

非完整移动机器人路径跟踪的快速非线性模型预测控制方法^①

占红武^② 厉 晟 胥 芳^③

(浙江工业大学特种装备制造与先进加工技术教育部/浙江省重点实验室 杭州 310023)

摘 要 本文用快速非线性模型预测控制方法进行了非完整移动机器人路径跟踪问题的研究。采用虚拟目标跟踪法建立非完整移动机器人路径跟踪问题的非线性系统,转化为以 Bolza 形式的最优控制问题模型。通过一种障碍函数法处理不等式约束将其整合至性能指标函数中,基于拉格朗日乘数法建立最优化必要条件的线性方程组,以连续/广义极小残余算法(C/GMRES)为计算核心求解线性方程组并引入多重打靶法增加数值精度,同时提出一种优化求解方法降低算法计算负载。仿真对比结果表明,所提控制方法在满足实时性与保证控制精度的条件下具有更高的计算效率。最后通过实验结果证明所提出的控制方法在非完整移动机器人路径跟踪过程中的有效性。

关键词 非线性模型预测控制(NMPC); 路径跟踪; 虚拟目标跟踪; 障碍函数; 连续/广义极小残余算法(C/GMRES); 多重打靶法

0 引 言

两轮差速机器人是一类生活中较为常见的移动机器人,其受轮子与地面之间的速度不可积约束,即非完整约束,也称为非完整移动机器人(nonholonomic mobile robot, NMR)。NMR 的运动控制一直是多年来的研究热点,其反馈控制器的目标可分为 3 类,即点镇定、轨迹跟踪与路径跟踪。点镇定指动态系统围绕所需状态的稳定。轨迹跟踪需要系统跟踪时间参数化的参考轨迹。路径跟踪涉及没有时间条件限制下以所需速度曲线将系统收敛到给定路径。路径跟踪启发式地产生了到所需路径更平滑的收敛,同时降低了控制饱和的风险^[1]。路径跟踪控制也可以减轻非完整机器人的控制困难^[2],其对于强调路径收敛并保持所需速度曲线目标的移动机器人特别有效^[3]。

近年来有许多路径跟踪控制方法^[4-8],其控制效果均取得不错效果。在诸多控制方法中,非线性

模型预测控制算法(nonlinear model predictive controller, NMPC)因其滚动优化策略并且能及时弥补模型失配、受扰动因素引起的不确定性,动态性能好,能有效处理多变量多约束问题,通过反馈校正输出提高系统鲁棒性等优点,有大量路径跟踪问题的研究工作针对 NMPC 展开。文献[9]提出一种多边形线性微分包含的方法选择合适的终点罚分和相应的终点约束的 NMPC 控制方案,仿真结果中其控制性能在约束处理上较传统的反步控制法有明显的改善。文献[10]考虑 NMR 无限时域下 NMPC 路径跟踪策略的在线逼近问题,采用近似动态编程技术来近似,确保 NMR 最终均匀有界收敛至所需路径。文献[11]将参考轨迹选为优化问题中的终端等式约束,既保证 NMR 渐近收敛到期望轨迹,又保证了 NMPC 在线求解的优化问题的滚动可行性。

NMPC 虽然具有诸多优势,然而其面临非线性系统沉重的计算量与较短系统采样周期之间的冲突,虽然可通过诸如文献[12]中的方法将类 NMR

① 国家重点研发计划(2018YFB1309404)资助项目。
② 男,1979 年生,硕士,讲师;研究方向:机电一体化控制,数字邮政装备;联系人,E-mail: waltzhan@hotmail.com
③ 通信作者,E-mail: waltzhan@hotmail.com
(收稿日期:2020-02-28)

非线性运动学系统线性化构造跟踪误差模型,采用线性模型预测控制方法减少计算量,然而其控制精度在一些场合下无法满足要求。为了满足 NMPC 实时性的要求,已有多项有效的在线算法被采用,如延迟补偿^[13]、快速梯度下降^[14]、离线预计算^[15]、事件触发策略^[16]及数值连续法^[17]等。

本文针对非完整移动机器人路径跟踪问题,提出一种快速 NMPC 控制方法。以虚拟目标跟踪法建立 NMR 路径跟踪问题 NMPC 框架,转换为 Bolza 形式的 NMPC 最优控制问题模型。为追求 NMPC 求解效率,文献[17]的连续/广义极小残余算法(continuation/general minimum residual, C/GMRES)有重要参考意义,因为它同时具备数值连续法与 Krylov 子空间方法的优点,然而其算法只考虑针对等式约束的处理,针对 NMR 路径跟踪问题中状态与输入向量的不等式约束,本文使用一种障碍函数法将不等式约束整合入性能指标函数中重新推导建立最优化条件的线性方程组,引入多重打靶法将状态变量与共态变量作为独立变量提升控制方法控制精度。同时,通过一种压缩变量的优化方法减小线性方程大小,降低计算负载加快数值计算速度。最后通过仿真与实验验证该快速非线性模型预测控制方法的可行性。

1 路径跟踪问题

定义图 1 所示的由 x_r 轴和 y_r 轴组成的世界坐标系 $\{n\}$, 非完整移动机器人(NMR)在世界坐标系下运动学方程描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & 0 \\ \sin\theta_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, x_r 、 y_r 代表 $\{n\}$ 坐标下 NMR 质心位置, v 、 ω 表示 NMR 线速度与角速度, θ_r 为 NMR 前进方向。与传统的跟踪问题不同,路径跟踪的目标是以指定速度沿期望的路径移动。图 1 还展现了 NMR 自身坐标系 $\{r\}$, 而路径坐标系 $\{f\}$ 由轴 s_f 、 y_f 组成,它充当要跟随的虚拟目标身体轴的角色。虚拟目标沿参考路径 P 移动,其自身位置由曲线路径横坐标

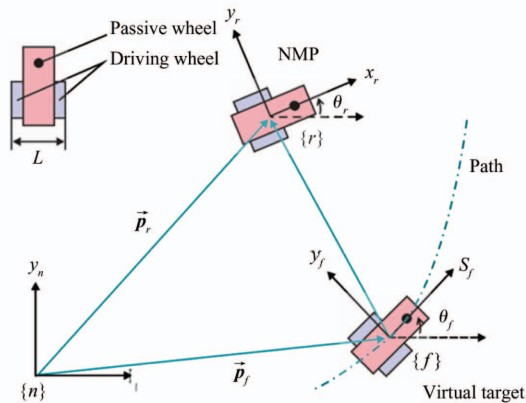


图 1 路径跟踪问题

$s_v(t)$ 确定。向量 $\vec{p}_r$ 与 $\vec{p}_f$ 分别表示 NMR 与虚拟目标在 $\{n\}$ 中的位置,令 nR_f 表示 $\{f\}$ 到 $\{n\}$ 的转换矩阵,可推导出位置关系如下:

$$\vec{p}_r = \vec{p}_f + {}^nR_f(s, y)^T \quad (2)$$

其中, s 、 y 表示路径坐标系 $\{f\}$ 下 NMR 的位置。对式(2)进行对时间求导,得到 NMR 路径跟踪误差运动学模型:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\dot{s}_v(1 - cy) + v\cos\theta \\ \dot{y} &= -c\dot{s}_vs + v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega - c\dot{s}_v \end{aligned} \quad (3)$$

