{1}{r_1}\tilde{c}_{1x}\dot{\tilde{c}}_{1x} + \frac{1}{r_2}\tilde{c}_{2x}\dot{\tilde{c}}_{2x} + \frac{1}{r_3}\tilde{c}_{3x}\dot{\tilde{c}}_{3x} \tag{35}$$

将式(12)代入式(35),可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= s_x(f_x + b_xu_x + d_x - \ddot{x}_d + \lambda_x\dot{x} - \lambda_x\dot{x}_d) \\ &\quad + \frac{1}{r_1}\tilde{c}_{1x}\dot{\tilde{c}}_{1x} + \frac{1}{r_2}\tilde{c}_{2x}\dot{\tilde{c}}_{2x} + \frac{1}{r_3}\tilde{c}_{3x}\dot{\tilde{c}}_{3x} \\ &= s_x(f_x + b_xu_x + d_x - \ddot{x}_d + \lambda_x\dot{x} - \lambda_x\dot{x}_d) \\ &\quad - \frac{1}{r_1}\tilde{c}_{1x}\dot{\hat{c}}_{1x} - \frac{1}{r_2}\tilde{c}_{2x}\dot{\hat{c}}_{2x} - \frac{1}{r_3}\tilde{c}_{3x}\dot{\hat{c}}_{3x}\end{aligned} \tag{36}$$

将控制器式(24)代入式(36),可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= s_xd_x + s_x\left(-h_x - \frac{s_x}{2\varepsilon^2}\hat{\rho}_x\right) - \frac{1}{r_1}\tilde{c}_{1x}\dot{\hat{c}}_{1x} \\ &\quad - \frac{1}{r_2}\tilde{c}_{2x}\dot{\hat{c}}_{2x} - \frac{1}{r_3}\tilde{c}_{3x}\dot{\hat{c}}_{3x} \\ &\leqslant \frac{|s_x|^2|d_x|^2}{2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} + s_x\left(-h_x - \frac{s_x}{2\varepsilon^2}\hat{\rho}_x\right) \\ &\quad - \frac{1}{r_1}\tilde{c}_{1x}\dot{\hat{c}}_{1x} - \frac{1}{r_2}\tilde{c}_{2x}\dot{\hat{c}}_{2x} - \frac{1}{r_3}\tilde{c}_{3x}\dot{\hat{c}}_{3x} \\ &= \frac{|s_x|^2}{2\varepsilon^2}(\tilde{c}_{1x} + \tilde{c}_{2x}\chi + \tilde{c}_{3x}\chi^2) + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\quad - s_xh_x - \frac{1}{r_1}\tilde{c}_{1x}\dot{\hat{c}}_{1x} - \frac{1}{r_2}\tilde{c}_{2x}\dot{\hat{c}}_{2x} - \frac{1}{r_3}\tilde{c}_{3x}\dot{\hat{c}}_{3x}\end{aligned} \tag{37}$$

将式(25)~(27)代入式(37),可得:

$$\dot{V}_1 \leqslant -s_xh_x + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon_1\tilde{c}_{1x}\hat{c}_{1x} + \varepsilon_2\tilde{c}_{2x}\hat{c}_{2x} + \varepsilon_3\tilde{c}_{3x}\hat{c}_{3x} \tag{38}$$

存在以下不等式:

$$\varepsilon_1\tilde{c}_{1x}\hat{c}_{1x} \leqslant -\frac{\varepsilon_1}{2}\tilde{c}_{1x}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}c_{1x}^2 \tag{39}$$

$$\varepsilon_2\tilde{c}_{2x}\hat{c}_{2x} \leqslant -\frac{\varepsilon_2}{2}\tilde{c}_{2x}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2}c_{2x}^2 \tag{40}$$

$$\varepsilon_3\tilde{c}_{3x}\hat{c}_{3x} \leqslant -\frac{\varepsilon_3}{2}\tilde{c}_{3x}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2}c_{3x}^2 \tag{41}$$

