

多输入单输出时变输出误差模型学习辨识算法^①

祝徐轩^② 仲国民 何熊熊

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要 本文考虑了多输入单输出(MISO)时变输出误差系统参数的估计问题。对于多输入单输出时变输出误差系统,识别的难点在于待辨识的模型参量是随着时间而变化的,尤其突变的参数更难辨识。针对这一问题,本文将辅助模型的思想应用到学习算法中,给出了基于辅助模型的迭代学习随机梯度算法和基于辅助模型的迭代学习最小二乘算法的推导过程。最后,提供了说明性的仿真实例来分析所提出的算法,仿真结果表明基于辅助模型的迭代学习最小二乘算法可以快速跟踪突变的参数,获得精准的参数估计,验证了该算法的有效性。

关键词 学习辨识;最小二乘法;随机梯度法;辅助模型;多输入单输出(MISO)系统

0 引 言

系统的建模是许多控制系统分析与设计的基础^[1],目前,对于定常系统的辨识问题已经具有较为完备的理论基础,然而实际控制系统中存在更多的是时变系统,因此,研究时变系统的辨识问题具有重要意义。

本文主要研究多输入单输出(multiple input single output, MISO)时变输出误差模型(output error model, OE)的参数辨识问题。多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)系统在诸如电气、机械、化学工程和通信工程等实际过程中具有广泛的应用^[2,4],它可以分解为多个 MISO 子系统,且一旦分别识别每个子系统,就可以获得 MIMO 系统的参数估计。因此,研究 MISO 系统的参数估计具有意义,并且大量已经开展的工作为进一步研究多输入系统奠定了基础。张余等人^[5]针对无线传感器网络中能量有限和能耗不均衡问题,提出了一种基于协同 MIMO 的无线传感器网络传输方案。Khandaker 等人^[6]研究了 MISO 多系统中的同步无线信息和

功率传输问题。

对于 MISO 定常 OE 模型的参数辨识,识别的难点之一在于识别模型中的信息矢量包含未知的中间变量。迭代搜索已被广泛应用于具有未知内部变量的系统识别^[7,8]。Liu 和 Lu^[9]为多速率系统提供了基于最小二乘的迭代识别。刘毅男等人^[10]结合迭代搜索原理和约简技术,提出了一种显著提高跟踪精度的在线自适应迭代简约最小二乘支持向量机。Jin 等人^[11]提出了一种基于辅助模型的区间变化最小二乘识别方法,用于具有稀缺测量的多变量 OE 系统辨识。Ding 等人^[12]提出了基于辅助模型的递推最小二乘辨识算法,其基本思想是将未知的内部变量替换为由辅助模型计算的估计值。该算法不仅简单还易于实现,可以获得噪声模型的参数估计,但是在处理时变系统时,不具备跟踪能力。而带遗忘因子的辅助模型递推最小二乘算法,由于在修正项中引入了遗忘因子,使其具备了跟踪时变参数的能力,但是算法在跟踪突变的时变参数时,跟踪能力有限。

学习辨识^[13,14]基于系统重复运行的特点构造

① 国家自然科学基金(61573320)资助项目。
② 男,1995 年生,硕士生;研究方向:学习辨识;联系人,E-mail: 2039440919@qq.com
(收稿日期:2019-11-13)

算法,许多学者都提出了相应的辨识方法。孙明轩和毕宏博^[13]针对有限区间上重复运行的时变系统,提出了迭代学习最小二乘算法用于系统的时变参数估计,并分析了算法的收敛性。侯忠生等人^[15]利用交通流的重复性特征,设计了基于迭代学习的辨识算法。Jia 等人^[16]提出了一种具有模型识别和动态 R 参数的集成迭代学习控制策略使零误差跟踪成为可能。

本文考虑有限区间上重复运行的多输入单输出输出误差模型,推导了迭代学习随机梯度算法和迭代学习最小二乘算法。通过系统的重复运行,在每一步迭代运行过程中,充分利用了系统的输入输出数据,仿真结果表明迭代学习最小二乘算法能够获得多输入单输出系统中时变参数的一致估计。本文其他部分组织如下,第 1 节给出了系统的定义并讨论了多输入单输出 OE 时变系统的辨识模型。第 2 节中给出了用于辨识多输入单输出时变 OE 系统基于辅助模型的随机梯度算法。第 3 节推导出基于辅助模型的迭代学习最小二乘算法。第 4 节提供了说明性的算例,用于演示所提算法的有效性。最后,在第 5 节中给出了相关结论。