其中, s_v 表示沿从原点到点 $p(s_v)$ 的路径测量弧长, $c = c(s_v)$ 表示虚拟目标点当前路径点上的曲率。需要注意的是,因为所需路径上的点是由实际机器人在期望路径上的投影定义,对于所有时刻有 $s = 0$ ^[18], 故有:

$$\dot{s}_v = \frac{v\cos\theta}{1 - cy} \quad (4)$$

当 $y = 1/c$ 时会出现奇异点,这种奇异性将导致机器人的实际位置约束在围绕期望路径的管内,对于曲率较大的路径跟踪会有所限制。参考文献[1]重定义虚拟目标状态:

$$\dot{s}_v = v\cos\theta + k_1s \quad (5)$$

式中 $k_1 \in \mathbb{R}^+$ 为可调的正增益,重定义后的虚拟目标速度消除了奇异性。为方便后续控制计算,定义辅助函数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$:

$$\varphi = \tanh(k_2s_v) \quad (6)$$

其中, $k_2 \in \mathbb{R}^+$ 为正增益,由式(5)、式(6)对 φ 求时间导数:

$$\frac{d\varphi}{ds_v} \frac{ds_v}{dt} = k_2 \operatorname{sech}^2(\tanh^{-1}(\phi)) (v \cos\theta + k_1 s) \quad (7)$$

考虑到系统动力学方程:

$$\dot{v} = \mathbf{F}/m, \mathbf{F} = (f_l + f_r)/R \quad (8)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{N}/I, \mathbf{N} = L(f_l - f_r)/R$$

式中 m 与 I 分别表示机器人质量及其惯性矩, $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{N}$ 为施加在 NMR 上的合力和转矩。 f_l 、 f_r 为左右轮输入转矩。考虑到实际系统中机器人加速度限制, 突变速度将引起机器人实际运行的不稳定, 将加速度与角加速度作为虚拟控制量对动力学系统进行简化, 简化后的模型如下。

$$\dot{v} = u_1, \dot{\omega} = u_2 \quad (9)$$

将式(4)代入式(3)中结合式(9)并用式(7)扩展系统状态, 得到 $\{f\}$ 坐标系下闭环系统状态方程如下。

$$\begin{cases} \dot{s} = cvy \cos\theta + k_1 csy - k_1 s \\ \dot{y} = -csv \cos\theta - k_1 cs^2 + v \sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega - csc \cos\theta - k_1 cs \\ \dot{\varphi} = k_2(1 - \varphi^2)(v \cos\theta + k_1 s) \\ \dot{v} = u_1 \\ \dot{\omega} = u_2 \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)中闭环系统重写为通用非线性表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (11)$$

式中 $\mathbf{x} = [s, y, \theta, \varphi, v, \omega]^T$ 作为状态向量, $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ 为输入向量。

v 、 ω 作为非线性系统中的状态量、实际空间中的输入量, 需考虑到非完整移动机器人驱动电机最高转速及用户自定义空间中的最大线速度与角速度约束, 图2显示了应用于 NMR 的速度空间中实际输入约束^[19], V_{motor} 表示驱动电机最大线速度。同时考虑虚拟输入向量 $\mathbf{u}$ 对应的加速度与线加速度约束, 定义非线性系统的约束如下。

$$\begin{cases} v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \\ |\omega| \leq \omega_{\max} \\ |u_1| \leq u_{1\max} \\ |u_2| \leq u_{2\max} \end{cases} \quad (12)$$

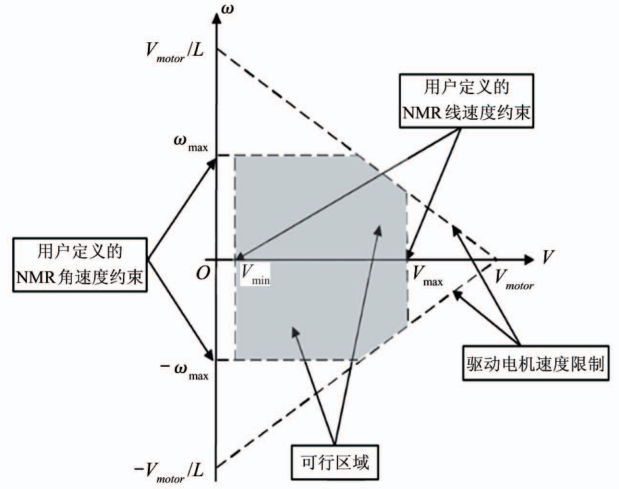


图2 速度空间中不同输入约束

有了上述系统模型, 对于路径跟踪问题阐述如下, 给定 NMR 期望速度曲线 $v_d(t) > v_{\min} > 0$, 寻找针对虚拟输入 $\mathbf{u}$ 合适的控制率驱动 $(s, y, \theta)_{t \rightarrow \infty} = (0, 0, 0)$ 同时满足 $v \rightarrow v_d, \omega \rightarrow cv_d$ 。

2 快速非线性模型预测控制方法

非线性模型预测控制 (NMPC), 也称为滚动时域控制, 本质上是一类极小性能指标的有限时域最优控制问题。在每一时刻最小化一个具有移动范围的性能指标函数同时产生反馈控制律。本节基于 C/GMRES 算法融合障碍函数法与多重打靶法提出一种快速非线性模型预测控制方法。

2.1 问题描述

针对第1节中路径跟踪问题在不失一般性的情况下, 将其描述为 Bolza 形式的最优化控制问题。给出以下 Bolza 形式性能指标函数最小化:

$$\min_{\mathbf{u}} J = g(\mathbf{x}(t+T)) + \int_t^{t+T} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (13)$$

$$\text{s. t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$$

式中 $g(\mathbf{x}(t+T))$ 表征终端约束, 写为

$$g(\mathbf{x}(t+T)) = \frac{1}{2} [(\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}_f)^T \mathbf{Q}_f (\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}_f)] \quad (12)$$

其中, $\mathbf{x}_f$ 表征终端状态向量, 路径跟踪过程中始终有 $\mathbf{x}_f = [0, 0, 0, 0, v_d, \omega_d]^T$, $\mathbf{Q}_f$ 为终端状态权重矩阵, 性能指标函数第 2 项为拉格朗日被积函数:

$$l = \frac{1}{2}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)^T \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] \quad (14)$$

式中, $\mathbf{Q} = \text{diag}\{q_1, \dots, q_6\}$, $\mathbf{R} = \text{diag}\{r_1, r_2\}$ 为对角权重矩阵, q_i 、 r_i 均为正常数。性能指标函数的条件中, 第 1 项为式 (10) 中跟踪问题系统模型; 第 2 项为边界条件。 $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{x}_f$ 分别表示跟踪初始状态与终止状态向量, 第 3 项为状态及输入的不等式约束。

