

两旋翼飞行器非奇异固定时间自适应姿态控制^①

沈林武^{②**} 陈 强^{③*} 陶玫玲^{*} 何熊熊^{*}

(* 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

(** 浙江机电职业技术学院电气电子技术系 杭州 310053)

摘 要 针对具有系统不确定性和外部干扰的两旋翼飞行器,提出一种非奇异固定时间自适应控制方法。构造新的非奇异终端滑模面,并基于该滑模面设计固定时间控制器。同时,构造辅助函数避免控制器设计中的奇异值问题。设计自适应更新律估计系统不确定和干扰的上界,从而无需已知其上界的先验知识。基于李雅普诺夫定理证明滑模变量、系统姿态角误差和角速度误差能够在固定时间内收敛至平衡点附近邻域,且收敛时间上界与初始状态无关。最后,在两旋翼飞行器实验平台上验证了所提方法的有效性和优越性。

关键词 固定时间控制;非奇异滑模面;自适应控制;两旋翼飞行器

0 引 言

旋翼飞行器具有垂直起降、自由悬停、适应各种复杂环境等能力^[1],被广泛用于航拍、农业植保、工业巡检、情报侦察等民用场合和军用领域^[2-3]。因此,国内外许多学者重视旋翼飞行器控制的重要性。文献[4]基于比例积分微分(proportion-integration-differentiation, PID)控制器,保证三旋翼飞行器盘旋的姿态稳定。文献[5]基于常规滑模面设计控制器,通过仿真验证四旋翼飞行器的姿态快速收敛。文献[6]提出一种连续非线性自适应鲁棒控制方法,抑制未知扰动和补偿估计偏差,实现三旋翼飞行器姿态与高度跟踪误差的渐近稳定。然而,上述控制方法仅能实现姿态的渐近收敛。

与上述方法相比,有限时间控制方法能实现系统状态的有限时间收敛。文献[7]提出一种快速终端滑模面,结合自适应技术设计控制器,通过仿真确保刚性飞行器的姿态跟踪有限时间收敛。文献[8]基于预设性能函数(prescribed performance function,

PPF),设计刚性飞行器的容错控制器,仿真表明飞行器姿态有限时间收敛。文献[9]在转动惯量和外部干扰不确定情况下,设计终端滑模控制器,通过与多种方法仿真对比,确保四旋翼飞行器的姿态和位置跟踪有限时间收敛。然而,上述控制方法中系统状态的收敛时间与初始值有关。

针对以上问题,文献[10]提出固定时间控制方法,保证系统状态收敛时间上界与初始值无关。文献[11]提出非奇异固定时间滑模控制,并通过仿真验证系统状态收敛时间上界由相关设计参数决定。文献[12]针对飞行器的不确定因素,设计非奇异固定时间自适应控制器,实现刚性飞行器的姿态角和角速度固定时间收敛。文献[13]提出基于双幂次趋近律的自适应固定时间控制方法,提高系统状态收敛速度,并减小颤振问题。

基于上述讨论,本文针对两旋翼飞行器提出一种非奇异固定时间自适应控制方法,确保滑模变量和姿态角误差的固定时间收敛,且收敛时间上界与初始状态无关。通过构造辅助函数避免奇异值问题,设计自适应更新律估计系统的不确定性和外部

① 国家自然科学基金面上项目(61873239, 61973274)和浙江省自然科学基金一般项目(LY17F030018)资助。
② 男,1976年生,博士,讲师;研究方向:飞行器姿态控制;E-mail: lwshen@yeah.net
③ 通信作者,E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn
(收稿日期:2020-01-10)

干扰的上界。通过两旋翼飞行器测试平台的实验对比,验证所提控制方法的有效性和优越性。

1 动力学模型

两旋翼飞行器动力学模型描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ J\dot{x}_2 = M_b + M_f + M_d \end{cases} \quad (1)$$

其中, x_1 和 x_2 分别为两旋翼平衡杆绕转轴旋转的姿态角和角速度,其信息可从陀螺仪模块获得; J 为转动惯量, M_f 为空气阻力、摩擦力等产生的力矩, M_d 为未知干扰力矩, M_b 为旋翼升力产生的转矩,其表达式为

$$M_b = (F_1 - F_2)L = ku \quad (2)$$

其中, F_1 、 F_2 为旋翼产生的升力, L 是电机轴中心线与转轴中心线之间的距离, k 为正系数, $u \in R$ 为控制输入。为便于控制器设计,定义 $b = \frac{k}{J}$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{J}M_f$, $d(t, x_1, x_2) = \frac{1}{J}M_d$ 。综合式(1)和式(2),两旋翼飞行器动力学模型改写为式(3)。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = bu + f(x_1, x_2) + d(t, x_1, x_2) \end{cases} \quad (3)$$

假设1 M_f 和 M_d 有界,即 $f(x_1, x_2)$ 和 $d(t, x_1, x_2)$ 有界,存在常数 $F > 0$ 和 $D > 0$, 保证 $|f(x_1, x_2)| \leq F$ 和 $|d(t, x_1, x_2)| \leq D$ 成立。

引理1^[10] 考虑以下标量系统:

$$\dot{y} = -k_1 y^{a_1} - k_2 y^{a_2} \quad (4)$$

其中, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $a_1 > 1$, $0 < a_2 < 1$, 则式(4)收敛时间 T 满足

$$T < T_{\max} = \frac{1}{k_1(a_1 - 1)} + \frac{1}{k_2(1 - a_2)} \quad (5)$$

2 控制器设计

2.1 滑模面设计

定义姿态角误差为

$$e = x_1 - x_d \quad (6)$$

则姿态角角速度误差和角加速度误差为

$$\dot{e} = x_2 - \dot{x}_d \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_d \\ &= bu + f(x_1, x_2) + d(t, x_1, x_2) - \ddot{x}_d \end{aligned} \quad (8)$$