1 问题描述

考虑如下多输入单输出输出误差模型描述的时变随机系统:

$$y_k(t) = \frac{1}{A(q^{-1}, t)} \sum_{i=1}^r B_i(q^{-1}, t) u_{ik}(t) + v_k(t) \quad (1)$$

式中, t 表示时间, k 表示重复次数, i 表示输入序列的排序, $u_{ik}(t)$ 表示模型第 k 次重复 t 时刻序号为 i 的系统的输入序列, $y_k(t)$ 为模型第 k 次重复 t 时刻的系统的输出序列, $v_k(t)$ 为 0 均值不相关随机噪声序列(不可测), $A(q^{-1}, t)$ 、 $B_i(q^{-1}, t)$ 分别是阶次为 n_a 、 n_b 后移位算子 q^{-1} 的多项式,具体定义如下:

$$\begin{cases} A(q^{-1}, t) = 1 + a_1(t)q^{-1} + \cdots + a_{n_a}(t)q^{-n_a} \\ B_i(q^{-1}, t) = 1 + b_{i1}(t)q^{-1} + \cdots + b_{in_b}(t)q^{-n_b} \end{cases}$$

其中 $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $\cdots$ 、 $a_{n_a}(t)$ 、 $b_{i1}(t)$ 、 $b_{i2}(t)$ 、 $\cdots$ 、 $b_{in_b}(t)$ 为未知时变参数,且对于固定的时刻,它们沿

重复轴是恒定不变的。

本文的目标是,针对重复时变系统,利用系统的输入输出数据,首先推导出一种基于辅助模型的迭代学习随机梯度算法,然后给出一种基于辅助模型的迭代学习最小二乘算法,通过仿真实例,分析 2 种学习算法的性能。在重复持续激励条件下,基于辅助模型的最小二乘学习算法可以有效提高参数估计的精度,说明了学习算法在重复时变系统参数估计方面的有效性和优越性。

2 迭代学习随机梯度算法

定义中间变量为

$$x_k(t) = \frac{1}{A(q^{-1}, t)} \sum_{i=1}^r B_i(q^{-1}, t) u_{ik}(t) \quad (2)$$

则由式(2)可得:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= (1 - A(q^{-1}, t))x_k(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r B_i(q^{-1}, t) u_{ik}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

定义信息矩阵 $\phi_k(t)$ 和待辨识参数 $\theta_k(t)$ 如下:

$$\begin{aligned} \phi_k(t) &= [-x_k(t-1), -x_k(t-2), \cdots, \\ &-x_k(t-n_a), u_{1k}(t-1), u_{1k}(t-2), \\ &\cdots, u_{1k}(t-n_b), \cdots, u_{rk}(t-1), \\ &u_{rk}(t-2), \cdots, u_{rk}(t-n_b)]^T \\ \theta_k(t) &= [a_1(t), a_2(t), \cdots, a_{n_a}(t), b_{11}(t), \\ &b_{12}(t), \cdots, b_{1n_b}(t), \cdots, b_{r1}(t), b_{r2}(t), \\ &\cdots, b_{rn_b}(t)]^T \end{aligned}$$

将式(3)代入式(1)可得:

$$y_k(t) = x_k(t) + v_k(t) = \phi_k^T(t) \theta_k(t) + v_k(t)$$

定义准则函数:

$$J_k(\theta_k(t), t) = \frac{1}{2} E\{[y_k(t) - \phi_k^T(t) \theta_k(t)]^2\}$$

基于梯度搜索原理^[17]可知,模型参数的估计值 $\hat{\theta}_k(t)$ 可以沿着输出残差平方的负梯度方向修正,即:

$$\hat{\theta}_k(t) = \hat{\theta}_{k-1}(t) - \rho(t) \underset{\theta}{grad}(J_k(\theta_k(t))) \mid \hat{\theta}_{k-1}(t)$$

则可得到模型参数的辨识算法为

$$\theta_k(t) = \theta_{k-1}(t) + \rho(t) \phi_k(t) (y_k(t) - \phi_k^T(t) \theta_k(t)) \quad (4)$$