2.2 约束处理

针对非线性模型预测控制中不等式约束的处理, 有许多文献通过各种方法系统地将不等式约束替代为等式约束, 例如外部惩罚法^[20]、辅助变量法^[21]、半平滑转换法^[22]、非线性互补函数法^[23]等。本文基于文献[24]提出的思想, 使用障碍函数松弛法来处理约束。为了光滑不等式约束式 (12), 以如下等效形式重写为

$$c_1(v) = \left(\frac{v - (v_{\max} + v_{\min})}{v_{\max} + v_{\min}} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (15)$$

$$c_2(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (16)$$

$$c_3(u_1) = \left(\frac{u_1}{u_{1\max}} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (17)$$

$$c_4(u_2) = \left(\frac{u_2}{u_{2\max}} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (18)$$

定义一个近似的障碍函数如下:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^4 \beta_\delta(-c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \quad (19)$$

其中, $\beta_\delta(x) = \begin{cases} -\log x & x > \delta \\ \gamma - 1 \left[\left(\frac{x - \gamma\delta}{(\gamma - 1)\delta} \right)^k - 1 \right] - \log \delta & x < \delta \end{cases}$

其中 $0 < \delta < 1$, $\gamma > 1$ 是偶整数, 一般情况下使用 $\gamma = 2$ 对于约束处理高效性能。 C^2 函数 $\beta_\delta(\cdot)$ 保留了对数障碍函数 $z \rightarrow -\log z$ 的许多重要特性, 能使将有限值的域 $(0, \infty)$ 扩展到 $(-\infty, \infty)$ 。这两个函数在域上是(严格)凸的, 并且严格递减。因此, 如果 $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格凸真函数, 则函数 $z \rightarrow \beta_\delta(-c(z))$ 也是 $\mathbb{R}$ 上严格凸真函数。

重新改写拉格朗日函数加入障碍函数项:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \varepsilon b(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (20)$$

式中 $\varepsilon > 0$ 是障碍参数, 一般取 $\varepsilon = 0.01$ 。

2.3 最优化条件

为了解决优化问题, 引入哈密顿函数:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (21)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}$ 为共态向量。为了用有限的参数表示未知的控制输入函数, 将预测时域离散为 N 步, 离散化后最优化的必要条件如下:

$$\mathbf{x}_{i+1}(t) = \mathbf{x}_i(t) + f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \Delta \tau \quad (22)$$

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t) \quad (23)$$

$$H_u^T(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\lambda}_{i+1}(t), \mathbf{u}_i(t)) = 0 \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_{i+1} - H_x^T(\mathbf{x}_i(t), \boldsymbol{\lambda}_{i+1}(t), \mathbf{u}_i(t)) \Delta \tau \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_N = g_x^T(\mathbf{x}_N(t)) \quad (26)$$

式中, $\Delta \tau = T/N$, 在离散范围内, 与等式约束相关联的状态向量序列、共态向量序列、输入向量序列分别表示为 $\{\mathbf{x}_i(t)\}_{i=0}^N$ 、 $\{\boldsymbol{\lambda}_i(t)\}_{i=0}^N$ 、 $\{\mathbf{u}_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ 。由此可以看出, NMPC 的求解问题可以看作是在离散时间下的两边边值问题 (two point boundary value problem, TPBVP) 用于测量在每个 t 时刻的状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 。有必要在每个采样时刻解决 TPBVP 问题。求解 NMPC 方法之一是将基本的优化问题转换为等式约束问题, 该问题是基于牛顿型方法通过最优性的必要条件进行求解。

首先, 定义 $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}^{m_u N}$ 为一组由输入向量与拉格朗日算子组成的向量:

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}_0^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N-1}^T(t)]^T \quad (27)$$

再定义由状态向量与共态向量组成向量 $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{2nN}$

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \quad \boldsymbol{\lambda}_1^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_N^T(t) \quad \boldsymbol{\lambda}_N^T(t)]^T \quad (28)$$

将最优化的必要条件式 (24) 写成一个 nN 维的方程组:

$$F(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} H_u^T(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \mathbf{u}_0) \\ H_u^T(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ H_u^T(\mathbf{x}_{N-1}, \boldsymbol{\lambda}_N, \mathbf{u}_{N-1}) \end{bmatrix} = 0 \quad (29)$$

将状态向量和共态向量的代数约束的方程组写为

$$G(U, X, x, t) = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 - f(x_0, u_0)\Delta\tau \\ \lambda_1 - \lambda_2 - (H_x^T)_1\Delta\tau \\ \vdots \\ x_N - x_{N-1} - f(x_{N-1}, u_{N-1})\Delta\tau \\ \lambda_{N-1} - \lambda_{N-2} - (H_x^T)_{N-1}\Delta\tau \\ \lambda_N - g_x^T(x_N) \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

2.4 快速优化算法

对方程组式(29)与式(30)的求解,使用诸如牛顿法等迭代法求解时计算负载十分巨大,因此参考文献[25]使用将 t 作为参数的连续法。在初始时刻 $t = 0$,确定满足式(29)和式(30)的 $U(0)$ 与 $X(0)$,用以下条件使 $F = 0$ 、 $G = 0$:

$$\dot{F}(U, X, x, t) = -AF(U, X, x, t) \quad (31)$$

$$\dot{G}(U, X, x, t) = -AG(U, X, x, t) \quad (32)$$

式中, $A \in \mathbb{R}^+$ 是一个正稳态矩阵用于防止 $F = 0$ 、 $G = 0$ 受数值误差与未建模的影响。那么上述条件将转换为在每个采样周期内求解关于 $\dot{U}$ 与 $\dot{X}$ 的线性代数方程组:

$$F_U \dot{U} + F_X \dot{X} + F_x \dot{x} + F_t = -AF(U, X, x, t) \quad (33)$$

$$G_U \dot{U} + G_X \dot{X} + G_x \dot{x} + G_t = -AG(U, X, x, t) \quad (34)$$

定义 $\dot{Z} = [\dot{U}^T \ \dot{X}^T]^T$,线性方程组重新表示为

$$F_Z \dot{Z} = -AF - F_x \dot{x} - F_t \quad (35)$$

式中 $F = [F^T \ G^T]^T$,假定 F_Z 为非奇异矩阵,可获得关于 $Z(t)$ 的微分方程:

$$\dot{Z} = F_Z^{-1}(-AF - F_x \dot{x} - F_t) \quad (36)$$

通过使用欧拉法积分由式(31)求得的 $\dot{Z}$ 来实时更新 $F = 0$ 的解 $Z(t)$ 是一种连续法(continuation method)。然而式(36)的求解中因带有 F_Z^{-1} 仍有巨大的计算量,为了减少雅克比矩阵与线性方程的计算成本,引入两种方法,即对雅克比和向量乘积进行前向差分近似,对线性方程组使用GMRES算法^[26]。给出雅克比矩阵与算子 $W \in \mathbb{R}^{(m_u+n)N}$ 、 $w \in \mathbb{R}^{nN}$ 、 $\omega \in \mathbb{R}$ 乘积的前向差分近似:

$$F_Z W + F_x w + F_t \omega = D_h F(Z, x, t; W, w, \omega)$$

$$\approx \frac{F(Z + hW, x + hw, t + h\omega) - F(Z, x, t)}{h} \quad (37)$$

式中, h 为前向差分步长,是一个正实数,因此,式(35)重定义为

$$\begin{aligned} D_h F(Z, x + h\dot{x}, t + h\dot{Z}, 0, 0) \\ = -AF(Z, x, t) - D_h F(Z, x, t; 0, \dot{x}, 1) \end{aligned} \quad (38)$$