将式(13)和式(14)代入式(38),可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leqslant -k_{1x}|s_x|^{\alpha+1} - k_{2x}s_x^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon_1\tilde{c}_{1x}\hat{c}_{1x} \\ &\quad + \varepsilon_2\tilde{c}_{2x}\hat{c}_{2x} + \varepsilon_3\tilde{c}_{3x}\hat{c}_{3x} \\ &\leqslant -\mu\left(\frac{1}{2}s_x^2 + \frac{1}{2r_1}\tilde{c}_{1x}^2 + \frac{1}{2r_2}\tilde{c}_{2x}^2 + \frac{1}{2r_3}\tilde{c}_{3x}^2\right) \\ &\quad - k_{1x}|s_x|^{\alpha+1} + \delta \\ &\leqslant -\mu V_1 + \delta\end{aligned} \tag{42}$$

其中, $\mu \leqslant \min\{2k_{2x}, \varepsilon_1r_1, \varepsilon_2r_2, \varepsilon_3r_3\}$, $\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \varepsilon_1c_{1x}^2 + \varepsilon_2c_{2x}^2 + \varepsilon_3c_{3x}^2) \geqslant 0$。

根据式(42),可得:

$$V_1(t) \leqslant \frac{\delta}{\mu} + \left(V_1(0) - \frac{\delta}{\mu}\right)e^{-\mu t} \tag{43}$$

由式(43)和定义1可知,闭环系统滑模面 s_x 和参数估计误差 $\tilde{c}_{1x}$、$\tilde{c}_{2x}$、$\tilde{c}_{3x}$ 是最终一致有界的,则 x、$\dot{x}$ 有界, χ 也是有界的。因此存在 Δ_1, 满足 $\Delta_1 = \sup\left\{\frac{|s_x|^2}{\varepsilon^2}(\tilde{c}_{1x} + \tilde{c}_{2x}\chi + \tilde{c}_{3x}\chi^2) + \varepsilon^2\right\}$。

步骤2　选择 Lyapunov 候选函数如下:

$$V_2 = s_x^2 \tag{44}$$

对式(44)求导,得到:

$$\dot{V}_2 = 2s_x\dot{s}_x \tag{45}$$

将式(12)及式(24)代入式(45),可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= 2d_x + 2s_x\left(\dot{s}_x - \frac{s_x}{2\varepsilon^2}\hat{\rho}_x\right) \\ &\leqslant \frac{|s_x|^2|d_x|^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 + 2s_x\left(\dot{s}_x - \frac{s_x}{2\varepsilon^2}\hat{\rho}_x\right)\end{aligned} \tag{46}$$

将式(23)以及式(25)~(27)代入式(46),可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leqslant \frac{|s_x|^2}{\varepsilon^2}(c_{1x} + c_{2x}\chi + c_{3x}\chi^2) + \varepsilon^2 - 2s_xh_x \\ &\quad - \frac{s_x^2}{\varepsilon^2}(\hat{c}_{1x} + \hat{c}_{2x}\chi + \hat{c}_{3x}\chi^2)\end{aligned}$$

$$\leqslant -2s_x h_x + \Delta_1 \tag{47}$$

将式(13)代入式(47),可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leqslant -2k_{1x}|s_x|^{\alpha+1} - 2k_{2x}s_x^2 + \Delta_1 \\ &\leqslant -2k_{1x}V_2^{\frac{\alpha+1}{2}} - 2k_{2x}V_2 + \Delta_1\end{aligned} \tag{48}$$

存在一个常数 $0 < \beta_1 < 1$,将式(48)改写为

$$\dot{V}_2 \leqslant -2k_{2x}\beta_1 V_2 - 2k_{1x}V_2^{\frac{\alpha+1}{2}} + \Delta_1 - 2k_{2x}(1-\beta_1)V_2 \tag{49}$$

当 $\Delta_1 \leqslant 2k_{2x}(1-\beta_1)V_2$ 时,存在:

$$V_2^{-\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} \leqslant -2k_{2x}V_2^{1-\frac{\alpha+1}{2}} - 2k_{1x} \tag{50}$$

解式(50)得收敛时间 T_1 满足:

$$T_1 \leqslant \frac{1}{k_{2x}\beta_1}\ln\left(1 + \frac{k_{2x}\beta_1}{k_{1x}}\right)\left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right) \tag{51}$$