其中, $\underset{\theta}{grad}(J_k(\theta_k(t))) \mid \hat{\theta}_{k-1}(t)$ 为准则函数的梯

度, $\rho(t)$ 为收敛因子。为了得到较快的收敛速度, 在收敛因子的选取中加入了遗忘因子, 收敛因子选取如下:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma_k(t)}, \sigma_k(t) = \lambda \sigma_{k-1}(t) + \|\boldsymbol{\phi}_k(t)\|$$

式(4)给出了模型式(1)的迭代学习随机梯度算法。然而由于信息矩阵 $\boldsymbol{\phi}_k(t)$ 中包含了系统的未知真实输出 $x_k(t-i)$, 使得该算法无法实现。为了解决这一问题, 本文借助辅助模型的思想, 将式(2)视为辅助模型, 将其输出 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$ 替代信息矩阵中的真实输出, 将替代后的信息矩阵记为 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)$, 则估计多输入单输出时变 OE 模型参数向量的迭代学习随机梯度算法表示为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)}{\sigma_k(t)}(y_k(t) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t)) \tag{5}$$

$$\sigma_k(t) = \lambda \sigma_{k-1}(t) + \|\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)\| \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) = & [-\hat{x}_k(t-1), -\hat{x}_k(t-2), \dots, \\ & -\hat{x}_k(t-n_a), u_{1k}(t-1), u_{1k}(t-2), \\ & \dots, u_{1k}(t-n_b), \dots, u_{rk}(t-1), \\ & u_{rk}(t-2), \dots, u_{rk}(t-n_b)]^T \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_k(t) = & [a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n_a}(t), b_{11}(t), \\ & b_{12}(t), \dots, b_{1n_b}(t), \dots, b_{r1}(t), b_{r2}(t), \\ & \dots, b_{rn_b}(t)]^T \end{aligned} \tag{8}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \tag{9}$$

多输入单输出 OE 模型的迭代学习随机梯度算法的具体实现步骤如算法 1 所示。

算法 1 基于辅助模型的迭代学习随机梯度算法	
输入:	重复激励的一组数列
输出:	输出向量为 $\mathbf{y}_k(t)$
1.	对于所有的 $t = 0, 1, \dots, N$, 给定参数估计初始值 $\theta_{-1}(t)$, 迭代所需 $\sigma_0(t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_0(t)$ 的值, 并置 $k = 0$; 在第 k 次重复运行时, 采集输入输出数据 $u_{ik}(t)$ 和 $\mathbf{y}_k(t)$ 。
2.	While $k < 101$ do
3.	for each $t \in [0, N]$ do
4.	用式(7)构造 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)$, 用式(5)计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$
5.	用式(9)刷新 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$, 用式(6)刷新 $\sigma_k(t)$
6.	end
7.	end

3 迭代学习最小二乘算法

本节推导了基于辅助模型的迭代学习最小二乘算法。定义堆积输出向量 $\mathbf{Y}_k(t)$ 、堆积信息矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_k(t)$ 和白噪声向量 $\mathbf{V}_k(t)$ 如下:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_k(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_k(t)]^T \\ \boldsymbol{\Phi}_k(t) = [\boldsymbol{\phi}_0(t), \boldsymbol{\phi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_k(t)]^T \\ \mathbf{V}_k(t) = [v_0(t), v_1(t), \dots, v_k(t)]^T \end{cases}$$

则可将表示 k 次重复运行的时变系统表示为

$$\mathbf{Y}_k(t) = \boldsymbol{\Phi}_k(t) \boldsymbol{\theta}_k(t) + \mathbf{V}_k(t)$$

给出以下准则函数:

$$J_k(\boldsymbol{\theta}_k(t), t) = \frac{1}{2} E\{[\mathbf{Y}_k(t) - \boldsymbol{\Phi}_k(t) \boldsymbol{\theta}_k(t)]^2\}$$

当 $\boldsymbol{\Phi}_k^T(t) \boldsymbol{\Phi}_k(t)$ 可逆时, 极小化准则函数则可得对于该时变模型的最小二乘估计为

$$\boldsymbol{\theta}_k(t) = (\boldsymbol{\Phi}_k^T(t) \boldsymbol{\Phi}_k(t))^{-1} \boldsymbol{\Phi}_k^T(t) \mathbf{Y}_k(t) \tag{10}$$