常规C/GMRES算法只是针对式(29)方程组的求解,仍存在较大的数值误差。在多重打靶法的思想下,将状态向量 x 与共态向量 λ 边界值视为独立变量,在子区间上被积分,而不是有输入序列确定的因变量,任一子区间上的最后一个值必等于下一子区间的初始值,这种一致性条件表示为一组关于子区间初值的非线性代数方程组式(30)。从给定初始解 $U(0)$ 和 $X(0)$ 出发,通过对各自时间的导数 $\dot{U}$ 和 $\dot{X}$ 积分更新未知量 U 与 X 以满足条件 $F = 0$ 、 $G = 0$ 。融入多重打靶的C/GMRES不仅保留无需迭代、计算高效的特点外,也增强了数值稳定性。

2.5 优化求解

联立式(33)、式(34)消去 $\dot{X}$ 项获得关于 $\dot{U}$ 的线性方程:

$$\begin{aligned} (F_U - F_X G_X^{-1} G_U) \dot{U} \\ = -AF - F_x \dot{x} - F_t - F_X G_X^{-1}(-AG - G_x \dot{x} - G_t) \end{aligned} \quad (39)$$

假设存在误差项 $E = [e_1^T, \dots, e_{2N}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$ 使得:

$$G(U, X, x, t) = E \quad (40)$$

定义函数 $Q: \mathbb{R}^{2nN} \rightarrow \mathbb{R}^{2nN}$ 为 X 关于 E 的映射^[27],那么 $X = Q(U, E, x, t)$ 关于 x_i 和 λ_i 的计算满足:

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, u_i)\Delta\tau + e_{2i+1} \quad (41)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} + H_x^T(x_{i+1}, \lambda_{i+2}, u_{i+1})\Delta\tau + e_{2i+2} \quad (42)$$

$$\lambda_N = g_x^T(x_N) + e_{2N} \quad (43)$$

X 可以通过这种方式递归计算,这为解决式(39)中 $-G_X^{-1} G_U u_k$ 项提供思路,首先 $u_k \in \mathbb{R}^{mN}$ 作为Krylov子空间的正交基存在另一组虚拟向量 $v_k \in \mathbb{R}^{2nN}$ 使得 $-G_X^{-1} G_U u_k$ 满足:

$$G_U u_k + G_X v_k = 0 \quad (44)$$

通过前向差分法,式(44)近似为

$$\begin{aligned} G(U + hu_k, X + hv_k, x + h\dot{x}, t + h) \\ = G(U, X, x + h\dot{x}, t + h) \end{aligned} \quad (45)$$

映射 Q 得到 $X + hv_k$ 的值:

$$\begin{aligned} X + hv_k = Q(U + hu_k, G(U, X, x + h\dot{x}, t + h), \\ x + h\dot{x}, t + h) \end{aligned} \quad (46)$$

因此 $-G_X^{-1}G_U u_k$ 可近似为

$$\begin{aligned} -G_X^{-1}G_U u_k = v_k \\ \approx \frac{Q(U + hv_k, G(U, X, x + h\dot{x}, t + h), x + h\dot{x}, t + h) - X}{h} \end{aligned} \quad (47)$$

解决 $-G_X^{-1}G_U u_k$ 项后,式(34)可以通过 C/GMRES 法快速求解,确定 $\dot{U}$ 项后, $\dot{X}$ 也非常容易确定,式(39)可用前向差分法近似为

$$\begin{aligned} G(U + h\dot{U}, X + h\dot{X}, x + h\dot{x}, t + h) \\ = (1 - Ah)G(U, X, x, t) \end{aligned} \quad (48)$$

再次通过映射 Q 获得 $X + h\dot{X}$ 的值:

$$\begin{aligned} X + h\dot{X} = Q(U + h\dot{U}, (1 - Ah)G(U, X, x, t), \\ x + h\dot{x}, t + h) \end{aligned} \quad (49)$$

通过这种优化方法, $\dot{X}$ 项无需通过 C/GMRES 算法求解,只需要通过映射 Q 项求解。获得 $\dot{U}$ 、 $\dot{X}$ 后,未知项 U 、 X 只需通过欧拉法实时积分便可更新,提升了计算速率。

3 仿真对比

为验证所提控制方法的有效性,在 Matlab2019a 环境下进行路径跟踪仿真模拟,PC 的 CPU 为英特尔 Core i8550U,四核 1.8 GHz。对圆形与 8 字形路径进行跟踪仿真,两种路径分别对应路径固定曲率与变曲率路径的跟踪。

圆形路径定义如下:

$$x = 0.2 \times \sin(\varpi) \quad y = 0.3 - 0.2 \times \cos(\varpi)$$

式中, ϖ 为路径参数,确定了虚拟目标在世界坐标系下的位置,初始状态和终端状态分别选取为

$$x_0 = [0 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0.02 \quad 0.1]^T$$

$$x_f = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.02 \quad 0.1]^T$$

8 字形路径定义如下:

$$x = 0.3 \times \sin(\varpi) \quad y = 0.2 \times \sin(\varpi)$$

初始状态与终端状态分别选取为

$$x_0 = [-0.5 \quad 0 \quad -1.1 \quad 0 \quad 0.02 \quad 0.1]^T$$

$$x_f = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$$

两种路径下初始输入均为 $u = [0.02 \quad 0.1]^T$,仿真参数设置中,采样时间选择为 $\Delta t = 0.1$,权重矩阵取:

$$Q_f = Q = \text{diag}\{10, 10, 1, 1, 1, 1\}$$

$$R = \text{diag}\{0.1, 0.1\}$$

其他参数中, $k_1 = 0.1$, $k_2 = 0.05$, $\delta = \varepsilon = 0.01$, $A = I/\Delta t = I$, $h = 0.001$, $T = 1$ s, $N = 10$, C/GMRES 算法内部参数设置初始控制输入与乘子的误差容限 $rtol = 1.0e-6$, GMRES 的迭代数 $k_{\max} = 10$ 。约束参数中设置 $v_{\min} = 0$ m/s, $v_{\max} = 0.04$ m/s, $\omega_{\max} = 0.8$ rad/s, $u_{1\max} = 0.003$ m/s², $u_{2\max} = 0.5$ rad/s²。

针对式(13)中最优化问题,仿真中引入另两种控制方法与本文提出的控制方法进行路径跟踪结果进行比较。第一种控制方法采用文献[28]中的方法设计线性化 MPC(linearized MPC)控制,第二种采用 Matlab 自带的基于 SQP 算法的 NMPC 控制方法。

仿真图中,点线代表线性化 MPC 控制结果,划线代表 Matlab 自带 NMPC 控制结果,实线代表本文提出控制方法,ref 为参考路径。跟踪误差以 $e = \sqrt{s^2 + y^2}$ 给出,圆形路径跟踪中仿真总时长设定为 80 s,由图 3 可知在 40 s 时各项指标开始收敛,3 种控制方法皆跟踪上期望路径。为方便讨论,截取跟踪结果前 60 s 进行分析。在圆形路径中固定曲率下 3 种控制器都展现良好的跟踪效果,未出现违规约束状况,路径误差均控制在 0.01 m 范围。NMPC 对期望路径最为敏感,跟踪误差最快收敛。本文提出的控制方法对比其他两种控制虽然在跟踪误差上控制相当,但其线速度达到期望值所需的时间最长。