其中, x_d 、 $\dot{x}_d$ 和 $\ddot{x}_d$ 分别是姿态角、角速度和角加速度的期望输入。

本文构造如下非奇异滑模面:

$$s = \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e + \frac{k_2}{2 - a_2} \text{sig}^{2-a_2} (\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e) \quad (9)$$

其中, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $0 < a_2 < 1$, $a_2 < a_1 < a_2(2 - a_2)$, $a_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $a_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_3}{n_3}$, $n_1 > m_1$, $n_2 > m_2$, $n_3 > m_3$, m_1 和 n_1 、 m_2 和 n_2 、 m_3 和 n_3 是互质正奇数, $\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e = |e|^{\frac{a_1}{a_2}} \text{sgn}(e)$, $\text{sig}^{2-a_2} (\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e) = |\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e|^{2-a_2} \text{sgn}(\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e)$, $\text{sgn}(\cdot)$ 代表符号函数。

对式(9)求导,得到:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{a_1}{a_2} |e|^{\frac{a_1}{a_2}-1} \dot{e} + k_2 |\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}} e|^{1-a_2} \\ &\quad \cdot \left(\ddot{e} + k_1 \frac{a_1}{a_2} |e|^{\frac{a_1}{a_2}-1} \dot{e} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

由于 $\frac{a_1}{a_2} - 1 > 0$, $1 - a_2 > 0$, 因此,式(10)不存在奇异值问题。

滑模变量 s 一旦到达滑模面 $s = 0$ 之后,式(9)等效为以下快速终端滑模^[14]:

$$s = \dot{e} + \bar{k}_1 \text{sig}^{\bar{a}_1} e + \bar{k}_2 \text{sig}^{\bar{a}_2} e \quad (11)$$

其中, $\bar{k}_1 = k_1$, $\bar{a}_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $\bar{k}_2 = (\frac{2 - a_2}{k_2})^{\frac{1}{2-a_2}}$, $\bar{a}_2 = \frac{a_1}{a_2(2 - a_2)}$, $\text{sig}^{\bar{a}_1} e = |e|^{\bar{a}_1} \text{sgn}(e)$, $\text{sig}^{\bar{a}_2} e = |e|^{\bar{a}_2} \text{sgn}(e)$ 。

此时,式(11)表示为

$$\dot{e} = -\bar{k}_1 \text{sig}^{\bar{a}_1} e - \bar{k}_2 \text{sig}^{\bar{a}_2} e \quad (12)$$

为说明系统状态误差 e 、 $\dot{e}$ 在滑动模态时固定时间收敛,选取李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} e^2 \quad (13)$$

对其求导,得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e(-\bar{k}_1 \text{sig}^{\bar{a}_1} e - \bar{k}_2 \text{sig}^{\bar{a}_2} e) \\ &= -\bar{k}_1 |e|^{\bar{a}_1+1} - \bar{k}_2 |e|^{\bar{a}_2+1} \\ &= -2^{\frac{\bar{a}_1+1}{2}} \bar{k}_1 \left| \frac{1}{2} e^2 \right|^{\frac{\bar{a}_1+1}{2}} - 2^{\frac{\bar{a}_2+1}{2}} \bar{k}_2 \left| \frac{1}{2} e^2 \right|^{\frac{\bar{a}_2+1}{2}} \end{aligned}$$

$$= -2^{\frac{\bar{a}_1+1}{2}} \bar{k}_1 |V_1|^{\frac{\bar{a}_1+1}{2}} - 2^{\frac{\bar{a}_2+1}{2}} \bar{k}_2 |V_1|^{\frac{\bar{a}_2+1}{2}} \quad (14)$$

根据引理 1 和式(12),式(14)的系统状态误差 e 、 $\dot{e}$ 固定时间收敛,收敛时间上界满足:

$$T_s = \frac{1}{2^{\frac{\bar{a}_1+1}{2}}} \frac{2}{\bar{k}_1(\bar{a}_1-1)} + \frac{1}{2^{\frac{\bar{a}_2+1}{2}}} \frac{2}{\bar{k}_2(1-\bar{a}_2)} \quad (15)$$

2.2 控制律设计

设计固定时间自适应控制律 u 为

$$u = -\frac{1}{b} \left(k_1 \frac{a_1}{a_2} |e|^{\frac{a_1}{a_2}-1} \left(\frac{\phi}{k_1} + \dot{e} \right) - \ddot{x}_d + \alpha \text{sig}^{\gamma_1} s + \beta \text{sig}^{\gamma_2} s + \hat{F} \text{sgn}(s) + \hat{D} \text{sgn}(s) \right) \quad (16)$$

其中, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma_1 > 1, 0 < \gamma_2 < 1, \hat{F}, \hat{D}$ 分别为 F, D 的估计值, ϕ 是辅助函数,表示为

$$\phi = \frac{1}{k_2} \text{sig}^{a_2}(\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}(e)) + \frac{k_1}{2-a_2} (\dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}(e)) \quad (17)$$

自适应更新律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{F}} &= \frac{1}{\theta_0 c_1} (g |s| - p_1 \hat{F}) \\ \dot{\hat{D}} &= \frac{1}{\theta_0 c_2} (g |s| - p_2 \hat{D}) \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $p_1 > 0, p_2 > 0, c_1 = \frac{(2\theta_1-1)p_1}{2\theta_1}, c_2 = \frac{(2\theta_2-1)p_2}{2\theta_2}, g = k_2 | \dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}(e) |^{1-a_2}, \theta_0 > 0$ 满足 $(\frac{1}{2}\theta_0)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \frac{1}{2}\theta_0 - 1 = 0$ 。