然而, 由于信息矩阵 $\boldsymbol{\phi}_k(t)$ 中包含了系统的未知真实输出 $x_k(t-i)$, 使得算法无法实现。为了解决这个问题, 借助辅助模型的思想, 对于信息矩阵中的未知项 $x_k(t)$, 可以用其估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$ 来替代。 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$ 定义为系统辅助模型的输出, 辅助模型的定义为

$$\hat{\mathbf{x}}_k(t) = \boldsymbol{\varphi}_k^T(t) \boldsymbol{\theta}_k(t)$$

则替代后的信息向量记为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) = & [-\hat{x}_k(t-1), -\hat{x}_k(t-2), \dots, \\ & -\hat{x}_k(t-n_a), u_{1k}(t-1), u_{1k}(t-2), \\ & \dots, u_{1k}(t-n_b), \dots, u_{rk}(t-1), \\ & u_{rk}(t-2), \dots, u_{rk}(t-n_b)]^T \end{aligned}$$

替代后的堆积信息矩阵记为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k(t) = [\hat{\boldsymbol{\phi}}_0(t), \hat{\boldsymbol{\phi}}_1(t), \dots, \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)]^T$$

得到对于多输入单输出时变 OE 模型的最小二乘算法为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = (\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k^T(t) \hat{\boldsymbol{\Phi}}_k(t))^{-1} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_k^T(t) \mathbf{Y}_k(t)$$

显然该最小二乘估计需要完成对矩阵的求逆运算, 为了回避对矩阵的求逆运算, 定义:

$$\mathbf{P}_k^{-1}(t) = \boldsymbol{\Phi}_k^T(t) \boldsymbol{\Phi}_k(t)$$

利用矩阵的求逆公式, 可得到 $\mathbf{P}_k(t)$ 的关系如下:

$$\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{P}_{k-1}(t) - \frac{\mathbf{P}_{k-1}(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \mathbf{P}_{k-1}(t)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \mathbf{P}_{k-1}(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)}$$

则可以得到对多输入单输出时变 OE 模型的迭代学习最小二乘算法如下:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \frac{\mathbf{P}_{k-1}(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \mathbf{P}_{k-1}(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)} (y_k(t) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t)) \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{P}_{k-1}(t) - \frac{\mathbf{P}_{k-1}(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \mathbf{P}_{k-1}(t)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \mathbf{P}_{k-1}(t) \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)} \quad (12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) = [-\hat{x}_k(t-1), -\hat{x}_k(t-2), \dots, -\hat{x}_k(t-n_a), u_{1k}(t-1), u_{1k}(t-2), \dots, u_{1k}(t-n_b), \dots, u_{rk}(t-1), u_{rk}(t-2), \dots, u_{rk}(t-n_b)]^T \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k(t) = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n_a}(t), b_{11}(t), b_{12}(t), \dots, b_{1n_b}(t), \dots, b_{r1}(t), b_{r2}(t), \dots, b_{rn_b}(t)]^T \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \quad (15)$$

多输入单输出 OE 模型的辅助模型迭代学习最小二乘算法的具体实现步骤如算法 2 所示。

算法 2 基于辅助模型的迭代学习最小二乘算法

输入:重复激励的一组数列

输出:堆积的输出向量 $\mathbf{Y}_k(t)$

1. 对于所有的 $t = 0, 1, \dots, N$, 给定参数估计初始值 $\boldsymbol{\theta}_{-1}(t)$, 迭代所需 $\mathbf{P}_{-1}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_0(t)$ 的值, 并置 $k = 0$; 在第 k 次重复运行时, 采集输入输出数据 $u_{ik}(t)$ 和 $y_k(t)$ 。
2. While $k < 101$ do
3. for each $t \in [0, N]$ do
4. 用式(13)构造 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)$, 用式(11)计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$
5. 用式(15)刷新 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$, 用式(12)刷新 $\mathbf{P}_k(t)$
6. end
7. end

从上述的算法步骤可知, 迭代学习最小二乘算法通过系统的重复运行, 将收集的数据储存起来迭代计算, 是在线的辨识算法。对于固定时刻 t , 它是一个随 k 增加的递阶计算过程, 在计算参数估计时需要用到辅助模型的输出 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$, 而在计算辅助模