如图 4 所示,变曲率的 8 字形路径跟踪中仿真总时长在 120 s,3 种控制方法效果差异较为明显,其中线性化 MPC 在曲率变化较大的拐角区域出现周期性的且均值约 0.005 m 的跟踪误差,控制输入 u_1 、 u_2 在 0~20 s 时间段内发生明显的抖振,不利于实际工作状态的控制输入。NMPC 与本文提出的控制方法控制效果相当。以跟踪 8 字形路径为例,分别计算在不同预测步长 N 下 3 种控制器每个控制更新间隔的平均计算时长以及平均路径跟踪误差,结果如表 1 和表 2 所示。虽然 NMPC 拥有较高的控制

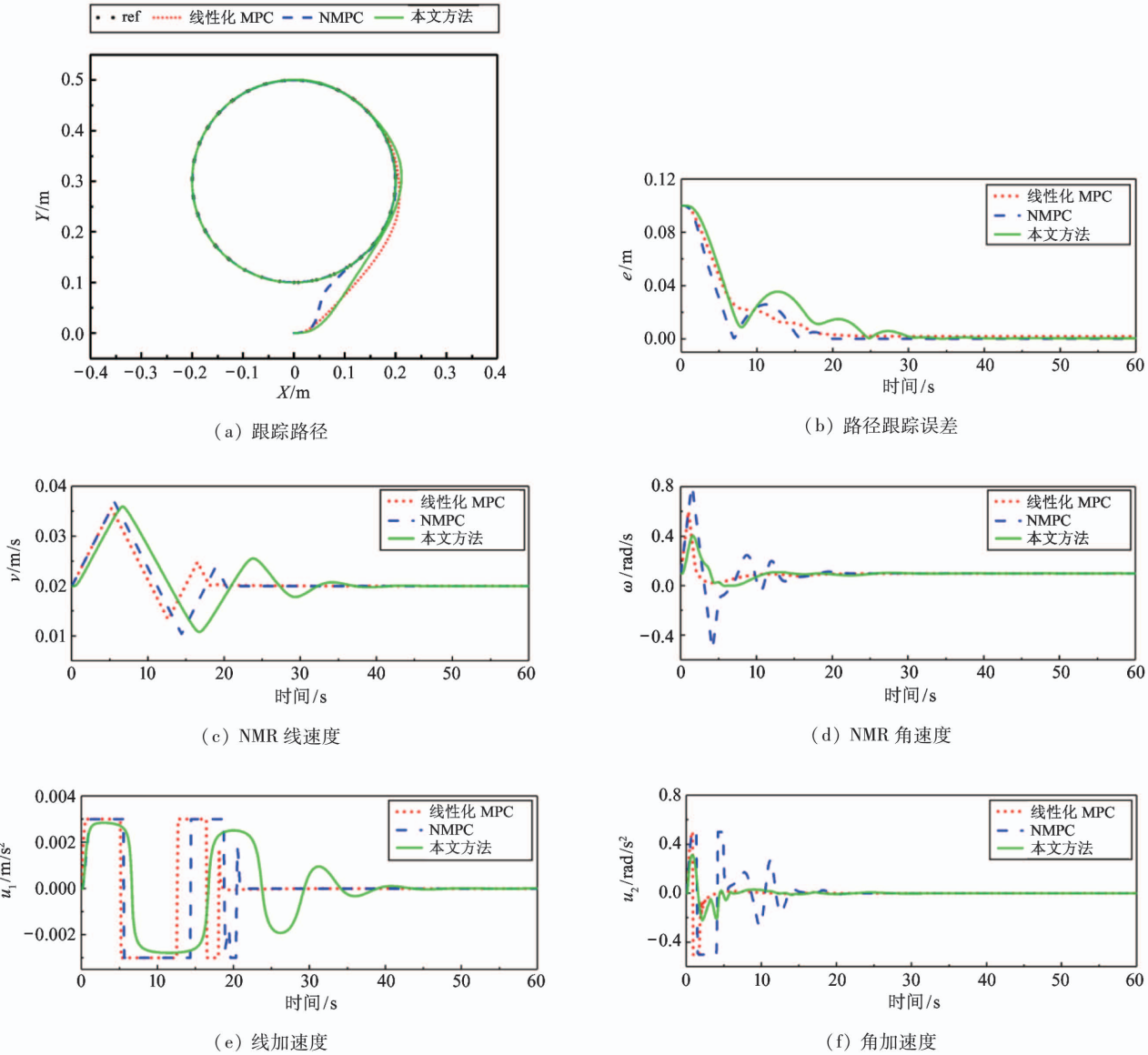
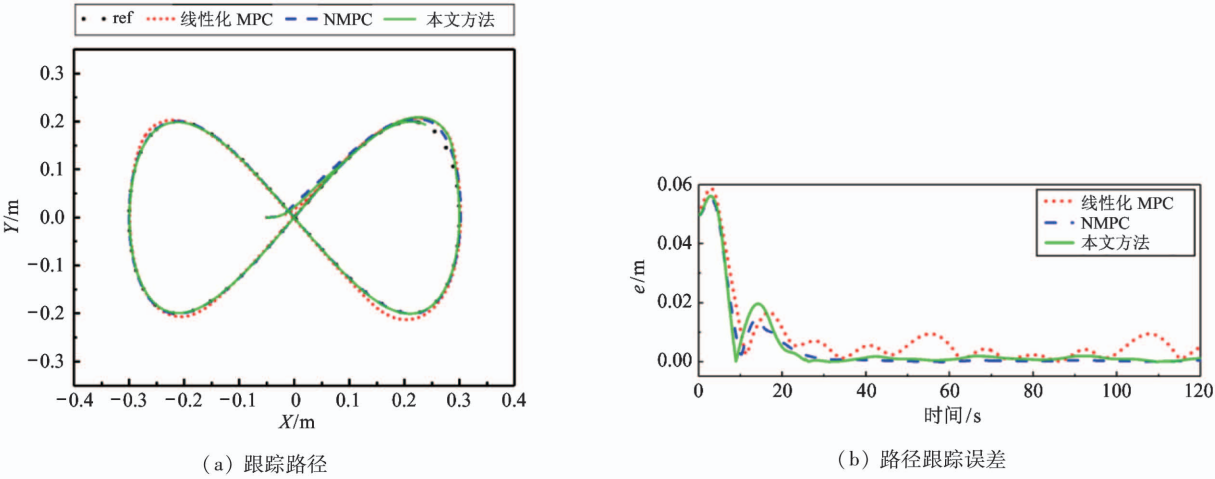