把式(8)代入式(10),得到:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= g \left(\frac{a_1}{a_2} |e|^{\frac{a_1}{a_2}-1} \phi + f + d - \ddot{x}_d \right. \\ &\quad \left. + k_1 \frac{a_1}{a_2} |e|^{\frac{a_1}{a_2}-1} \dot{e} + bu \right) - \frac{a_1}{a_2} |e|^{\frac{a_1}{a_2}-1} k_1 s \end{aligned} \quad (19)$$

在控制律 u 的设计过程中,辅助函数 ϕ 能够避免 $k_2 | \dot{e} + k_1 \text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}(e) |^{1-a_2}$ 的倒数可能带来的奇异值问题。

3 稳定性证明

引理 2^[15] 若 $\alpha > 1$, 则以下不等式成立:

$$N^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^2 \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \sum_{i=1}^N |y_i|^{\alpha+1} \quad (20)$$

若 $\beta < 1$, 则以下不等式成立:

$$\left(\sum_{i=1}^N |y_i|^2 \right)^{\frac{1+\beta}{2}} \leq \sum_{i=1}^N |y_i|^{\beta+1} \quad (21)$$

其中, N 是正整数, $y_i > 0$ 。

引理 3^[16] 针对系统 $\dot{x} = w(x)$, 存在一个连续函数 $V(x)$, 标量 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \gamma_1 > 1, 0 < \gamma_2 < 1, 0 < \eta < \infty, \dot{V} \leq -\alpha_1 V^{\gamma_1} - \alpha_2 V^{\gamma_2} + \eta$, 则系统 $\dot{x} = w(x)$ 的轨迹固定时间收敛,收敛域为

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T} V(x) \leq \min \left\{ \left(\frac{\eta}{(1-\kappa)\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \left(\frac{\eta}{(1-\kappa)\alpha_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \right\} \right\},$$

其中 $0 < \kappa < 1$, 收敛时间 T 满足:

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\gamma_1 - 1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{1 - \gamma_2}.$$

引理 4 假设 $w(x) = x^p - px$ 是连续函数,变量 $x > 0$, 常数 $p \in (1, 2)$, 则不等式 $x^p - px \geq 1 - p$ 成立。

证明 对 $w(x)$ 求导,得到:

$$\dot{w}(x) = px^{p-1} - p \quad (22)$$

对 $\dot{w}(x)$ 求导,得:

$$\ddot{w}(x) = p(p-1)x^{p-2} \quad (23)$$

由式(22)和式(23)可知,当 $x = 1$ 时, $w(x)$ 存在最小值,即

$$w(x) \geq w(1) \quad (24)$$

且

$$x^p - px \geq 1 - p \quad (25)$$

证明结束。

定理 1 针对两旋翼飞行器控制系统式(3), 在固定时间终端滑模式(9),控制律式(16),自适应更新律式(18)作用下,所有信号最终一致有界,滑模变量 s 、系统姿态角误差 e 和角速度误差 $\dot{e}$ 能够在固定时间内收敛至平衡点附近邻域。

证明 选取李雅普诺夫函数

$$V_2 = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 + \frac{1}{2}\theta_0 c_2 \tilde{D}^2 \quad (26)$$

其中, $\bar{F} = F - \hat{F}, \tilde{D} = D - \hat{D}$ 。

对式(26)求导,得:

$$\dot{V}_2 = s\dot{s} + \theta_0 c_1 \bar{F} \dot{\bar{F}} + \theta_0 c_2 \tilde{D} \dot{\tilde{D}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq gs \left(\frac{a_1}{a_2} |e| \frac{a_1}{a_2-1} \phi + f + d - \ddot{x}_d \right. \\
&\quad \left. + k_1 \frac{a_1}{a_2} |e| \frac{a_1}{a_2-1} \dot{e} + bu \right) + \theta_0 c_1 \bar{F} \dot{\bar{F}} + \theta_0 c_2 \bar{D} \dot{\bar{D}} \\
&\leq gs \left(\frac{a_1}{a_2} |e| \frac{a_1}{a_2-1} \phi - \ddot{x}_d + k_1 \frac{a_1}{a_2} |e| \frac{a_1}{a_2-1} \dot{e} \right. \\
&\quad \left. + bu + F \operatorname{sgn}(s) + D \operatorname{sgn}(s) \right) + \theta_0 c_1 \bar{F} \dot{\bar{F}} \\
&\quad + \theta_0 c_2 \bar{D} \dot{\bar{D}} \quad (27)
\end{aligned}$$

把式(16)代入式(27),得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq -2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} g\alpha \left| \frac{1}{2}s^2 \right|^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - 2^{\frac{\gamma_2+1}{2}} g\beta \left| \frac{1}{2}s^2 \right|^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad + gs(F - \hat{F}) \operatorname{sgn}(s) + gs(D - \hat{D}) \operatorname{sgn}(s) \\
&\quad - \theta_0 c_1 \bar{F} \dot{\hat{F}} - \theta_0 c_2 \bar{D} \dot{\hat{D}} \quad (28)
\end{aligned}$$

令 $\eta_3 = \min\{2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} g\alpha, 1\}$, $\eta_2 = \min\{2^{\frac{\gamma_2+1}{2}} g\beta, 1\}$ 。根据引理2,式(28)改写为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq - (3^{\frac{1-\gamma_1}{2}} \eta_3 V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2 V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad + \bar{F}(g|s| - \theta_0 c_1 \dot{\hat{F}}) + \bar{D}(g|s| - \theta_0 c_2 \dot{\hat{D}}) \quad (29)
\end{aligned}$$