V_2 收敛至域 $\left\{V_2 \mid V_2 \leqslant \dfrac{\Delta_1}{2k_{2x}(1-\beta_1)}\right\}$。

同理,存在一个常数 $0 < \beta_2 < 1$,将式(48)改写为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \leqslant &-2k_{2x}V_2 - 2k_{1x}\beta_2 V_2^{(\alpha+1)/2} + \Delta_1 \\ &-2k_{1x}(1-\beta_2)V_2^{(\alpha+1)/2}\end{aligned} \tag{52}$$

当 $\Delta_1 \leqslant 2k_{1x}(1-\beta_2)V_2^{(\alpha+1)/2}$ 时,收敛时间 T_2 满足:

$$T_2 \leqslant \frac{1}{k_{2x}}\ln\left(1 + \frac{k_{2x}}{k_{1x}\beta_2}\right)\left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right) \tag{53}$$

V_2 收敛至域 $\left\{V_2 \mid V_2 \leqslant \left(\dfrac{\Delta_1}{2k_{1x}(1-\beta_2)}\right)^{\frac{2}{q_2/p_2+1}}\right\}$。

综上可得,V_2 的收敛域为

$$\Delta_2 = \min\left\{\frac{\Delta_1}{2k_{2x}(1-\beta_1)}, \left(\frac{\Delta_1}{2k_{1x}(1-\beta_2)}\right)^{\frac{2}{q_2/p_2+1}}\right\} \tag{54}$$

证明成立。

注 2 由于 $\dfrac{2}{q_2/p_2 + 1} > 1$,则参数 k_{1x}、k_{2x} 取值越大,V_2 收敛域越小,但同时控制输入也越大,因此选取参数 k_{1x} 和 k_{2x} 时需同时考虑收敛域和控制输入的大小。

其他控制通道证明过程与位置 x 控制通道类似,即闭环系统中滑模变量 s 与所有参数估计误差信号均是最终一致有界的,且滑模变量 s 有限时间收敛至平衡点附近的邻域内。

4 仿真验证及分析

为验证本文所提出的两相幂次趋近律自适应控制方法的可行性,对以下两种控制方法(即 M1 和 M2)进行仿真对比。

M1 方法:本文提出的基于两相幂次趋近律的自适应滑模控制方法,采用两相幂次趋近律式(13)、控制器式(24)及式(28)~(32)。

M2 方法:基于双幂次趋近律的自适应滑模控制方法,采用如下双幂次趋近律[21]:

$$\dot{s}_x = -k_{3x}|s_x|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_x) - k_{4x}|s_x|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_x) \tag{55}$$

其中,$k_{3x} > 0$,$k_{4x} > 0$,$\kappa_1 = p_1/q_1 > 1$,$0 < \kappa_2 = q_2/p_2 < 1$。

M2 方法采用控制器如下:

$$\begin{aligned}u_x = \frac{1}{b_x}(&-f_x + \ddot{x}_d - \lambda_x\dot{e}_x + u_{px} \\ &-k_{3x}|s_x|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_x) - k_{4x}|s_x|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_x))\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}u_y = \frac{1}{b_y}(&-f_y + \ddot{y}_d - \lambda_y\dot{e}_y + u_{py} \\ &-k_{3y}|s_y|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_y) - k_{4y}|s_y|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_y))\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}u_z = \frac{1}{b_z}(&-f_z + \ddot{z}_d - \lambda_z\dot{e}_z + u_{pz} \\ &-k_{3z}|s_z|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_z) - k_{4z}|s_z|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_z))\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}u_\phi = \frac{1}{b_\phi}(&-f_\phi + \ddot{\phi}_d - \lambda_\phi\dot{e}_\phi + u_{p\phi} \\ &-k_{3\phi}|s_\phi|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_\phi) - k_{4\phi}|s_\phi|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_\phi))\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}u_\theta = \frac{1}{b_\theta}(&-f_\theta + \ddot{\theta}_d - \lambda_\theta\dot{e}_\theta + u_{p\theta} \\ &-k_{3\theta}|s_\theta|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_\theta) - k_{4\theta}|s_\theta|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_\theta))\end{aligned} \tag{60}$$

$$u_\psi = \frac{1}{b_\psi}(-f_\psi + \ddot{\psi}_d - \lambda_\psi\dot{e}_\psi + u_{p\psi}$$

$$-k_{3\psi}|s_{\psi}|^{\kappa_1}\mathrm{sgn}(s_{\psi})-k_{4\psi}|s_{\psi}|^{\kappa_2}\mathrm{sgn}(s_{\psi}))\tag{61}$$