图3 圆形路径跟踪仿真结果



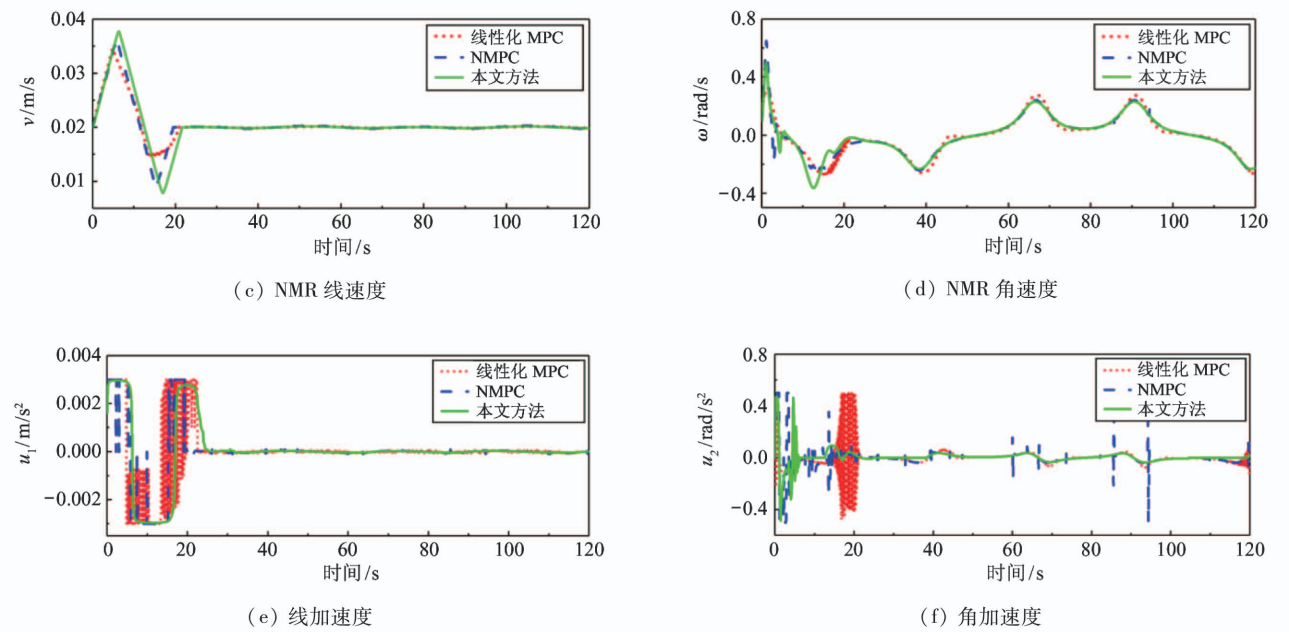


图 4 8 字形路径跟踪仿真结果

表 1 平均计算时长

N	线性化 MPC/s	NMPC/s	本文方法/s
5	0.0122	0.0638	0.0012
10	0.0165	0.2668	0.0021
20	0.0244	0.7123	0.0043
30	0.0339	1.4912	0.0072

表 2 平均跟踪误差

N	线性化 MPC/m	NMPC/m	本文方法/m
5	0.1728	0.1043	0.1278
10	0.0724	0.0175	0.0358
20	0.0314	0.0041	0.0096
30	0.0073	0.0013	0.0021

精度,然而其更新时间随着 N 的增大已超出采样周期,在 $N=10$ 的情况下其平均计算时间达到0.1106 s,这意味着采样时刻 0.1 s 内无法对求解 NMPC 问题获得最佳控制输入。线性化 MPC 虽然实时性上满足要求,但以损失精度作为代价,在控制精度要求高的场合显然不合适。相比之下,本文提出控制方法在计算速率上展现出优势,以消耗约采样时间 Δt 的 10% 以内的计算时间有效求解 NMPC 问题,满足实时性的同时,提高了计算效率,同时控制精度也得以保证。这对更为复杂的非线性系统 NMPC 问题求

解效率的提升也有极大的帮助。

4 实验

为验证本文控制方法在 NMR 实际工作环境中路径跟踪的有效性,利用浙江工业大学数字印刷实验室研发的爬虫打印机器人及视觉检测平台进行路径跟踪实验。爬虫打印机器人如图 5 所示,其运动模型简化后是类非完整机器人,配置 ESP8266-WIFI 模块与计算机进行通信,其左右驱动轮是齿轮式,一方面驱动电机与其通过齿轮进行动力传动,另一方面齿状轮面可忽略打滑因素对机器人运动的影响。视觉平台如图 6 所示,视觉测量系统基于核相关的 (adaptive kernel correlation filter, AKCF) 算法^[29],对跟踪目标形态学处理、最小二乘法圆度拟合高精度的提取特征点,利用单目视觉标定原理构建运动坐标系与图像坐标系之间的映射关系,完成高精度爬

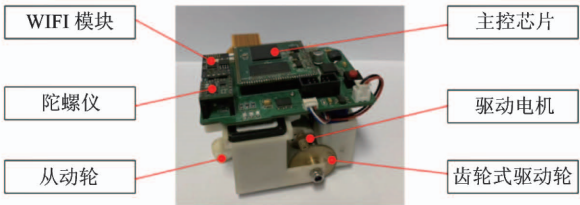


图 5 爬虫打印机器人

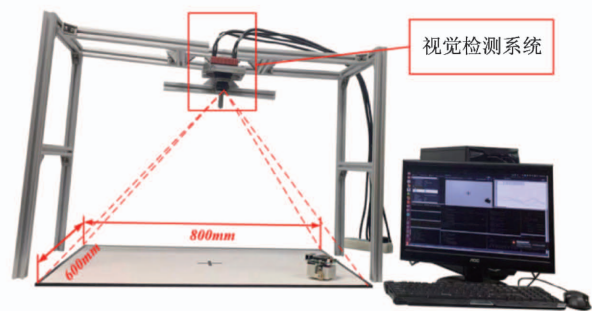


图6 实验平台

虫打印机器人位姿测量,作为控制算法的输入。通过调整左右驱动轮的驱动步进电机速度实现机器人的运动控制。

实验参数设置与仿真相同,机器人初始状态量输入也与仿真一致,仿真中约束参数也是基于实际爬虫机器人物理性质设定,代码基于 AutoGenU^[30]自动生成的仿真代码改编。两种路径的跟踪结果如图7和图8所示。可以看出实际环境下爬虫机器人可稳定跟踪期望路径,未出现违规约束,证明所提出的控制方法可实时执行,对于当前非线性系统是有效的。由于实际机器人模型与仿真存在一定的差异且未考虑系统动力学以及输入信号延迟、传感器噪声以及电机振动等未知因素的扰动,实验结果与仿真存在一定的差异,但这并未对控制方法有效执行带来严重影响。