把式(18)代入式(29),得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq - (3^{\frac{1-\gamma_1}{2}} \eta_3 V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2 V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad + p_1 \bar{F} \hat{F} + p_2 \bar{D} \hat{D} \quad (30)
\end{aligned}$$

根据杨不等式,以下不等式成立:

$$p_1 \bar{F} \hat{F} \leq \frac{p_1(1-2\theta_1)\bar{F}^2}{2\theta_1} + \frac{p_1\theta_1 F^2}{2} \quad (31)$$

$$p_2 \bar{D} \hat{D} \leq \frac{p_2(1-2\theta_2)\bar{D}^2}{2\theta_2} + \frac{p_2\theta_2 D^2}{2} \quad (32)$$

其中, $\theta_1 > \frac{1}{2}$, $\theta_2 > \frac{1}{2}$ 。

设 $\eta_1 = 3^{\frac{1-\gamma_1}{2}} \eta_3$, 把式(31)和式(32)代入式(30),得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq - (\eta_1 V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2 V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) + \frac{p_1\theta_1 F^2}{2} + \frac{p_2\theta_2 D^2}{2} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}c_1\theta_0 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}c_1\theta_0 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}c_2\theta_0 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}c_2\theta_0 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\theta_0 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} c_1 \bar{F}^2 - \left(\frac{1}{2}\theta_0 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} c_2 \bar{D}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 - \frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \quad (33)
\end{aligned}$$

其中, $c_1 = \frac{(2\theta_1-1)p_1}{2\theta_1}$, $c_2 = \frac{(2\theta_2-1)p_2}{2\theta_2}$, θ_0 满足 $\left(\frac{1}{2}\theta_0 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \frac{1}{2}\theta_0 - 1 = 0$ 。

式(33)的 $\left(\frac{1}{2}c_1\theta_0 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}c_2\theta_0 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\theta_0 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} c_1 \bar{F}^2 - \left(\frac{1}{2}\theta_0 \right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} c_2 \bar{D}^2$, 当 $c_1 \bar{F}^2 \geq 1$ 时, 则 $(c_1 \bar{F}^2)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - c_1 \bar{F}^2 \leq 0$ 。当 $0 < c_1 \bar{F}^2 < 1$, $c_1 \bar{F}^2 = \left(\frac{2}{\gamma_2+1} \right)^{\frac{2}{\gamma_2-1}}$ 时, $(c_1 \bar{F}^2)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - c_1 \bar{F}^2$ 有最大值 $v_0 = \left(\frac{2}{\gamma_2+1} \right)^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}} - \left(\frac{2}{\gamma_2+1} \right)^{\frac{2}{\gamma_2-1}}$, 即

$$0 < (c_1 \bar{F}^2)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - c_1 \bar{F}^2 < v_0 \quad (34)$$

综合 $c_1 \bar{F}^2 \geq 1$ 和 $0 < c_1 \bar{F}^2 < 1$ 的讨论, 得 $(c_1 \bar{F}^2)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - c_1 \bar{F}^2 < v_0$ 。

同理, $(c_2 \bar{D}^2)^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - c_2 \bar{D}^2 < v_0$ 。

则式(33)转化为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq - (\eta_1 V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2 V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 \right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \frac{1}{2}\theta_0 c_1 \bar{F}^2 - \frac{1}{2}\theta_0 c_2 \bar{D}^2 + v_1 \quad (35)
\end{aligned}$$

其中, $v_1 = 2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)^{\frac{\gamma_2+1}{2}}v_0 + \frac{p_1\theta_1F^2}{2} + \frac{p_2\theta_2D^2}{2}$ 。

针对式(35)的 $\left(\frac{1}{2}\theta_0c_1\tilde{F}^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0c_2\tilde{D}^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \frac{1}{2}\theta_0c_1\tilde{F}^2 - \frac{1}{2}\theta_0c_2\tilde{D}^2$, 分情况 1 和情况 2 讨论, ξ 表示 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{D}$ 取值。

情况 1 当 $\xi \leq \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta_0c_1}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta_0c_2}}\right\}$, 以下不等式成立。

$$\left(\frac{1}{2}\theta_0c_1\tilde{F}^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \frac{1}{2}\theta_0c_1\tilde{F}^2 \leq 0 \quad (36)$$

$$\left(\frac{1}{2}\theta_0c_2\tilde{D}^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \frac{1}{2}\theta_0c_2\tilde{D}^2 \leq 0 \quad (37)$$

把式(36)和式(37)代入式(35), 得

$$\dot{V}_2 \leq -(\eta_1V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) + v_1 \quad (38)$$

情况 2 当 $\xi > \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta_0c_1}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta_0c_2}}\right\}$, 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\theta_0c_1\tilde{F}^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\theta_0c_2\tilde{D}^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \frac{1}{2}\theta_0c_1\tilde{F}^2 - \frac{1}{2}\theta_0c_2\tilde{D}^2 \\ &\leq 2\left(\frac{1}{2}\theta_0c_{\max}\xi^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - 2\left(\frac{1}{2}\theta_0c_{\max}\xi^2\right) \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $c_{\max} = \max\{c_1, c_2\}$ 。

把式(39)代入式(38), 得:

$$\dot{V}_2 \leq -(\eta_1V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) + v_2 \quad (40)$$

其中, $v_2 = v_1 + 2\left(\frac{1}{2}\theta_0c_{\max}\xi^2\right)^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - 2\left(\frac{1}{2}\theta_0c_{\max}\xi^2\right)$ 。

综合情况 1 和情况 2, $\dot{V}_2$ 可表示为

$$\dot{V}_2 \leq -(\eta_1V_2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} + \eta_2V_2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}) + v \quad (41)$$