M1 和 M2 采用相同的自适应更新律式(25)~(27)，仿真采用的模型相关参数设置为 $m=0.625\ \mathrm{kg}$，$g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$，$I_{xx}=2.4\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$I_{yy}=2.4\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$I_{zz}=2.6\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$。

仿真实例 1　采用 M1 方法，期望位置 $x_d=y_d=z_d=0.5\ \mathrm{m}$，期望偏航角 $\psi_d=0.5\ \mathrm{rad}$，模拟外界扰动作用为 $d_x=d_y=d_z=0.1\sin0.2\pi t\ N\cdot m$，$d_{\phi}=d_{\theta}=d_{\psi}=0.1\sin0.2\pi t\ \mathrm{N\cdot m}$。选取两相幂次相关参数为：$p_1/q_1=13/7$，$q_2/p_2=7/11$，$k_{1x}=k_{1y}=k_{1z}=2$，$k_{2x}=k_{2y}=k_{2z}=1$，$k_{1\phi}=k_{1\theta}=k_{1\psi}=4$，$k_{2\phi}=k_{2\theta}=k_{2\psi}=3$；滑模面相关参数为：$\lambda_x=\lambda_y=\lambda_z=\lambda_{\psi}=5$，$\lambda_{\phi}=\lambda_{\theta}=30$；控制器相关参数为：$\varepsilon=0.8$；自适应更新律相关参数为：$r_1=r_2=r_3=0.008$，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0.02$；初值 $c_{1x}(0)=c_{1y}(0)=c_{1z}(0)=c_{2x}(0)=c_{2y}(0)=c_{2z}(0)=c_{3x}(0)=c_{3y}(0)=c_{3z}(0)=0.15$，$c_{1\phi}(0)=c_{1\theta}(0)=c_{1\psi}(0)=c_{2\phi}(0)=c_{2\theta}(0)=c_{2\psi}(0)=c_{3\phi}(0)=c_{3\theta}(0)=c_{3\psi}(0)=0.06$。

图 3 和图 4 分别为位置环和姿态环期望轨迹跟踪图，从图中可以看出，各控制通道均较快跟踪上期望值，瞬态性能良好；稳态误差小，跟踪精度高。

图 5 和图 6 分别为位置环和姿态环滑模变量收敛图，从图中可以看出，位置环各控制通道及偏航角控制通道的滑模变量收敛速度较快，俯仰角和翻滚角因期望需先解耦得到，滑模变量收敛速度稍慢。