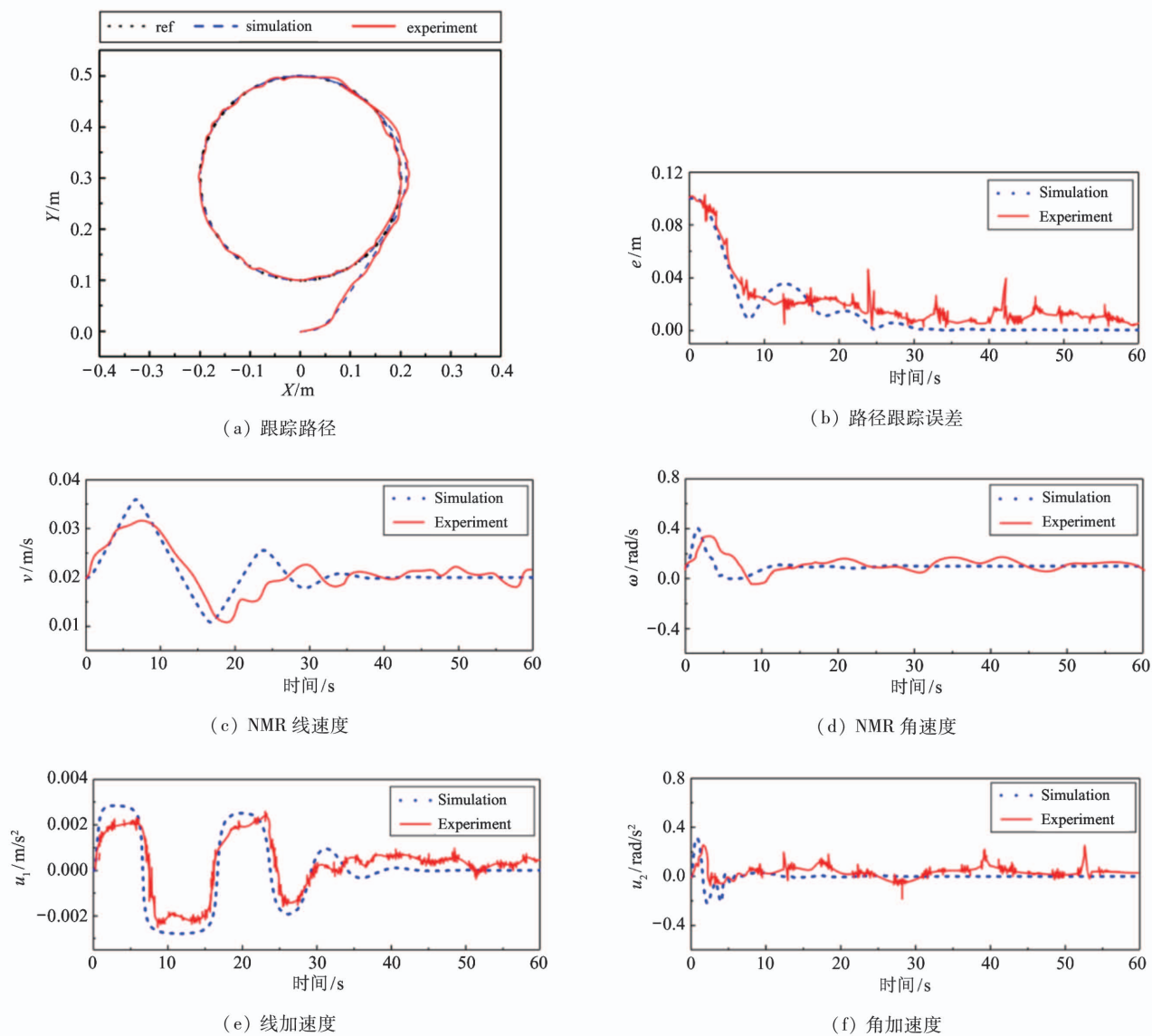


图7 圆形路径跟踪实验结果

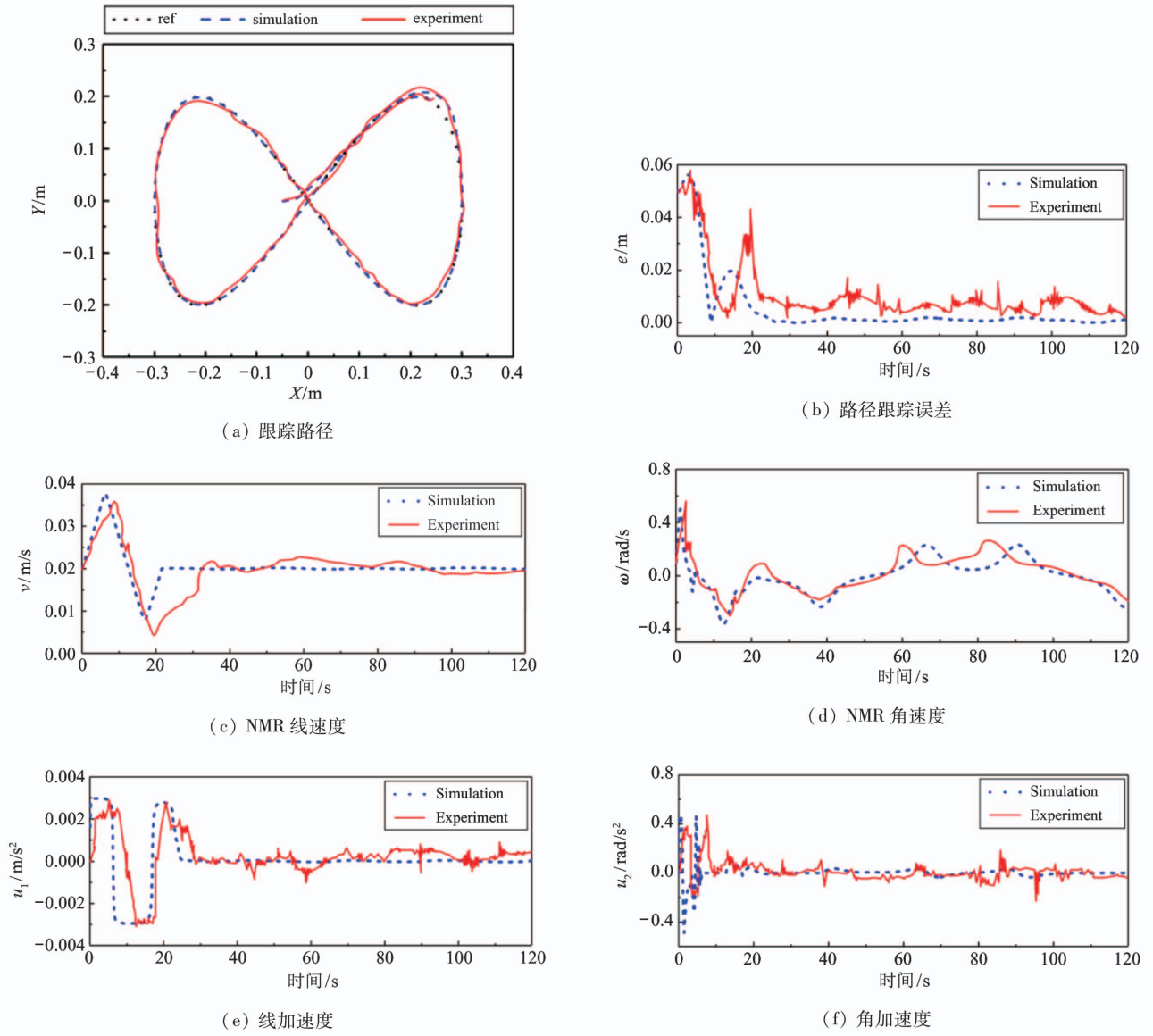


图 8 8 字形路径跟踪实验结果

5 结 论

针对非完整移动机器人路径跟踪问题,本文利用虚拟目标跟踪法建立路径跟踪问题模型,采用非线性模型预测控制思想,建立 Bloza 最优控制问题,通过障碍函数法将状态与输入的不等式约束合并至 Bolza 最小性能指标函数中,基于 C/GMRES 算法求解最优必要条件的线性方程组同时融合多重打靶法提升数值精度,利用消元的优化求解降级计算负载、提升计算效率。仿真对比结果表明所提出控制方法在满足实时性与保证控制精度的条件下具有更高的计算效率。实验环境下进行路径跟踪实验结果验证