其中

$$v = \begin{cases} v_1 & \xi \leq \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta_0c_1}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta_0c_2}}\right\} \\ v_2 & \xi > \min\left\{\frac{1}{\sqrt{\theta_0c_1}}, \frac{1}{\sqrt{\theta_0c_2}}\right\} \end{cases}。$$

根据引理 3, 滑模变量 s 在趋近模态时的收敛时间上界为

$$T_r = \frac{2}{\eta_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{2}{\eta_2(1 - \gamma_2)} \quad (42)$$

且滑模变量 s 固定时间收敛于平衡点附近邻域 Δs :

$$\Delta s = \sqrt{2} \cdot \min\left\{\left(\frac{v}{(1 - \kappa)\eta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1+1}}, \left(\frac{v}{(1 - \kappa)\eta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2+1}}\right\} \quad (43)$$

把式(43)代入式(9), 得:

$$\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e + \frac{k_2}{2 - a_2}\text{sig}^{2-a_2}(\dot{e} + k_1\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e) = \varepsilon \quad (44)$$

其中, $|\varepsilon| \leq \Delta s$ 。

由式(44)可知, 当 $\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e$ 和 $\frac{k_2}{2 - a_2}\text{sig}^{2-a_2}(\dot{e} +$

$k_1\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e)$ 同为正或负时, $|\varepsilon|$ 能够获得最大值。

根据引理 4, 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} &(\dot{e} + k_1\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e)^{2-a_2} - (2 - a_2) \cdot (\dot{e} + k_1\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e) \\ &\geq 1 - (2 - a_2) \end{aligned} \quad (45)$$

式(45)左右都乘以 $\frac{k_2}{2 - a_2}$, 移项可得:

$$\begin{aligned} &\frac{k_2}{2 - a_2}(\dot{e} + k_1\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e)^{2-a_2} \\ &\geq k_2\dot{e} + k_1k_2\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e + \frac{k_2(a_2 - 1)}{2 - a_2} \end{aligned} \quad (46)$$

把式(46)代入式(44), 得到:

$$\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e + k_2\dot{e} + k_1k_2\text{sig}^{\frac{a_1}{a_2}}e = \bar{\varepsilon} + \frac{k_2(1 - a_2)}{2 - a_2} \quad (47)$$

其中, $|\bar{\varepsilon}| \leq |\varepsilon| \leq \Delta s$ 。

从式(47)可得, 姿态角误差收敛于以下邻域:

$$|e| \leq \left(\frac{\bar{\Delta}s}{1 + k_1k_2}\right)^{\frac{a_2}{a_1}} \quad (48)$$

姿态角角速度误差收敛于以下邻域:

$$|\dot{e}| \leq \frac{2\bar{\Delta}s}{k_2} \quad (49)$$

其中, $\bar{\Delta}s = \Delta s + \frac{k_2(1 - a_2)}{2 - a_2}$ 。

综合上述分析, 由式(41)保证 s 、 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{D}$ 最终一致有界。由于 D 、 F 有界性, $\hat{F}$ 、 $\hat{D}$ 最终一致有界, 由式(48)和式(49)得 e 、 $\dot{e}$ 最终一致有界。由式(16)和式(17), 得 u 和 ϕ 也最终一致有界。根据式(41)~(43), 滑模变量 s 固定时间收敛于平衡点附近邻域 Δs 。根据式(44)~(49), 姿态角度误差 e 和角速度误差 $\dot{e}$ 固定时间收敛于平衡点附近邻域, 系统收

敛时间为

$$\begin{aligned}
T &< T_r + T_s \\
&= \frac{2}{\eta_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{2}{\eta_2(1 - \gamma_2)} \\
&\quad + \frac{1}{2^{\frac{\bar{a}_1+1}{2}}} \frac{2}{\bar{k}_1(\bar{a}_1 - 1)} + \frac{1}{2^{\frac{\bar{a}_2+1}{2}}} \frac{2}{\bar{k}_2(1 - \bar{a}_2)}
\end{aligned} \tag{50}$$

误差平稳性的方差指标(integrated square error, IS-DE), $ISDE = \int (e(t) - e_0(t))^2 d(t)$, 用于衡量跟踪误差 $e(t)$ 围绕 $e_0(t)$ 的波动程度;控制信号效果的绝对值均值指标(integrated absolute control, IAU), $IAU = \int |u(t)| d(t)$;控制信号的方差指标(inte-grated square control, ISDU), $ISDU = \int (u(t) - u_0(t))^2 d(t)$, 用于衡量控制信号 $u(t)$ 围绕 $u_0(t)$ 的波动程度。

方法 1 的滑模面为式(9),控制律为式(16),自适应更新律为式(18)。

方法 2 的滑模面为

$$s = \dot{e} + k_1 e + \bar{k}_2 \psi(e) \tag{51}$$

其中, $k_1 > 0, \bar{k}_2 > 0$,

$$\psi(e) = \begin{cases} |e|^{\bar{a}_2} \text{sgn}(e) & s = 0 \text{ 或 } s \neq 0, |e| > \mu \\ l_1 e + l_2 |e|^2 \text{sgn}(e) & s \neq 0, |e| \leq \mu \end{cases} \tag{52}$$

其中, $0 < \bar{a}_2 < 1, \bar{a}_2 = \frac{p}{q}, q > p, p$ 和 q 是互质正奇数, μ 是一个充分小有界正常数, $l_1 = (2 - \bar{a}_2) \mu^{\bar{a}_2-1}, l_2 = (\bar{a}_2 - 1) \mu^{\bar{a}_2-1}$ 。

控制律设计为

$$u = -\frac{1}{b} (k_1 \dot{e} + k_2 \psi(e) - \ddot{x}_d + \alpha s + \beta \text{sig}^{\gamma_2} s + \hat{F} \text{sgn}(s) + \hat{D} \text{sgn}(s)) \tag{53}$$