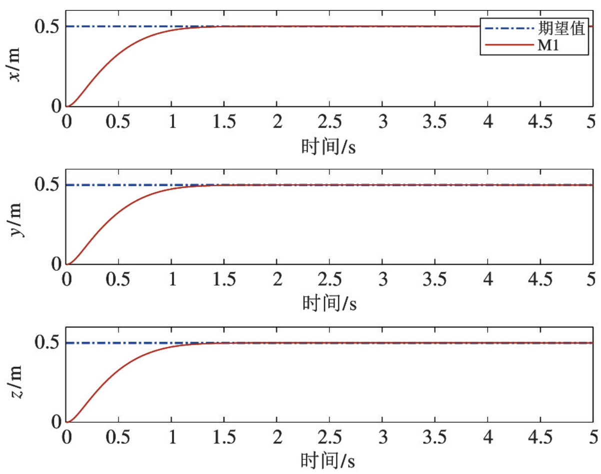

图 3　位置环期望跟踪

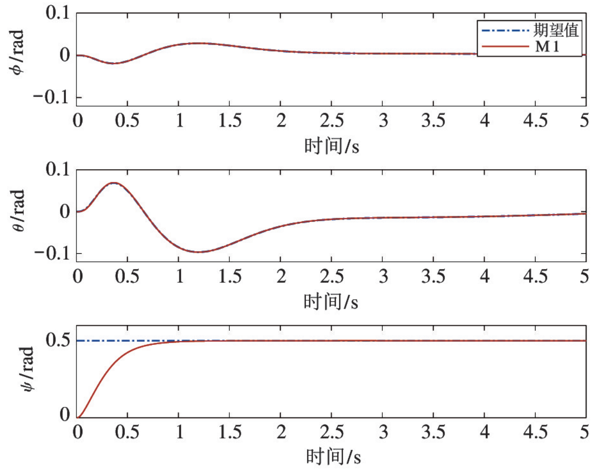

图 4　姿态环期望跟踪

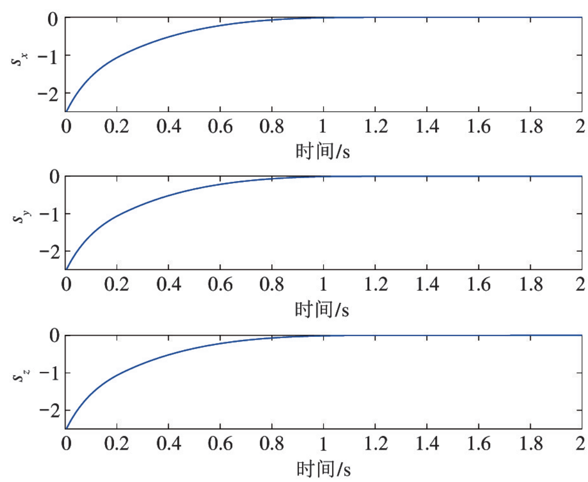

图 5　位置环滑模变量

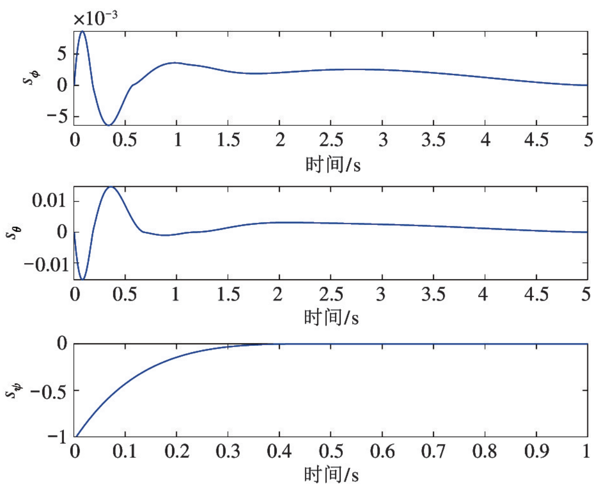

图 6　姿态环滑模变量

图 7 和图 8 分别为位置环和姿态环控制输入。

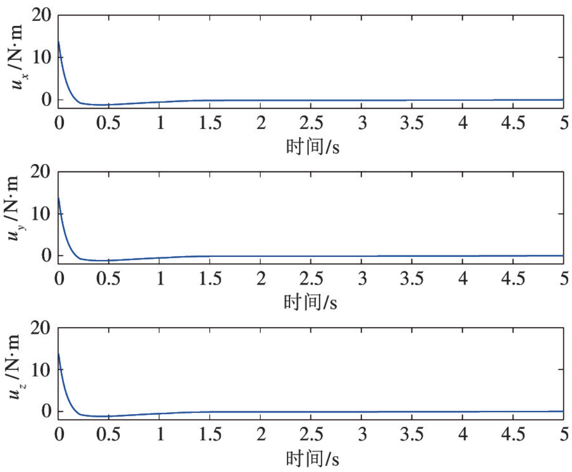

图 7　位置环控制输入

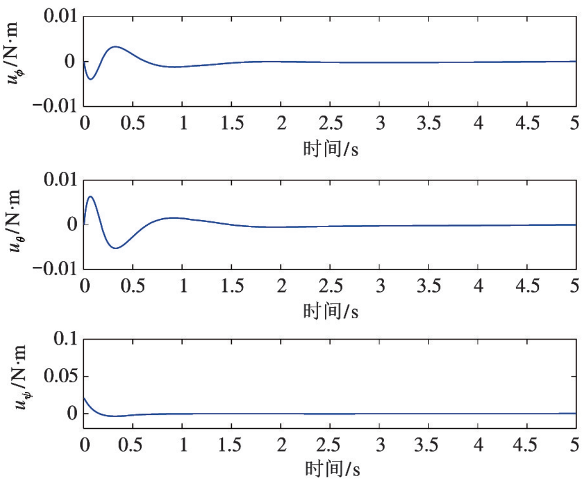

图 8　姿态环控制输入

仿真实例 2　为进一步说明两相幂次趋近律在两个趋近阶段均有更快的趋近速度，对 M1 和 M2 进行对比仿真，为得到有效对比，M1 和 M2 的控制器参数相同，滑模面参数为 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda_\phi = \lambda_\theta = \lambda_\psi = 2$。