了本文提出的控制方法的有效性。

但是本文提出的控制方法未考虑实际环境中机器人动力学模型以及环境干扰等因素在路径跟踪过程中的影响,如何提升控制方法的鲁棒性将是下一阶段的研究内容。

参考文献

[1] Lapierre L, Soetanto D, Pascoal A. Nonsingular path following control of a unicycle in the presence of parametric modelling uncertainties[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(10) :485-504

[2] Morin P, Samson C. Motion control of wheeled mobile ro-

- bots[J]. *Springer Handbook of Robotics*, 2008, 5(1): 799-826
- [3] Morro A, Sgorbissa A, Zaccaria R. Path following for unicycle robots with an arbitrary path curvature[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, 27(5):1016-1023
- [4] 郑泽伟, 霍伟, 诸兵. 非完整移动机器人全局路径跟踪控制[J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(6): 741-746
- [5] Liu Y, Guo C, Shen Z, et al. Stable adaptive neural network control of path following for underactuated ships[J]. *Control Theory and Applications*, 2010, 27: 169-174
- [6] Hu C, Jing H, Wang R, et al. Robust H_∞ output-feedback control for path following of autonomous ground vehicles[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 70(MAR): 70-71
- [7] Li Z, Chen L, Zheng Q, et al. Control of a path following caterpillar robot based on a sliding mode variable structure algorithm[J]. *Biosystems Engineering*, 2019, 186: 293-306
- [8] Guerrero J, Antonio E, Manzanilla A, et al. Autonomous underwater vehicle robust path tracking: auto-adjustable gain high order sliding mode controller[J]. *IFAC-Papers OnLine*, 2018, 51(13): 161-166
- [9] Yu S, Li X, Chen H, et al. Nonlinear model predictive control for path following problems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 25(8): 1168-1182
- [10] Walters P, Kamalapurkar R, Andrews L, et al. Online approximate optimal path-following for a kinematic unicycle[J]. *arXiv:1310.0064*, 2013
- [11] Liu Y, Yu S, Guo Y, et al. Receding horizon control for path following problems of wheeled mobile robots[J]. *Control Theory and Applications*, 2017, 34(4):424-432
- [12] 李培新, 姜小燕, 魏燕定, 等. 基于跟踪误差模型的无人驾驶车辆预测控制方法[J]. *农业机械学报*, 2017, 48(10):351-357
- [13] Findeisen R, Allgöwer F. Computational delay in nonlinear model predictive control[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2004, 37(1): 427-432
- [14] Englert T, Völz A, Mesmer F, et al. A software framework for embedded nonlinear model predictive control using a gradient-based augmented Lagrangian approach (GRAMPC)[J]. *Optimization and Engineering*, 2019, 20(3):1-41
- [15] Büskens C, Maurer H. SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 120(1-2): 85-108
- [16] Li H, Shi Y. Event-triggered robust model predictive control of continuous-time nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(5): 1507-1513
- [17] Ohtsuka T. A continuation/GMRES method for fast computation of nonlinear receding horizon control[J]. *Automatica*, 2004, 40(4): 563-574
- [18] Bayer F, Hauser J. Trajectory optimization for vehicles in a constrained environment[C]//IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control, Maui, USA, 2012:625-630
- [19] Mathew R, Hiremath S S. Control of velocity-constrained stepper motor-driven Hilare robot for waypoint navigation[J]. *Engineering*, 2018, 4(4): 491-499
- [20] Huang M, Nakada H, Butts K, et al. Nonlinear model predictive control of a diesel engine air path: a comparison of constraint handling and computational strategies[J]. *IFAC-Papers OnLine*, 2015, 48(23): 372-379
- [21] Seguchi H, Ohtsuka T. Nonlinear receding horizon control of an underactuated hovercraft[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-affiliated Journal*, 2003, 13(3-4): 381-398
- [22] Liao-McPherson D, Huang M, Kolmanovsky I. A regularized and smoothed Fischer-Burmeister method for quadratic programming with applications to model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(7): 2937-2944
- [23] Sajadi-Alamdari S A, Voos H, Darouach M. Nonlinear model predictive control for ecological driver assistance systems in electric vehicles[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2019, 112: 291-303
- [24] Hauser J, Saccon A. A barrier function method for the optimization of trajectory functionals with constraints[C]//Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, USA, 2006: 864-869
- [25] Marutani J, Ohtsuka T. A real-time algorithm for nonlinear infinite horizon optimal control by time axis transformation method[J]. *International Journal of Robust and*

Nonlinear Control, 2013, 23(17): 1955-1971

[26] Kelley C T. Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations[M]. Philadelphia: SIAM, 1995

[27] Shimizu Y, Ohtsuka T. A real-time algorithm for nonlinear receding horizon control using multiple shooting and continuation/Krylov method[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 19(8): 919-936

[28] Lages W F, Alves J A V. Real-time control of a mobile

robot using linearized model predictive control[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2006, 39(16): 968-973

[29] 胥芳, 丁信斌, 占红武. 高精度移动目标位姿测量方法[J]. 高技术通讯, 2019, 29(2): 119-133

[30] Ohtsuka T. A tutorial on C/GMRES and automatic code generation for nonlinear model predictive control[C] // 2015 European Control Conference, Linz, Austria, 2015: 73-86

Fast nonlinear model predictive control method for nonholonomic mobile robot path following

Zhan Hongwu, Li Sheng, Xu Fang

(Key Laboratory of E&M (Zhejiang University of Technology), Ministry of Education & Zhejiang Province, Hangzhou 310023)

Abstract

A fast nonlinear model predictive control method is used to study the trajectory tracking problem of nonholonomic mobile robots. A nonlinear system model of the path tracking problem of a nonholonomic mobile robot is established using the virtual target tracking method, which is transformed into an optimal control problem model in the form of Bolza. It is integrated into the performance index function by processing an inequality constraint using a barrier function method. The Lagrangian multiplier method is used to establish a set of linear equations for optimization. The continuation/general minimum residual (C/GMRES) algorithm is used as the calculation core to solve the linear equations and the multiple shooting method is introduced to increase the numerical accuracy. At the same time, an optimized solution method is introduced to reduce the calculation of the control method's load. The simulation comparison results show that the proposed control method has higher calculation efficiency under the conditions of real-time performance and guaranteed control accuracy. Finally, experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed control method in nonholonomic mobile robot path tracking.

Key words: nonlinear model predictive control (NMPC), path tracking, virtual target tracking, barrier function, continuation/general minimum residual (C/GMRES), multiple shooting