其中, $\alpha > 0, \beta > 0$,

$$\psi(e) = \begin{cases} \bar{a}_2 |e|^{\bar{a}_2-1} \dot{e} & s = 0 \text{ 或 } s \neq 0, |e| > \mu \\ l_1 \dot{e} + 2l_2 |e| \dot{e} & s \neq 0, |e| \leq \mu \end{cases} \tag{54}$$

其中 μ 取 0.1, $\hat{F}, \hat{D}$ 自适应更新律同方法 1。

4.3 正弦波跟踪实验

该实验的控制参数如表 1, $\hat{F}_0, \hat{D}_0$ 为 $\hat{F}, \hat{D}$ 初始值,分别为 $10^\circ/\text{s}^2$ 和 $10^\circ/\text{s}^2$,姿态角 x_1 和角速度 x_2 初始值分别为 0° 和 $0^\circ/\text{s}$,参考轨迹为 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 。图 3 显示 2 种控制方法的跟踪轨迹,图 4 为姿态角跟踪误差,图 5 是控制输入信号。由图 3~图 5 可看出,相比方法 2,方法 1 的姿态角

x_1 收敛速度更快和跟踪误差 e 更小。参考轨迹 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 下的估计值 $\hat{D}$ 如图 6 所示,估计值 $\hat{D}$ 有界。表 2 是衡量跟踪性能的 4 种性能指标,由表 2 可知,方法 1 的 IAE、ISDE 和 ISDU 较小,2 种方法的 IAU 近似。因此,方法 1 具有较好的跟踪性能。

表 1 正弦波跟踪实验的控制参数					
参数	数值	参数	数值	参数	数值
k_1	7.0	α	0.08	θ_1	0.6
k_2	0.045	β	0.08	θ_2	0.6
$\bar{k}_2$	7.0	γ_1	$\frac{21.0}{17.0}$	p_1	0.8
a_1	$\frac{1.0}{11.0}$	γ_2	$\frac{11.0}{17.0}$	p_2	0.8
a_2	$\frac{1.0}{15.0}$	b	14.85		
$\bar{a}_2$	$\frac{225.0}{319.0}$				