M2 中双幂次趋近律式(55)参数选取 $\kappa_1 = p_1/q_1 = 13/7, \kappa_2 = q_2/p_2 = 7/11, k_{3x} = k_{3y} = k_{3z} = 2, k_{4x} = k_{4y} = k_{4z} = 1, k_{3\phi} = k_{3\theta} = k_{3\psi} = 4, k_{4\phi} = k_{4\theta} = k_{4\psi} = 3$。

图 9 和图 10 分别为位置环和姿态环滑模变量收敛图。从图中可以看出,不论初值是否大于 1,采用 M1 方法的位置环和姿态环滑模变量趋近速率均大于 M2 方法,且更快到达滑模面,瞬态性能更好。

综上,相较 M2 方法,本文提出的 M1 方法具有更快的滑模变量趋近速率,使四旋翼飞行器系统对期望轨迹跟踪有更好的瞬态、稳态性能及鲁棒性。

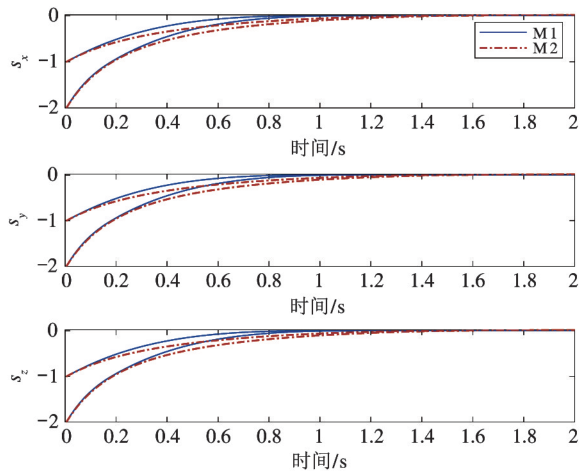

图 9　位置环滑模变量

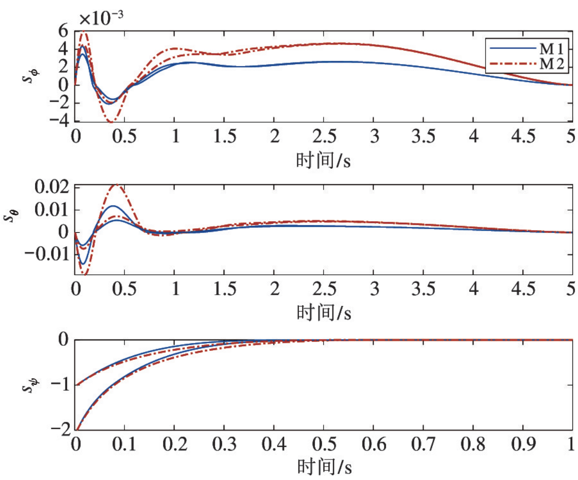

图 10　姿态环滑模变量

5　结　论

本文针对存在外部不确定性的四旋翼飞行器系统,提出了一种两相幂次趋近律,以 $|s_x(t_1)| = 1$ 为分界点,将趋近过程分为两个阶段,提高了系统状态远离滑模面时的趋近速率,并在到达滑模面附近时改变趋近速率、削弱抖振。同时,针对外部不确定性,采用自适应方法估计其平方的上界,从而避免了传统自适应方法引入符号函数而产生抖振问题,以保证良好的控制品质,实现了四旋翼飞行器对期望轨迹的快速准确跟踪。