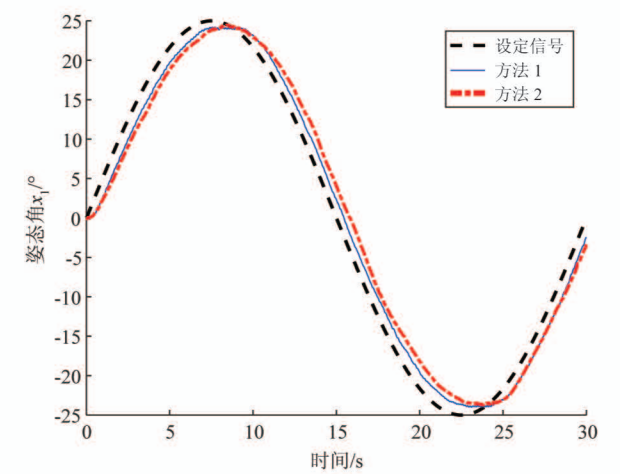


图 3 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 的跟踪轨迹

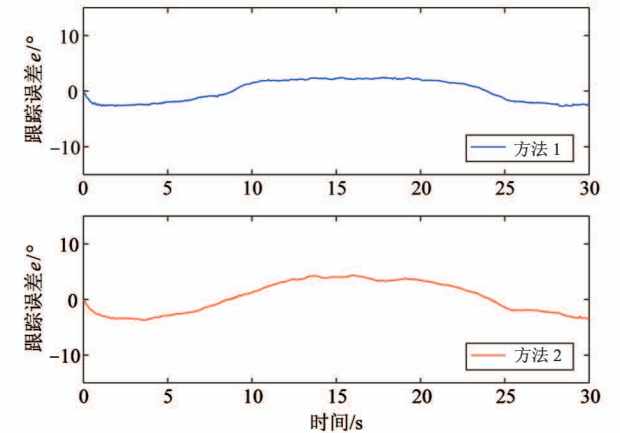


图 4 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 的跟踪误差

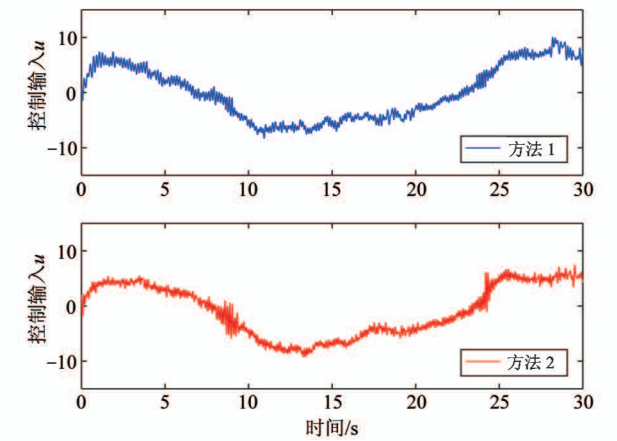


图5 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 的控制信号

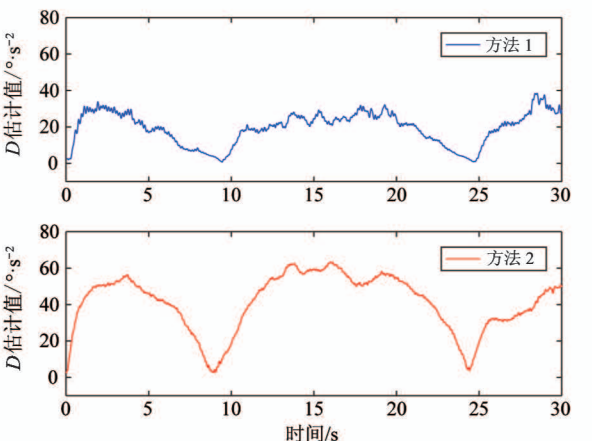


图6 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 的 D 估计值

表2 参考轨迹为 $x_d = 25\sin(2\pi t/30)$ 的4种性能指标

	IAE	ISDE	IAU	ISDU
方法1	55.75	0.31	130.77	13.95
方法2	78.41	0.48	130.08	14.45

为进一步验证所提控制方法的跟踪性能,设计参考轨迹为 $x_d = A\sin(2\pi t/30)$, 其中幅值 $A = 10 \sim 50^\circ$, 系统状态初始值同上, 进行实验对比, IAE 的比较结果见表3。从表3中可知, 方法1比方法2具有更小的 IAE, 随着幅值 A 增大, 这种优势更明显。

4.4 矩形波跟踪实验

为验证所提控制方法的瞬态性能, 设计幅值分别为 15° 和 25° 的矩形波作为实验的参考轨迹, 系统状态 $t = 0$ 时刻的初始值同正弦波跟踪实验, 根据表4选取系统控制参数。图7和图8分别为矩形波幅值 15° 和 25° 时的姿态角跟踪轨迹。图7和图8表明随着参考信号的幅值变化, 方法2姿态角 x_1 相应的收敛时间从 3.5 s 到 8.1 s 变化, 与系统初始状态有关, 而方法1姿态角 x_1 的收敛时间上界基本不变, 与系统状态初始值无关, 可实现姿态角 x_1 的固

表3 参考轨迹为 $x_d = A\sin(2\pi t/30)$ 的 IAE 跟踪性能指标

幅值/ $^\circ$	$A = 10$	$A = 15$	$A = 20$	$A = 25$	$A = 30$	$A = 40$	$A = 50$
方法1	27.30	38.91	47.10	55.75	59.53	71.17	83.19
方法2	28.63	42.69	58.79	78.41	82.27	129.31	164.66

表4 矩形波跟踪实验的控制参数

参数	数值	参数	数值	参数	数值
k_1	3.0	α	0.023	θ_1	0.6
k_2	0.295	β	0.023	θ_2	0.6
$\bar{k}_2$	3.0	γ_1	$\frac{21.0}{17.0}$	p_1	0.4
a_1	$\frac{13.0}{19.0}$	γ_2	$\frac{11.0}{17.0}$	p_2	0.4
a_2	$\frac{13.0}{23.0}$	b	14.85		
$\bar{a}_2$	$\frac{529.0}{627.0}$				