参考文献

[1] XU B. Composite learning finite-time control with appli-

cation to quadrotors[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(10): 1806-1815

[2] KAYACAN E, MASLIM R. Type-2 fuzzy logic trajectory tracking control of quadrotor VTOL aircraft with elliptic membership functions[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, 22(1): 339-348

[3] 许璟, 蔡晨晓, 李勇奇, 等. 小型四旋翼无人机双闭环轨迹跟踪与控制(英文)[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1335-1342

[4] CHEN F, JIANG R, ZHANG K, et al. Robust backstepping sliding mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(8): 5044-5056

[5] 牛洪芳, 吴怀宇, 陈洋. 基于反步法的四旋翼飞行器滑动模态控制[J]. 高技术通讯, 2015, 25(12): 1083-1091

[6] LEI W C, LI C Y, CHEN M Z Q, Robust adaptive tracking control for quadrotors by combining PI and self-tuning regulator[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(6): 2663-2671

[7] 刘友才, 吴怀宇, 陈洋. 基于自适应模糊 PID 控制的四旋翼飞行器的自主跟踪[J]. 高技术通讯, 2017, 27(2): 168- 176

[8] 刘峤, 吴怀宇, 陈洋, 等. 基于反步法与参考模型的四旋翼飞行器自适应滑动模态控制[J]. 高技术通讯, 2018, 28(7): 633-642

[9] SILVA A, SANTOS D, Fast nonsingular terminal sliding mode flight control for multirotor aerial vehicles[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(6): 4288-4299

[10] XU L, MA H, GUO D, et al. Backstepping sliding-mode and cascade active disturbance rejection control for a quadrotor UAV[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2020, 25(6): 2743-2753

[11] 米阳, 潘达, 吴晓, 等. 基于等速趋近律的滑模负荷频率控制设计[J]. 控制工程, 2014, 21(3): 326-329

[12] 张俊辉, 刘斌, 蒋峥, 等. 基于改进趋近律的滑模控制在机械臂中的应用[J]. 高技术通讯, 2018, 28(6): 534-546

[13] 李鹏, 马建军, 郑志强. 采用幂次趋近律的滑模控制稳态误差界[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(5): 619-624

[14] YU S H, YU X H, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957-1964

[15] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. 控制与决策, 2013,28(2): 289-293

[16] 周涛. 基于一种新型趋近律的自适应滑模控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(7): 1335-1338

[17] SUN M X. Two-phase attractors for finite-duration consensus of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(5): 1757-1765

[18] 廖卫中, 宗群, 马亚丽. 小型四旋翼无人机建模与有限时间控制[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1343-1350

[19] CHEN F, ZHANG K, WANG Z. Trajectory tracking of a quadrotor with unknown parameters and its fault-tolerant control via sliding mode fault observer[J]. *Journal of Systems and Control Engineering*, 2015, 229(4): 279-292

[20] XIA Y, ZHU Z, FU M, et al. Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(2): 647-659

[21] 李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 498-502

Two-phase power reaching law based adaptive control of quadrotors

HE Ziyun, TAO Meiling, CHEN Qiang, WEI Chun

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

The tracking problems of position and attitude control for quadrotors are investigated in the presence of unknown inertia uncertainties and external disturbances. Firstly, a novel two-phase power reaching law is developed to guarantee a finite-time convergence of the sliding mode variable, and the upper bound of the convergence time is independent of the initial system states. When the system state is far from the sliding mode surface, a larger power term is used to increase the reaching rate, and a smaller power term is switched to weaken chattering when the system state is close to the sliding mode surface. Then, an adaptive finite-time controller is designed to guarantee that the position and attitude output can track the reference trajectories within a finite time. Meanwhile, adaptive update laws are constructed to estimate the upper bound of the system uncertainties, such that the system robustness can be improved. Finally, simulation results are given to show the effectiveness of the proposed control scheme.

Key words: adaptive control, finite-time control, power reaching law, quadrotor