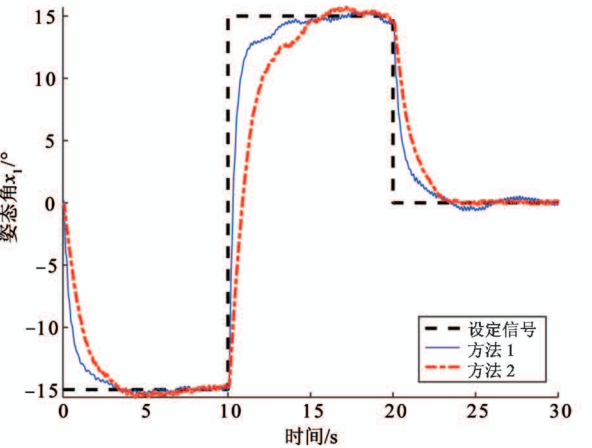


图7 幅值 15° 矩形波的跟踪轨迹

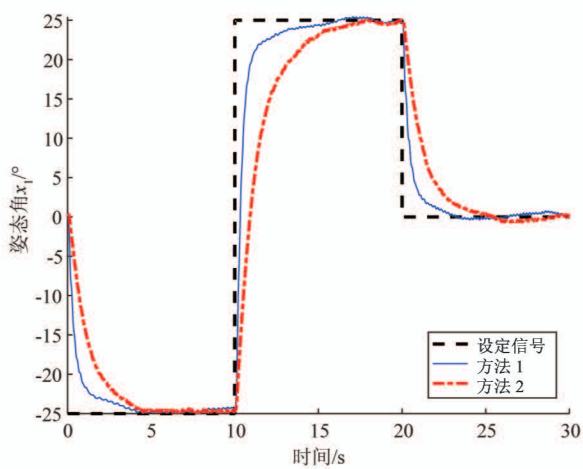


图 8 幅值 25° 矩形波的跟踪轨迹

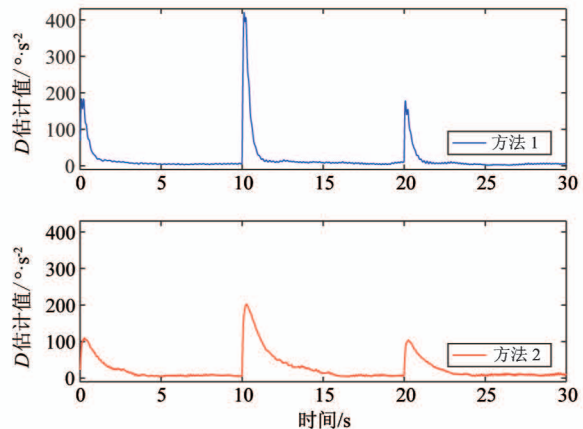


图 9 幅值 15° 矩形波的 D 估计值

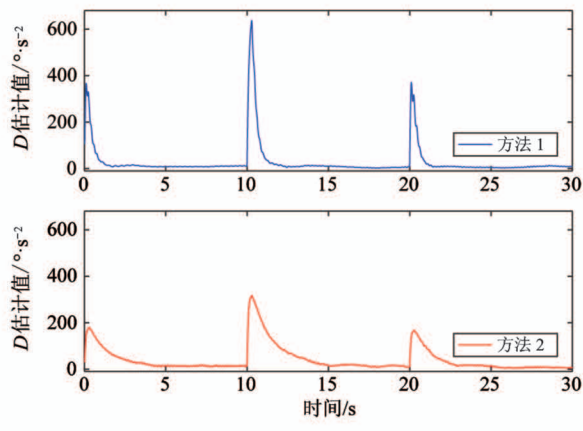


图 10 幅值 25° 矩形波的 D 估计值

定时间收敛。图 9 和图 10 分别为矩形波幅值 15° 和 25° 时的估计值 $\hat{D}$ 。对比图 9 和图 10 可知,改变参考信号的幅值后,方法 1 与方法 2 均可保证估计值 $\hat{D}$ 的有界收敛。

5 结 论

针对两旋翼飞行器的模型不确定性和外界干扰,本文提出一种非奇异固定时间自适应的控制方法,确保滑模变量 s 和姿态角误差 e 的固定时间收敛,且收敛时间与系统状态初始值无关。通过构建辅助函数避免控制器设计中的奇异值问题,采用自适应更新律估计系统不确定性和外部干扰的上界,从而无需已知其上界的先验知识。在两旋翼飞行器实验平台上验证所提控制方法有效性,实验结果表明,该控制方法具有优越的姿态误差跟踪性能和瞬态性能。

参考文献

[1] 刘云平,陈城,吴洪涛,等. 涵道式无人机的悬停姿态控制与运动稳定性分析[J]. 高技术通讯, 2016, 26 (10-11): 867-875

[2] 雷伊娉,李学恒,雷静,等. 基于无人机平台的海域监管关键技术及其应用[J]. 海洋开发与管理, 2019, 36 (12): 77-80

[3] 崔恺,曾国奇,林伟,等. 一种基于图论的机场空域无人机流量控制方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2020, 46(5): 978-987

[4] Rys A, Czyba R, Szafranski G. Development of control system for an unmanned single tilt tri-rotor aerial vehicle [C]//2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, Orlando, USA, 2014:1091-1098

[5] Chen F Y, Jiang R Q, Zhang K K, et al. Robust backstepping sliding mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(8): 5044-5056

[6] 鲜斌,查君浩. 倾转式三旋翼无人飞行器抗扰非线性控制设计[J]. 控制与决策, 2018, 33(2): 263-268

[7] Lu K F, Xia Y Q. Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence [J]. Automatica, 2013, 49(12): 3591-3599

[8] Chen Z T, Chen Q, He X X, et al. Adaptive finite-time command filtered fault-tolerant control for uncertain spacecraft with prescribed performance[J]. Complexity, 2018(2018): 1-12

[9] Wang H P, Ye X F, Tian Y, et al. Model-free based terminal SMC of quadrotor attitude and position[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 52(5): 2519-2528

- [10] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57 (8):2106-2110
- [11] Li H J, Cai Y L. On SFTSM control with fixed-time convergence [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2017, 11 (6): 766-773
- [12] Chen Q, Xie S Z, Sun M X, et al. Adaptive nonsingular fixed-time attitude stabilization of uncertain spacecraft [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, 54 (6): 2937-2950
- [13] Tao M L, Chen Q, He X X, et al. Adaptive fixed-time-fault-tolerant control for rigid spacecraft using a double power reaching law[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29 (12): 4022-4040
- [14] Yang L, Yang J. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(16): 1865-1879
- [15] Sun M X. Two-phase attractors for finite-duration consensus of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50 (5): 1757-1765
- [16] Jiang B, Hu Q, Friswell M I. Fixed-time attitude control for rigid spacecraft with actuator saturation and faults[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 24(5):1892-1898
- [17] Chen Q, Ren X M, Na J, et al. Adaptive robust finite-time neural control of uncertain PMSM servo system with nonlinear dead zone[J]. *Neural Computing and Applications*, 2017, 28(12):3725-3736
- [18] 张贝贝, 赵东亚, 高守礼, 等. 自适应边界层非奇异快速终端滑模控制[J]. *控制工程*, 2019, 26(4):717-723
- [19] Zou A M, Kumar K D, Hou Z G, et al. Finite-time attitude tracking control for spacecraft using terminal sliding mode and Chebyshev neural network[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B(Cybernetics)*, 2011, 41(4):950-963

A non-singularity fixed-time adaptive attitude control for twin-rotor aircrafts

Shen Linwu^{***}, Chen Qiang^{*}, Tao Meiling^{*}, He Xiongxiang^{*}

(^{*} College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

(^{**} Department of Electrical and Electronic Technology, Zhejiang Institute of Mechanical
and Electrical Engineering, Hangzhou 310053)

Abstract

In this paper, a non-singular fixed-time adaptive control scheme is proposed for twin-rotor aircrafts subject to system uncertainties and external disturbances. A novel non-singular terminal sliding mode surface is constructed and a fixed-time controller is designed accordingly. The singularity problem in the controller design could be avoided through constructing an auxiliary function. The adaptive update laws are developed to estimate the upper bounds of the lumped uncertainties and external disturbances, such that the prior knowledge on the bounds is not required. The Lyapunov synthesis is provided to show that the sliding mode variable, attitude error and velocity error could converge to the neighborhood of the equilibrium within the fixed time, and the setting time is independent of initial states. Finally, the effectiveness and superiority of the proposed scheme are validated on the practical twin-rotor platform.

Key words: fixed-time control, non-singularity sliding mode surface, adaptive control, twin-rotor aircraft