型 $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$ 的时候又需要用到参数估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$ 。仿真研究表明, 迭代学习最小二乘算法具有很快的收敛速度, 只需要迭代几步便可得到该时刻参数的一致估计。

4 算法仿真

本节完成数值算例, 通过与带遗忘因子辅助模型递推广义算法比较来说明迭代学习最小二乘算法对参数估计的准确性, 为了方便说明和比较, 以下介绍带遗忘因子的辅助模型递推最小二乘算法。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t) [Y(t) - \boldsymbol{\Phi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)]$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1) \hat{\boldsymbol{\Phi}}(t) \hat{\boldsymbol{\Phi}}^T(t) \mathbf{P}(t-1)}{\hat{\boldsymbol{\Phi}}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \hat{\boldsymbol{\Phi}}(t) + \lambda}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\boldsymbol{\phi}^T(t) \quad \boldsymbol{\phi}^T(t-1) \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}^T(t-p+1)]^T$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = [\boldsymbol{\psi}(t) \quad \boldsymbol{\psi}_u(t)]^T$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = [-x_a(t-1), -x_a(t-2), \dots, -x_a(t-n)]^T$$

$$\boldsymbol{\psi}_u(t) = [u_1(t), \dots, u_1(t-n), \dots, u_r(t), \dots, u_r(t-n)]^T$$

$$x_a(t) = \boldsymbol{\phi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ 是待辨识参数 $\boldsymbol{\theta}$ 在 t 时刻的辨识结果, $x_a(t)$ 辅助模型, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是信息矩阵, 输入信息矩阵 $\boldsymbol{\psi}_u(t)$ 已知, $\boldsymbol{\psi}(t)$ 则由计算可得。

考虑如下有限区间重复时变系统:

$$y_k(t) = \frac{1}{1 + a_1(t)q^{-1} + a_2(t)q^{-2}} ((1 + b_{11}(t)q^{-1} + b_{12}(t)q^{-2})u_{1k}(t) + (1 + b_{21}(t)q^{-1} + b_{22}(t)q^{-2})u_{2k}(t)) + v_k(t)$$

其中,

$$a_1(t) = 1.5^{\sin(1000/t)} - 1$$

$$a_2(t) = 0.6 - 0.4 \cdot \sin(\pi / |t - 60.5|)$$

$$b_{11}(t) = -(0.3 + 0.1 \cdot \sqrt{0.3 \cdot t + 6})$$

$$b_{12}(t) = \log 0.1 + 1.4 \cdot |\cos(30 \cdot \pi / t)| + 0.1 b_{21}(t) = 0.01 \cdot t \cdot \log(50/t)$$

$$b_{22}(t) = -1.5 + 0.5 \cdot (1.5 \cdot t + 130)^{1/4}$$

仿真时, 取 $n = 100$ 。 $u_k(t)$ 取值为 $[-0.5, 0.5]$ 上的均匀分布的随机变量, $v_k(t) = 0.01 \cdot$

randn。这里,randn 为服从 $(0, 1)$ 正态分布随机变量的产生函数。设置初值 $\mathbf{P}_{-1}(t) = 10^4 \mathbf{I}_{6 \times 6}, \theta_{-1}(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, x_0(t) = 0$ 。为了考察收敛性能,定义 $\delta = \|\hat{\theta} - \theta\| / \|\theta\|, J_k = \max_{0 \leq t \leq N} |y_k(t) - \hat{\phi}_k^T(t) \hat{\theta}_{k-1}(t)|$ 。重复运行 100 次,用基于辅助模型的遗忘因子递推最小二乘算法(遗忘因子取值为 0.8)和迭代学习最小二乘算法估计这个系统的参数,仿真结果如下。

图 1 和图 2 为带遗忘因子递推最小二乘的辨识结果。在遗忘因子取值为 0.8 的情况下,对比辨识结果图可知,在缓变的情况下(b_{21} 和 b_{22} 的辨识结果)递推最小二乘算法具有一定的跟踪时变参数的能力,但是当参数突变(或者说变化较快)时,该算法的跟踪能力就很不理想。由图 3 可知,在 t 为 100 的情况下,辨识结果未收敛于真值。

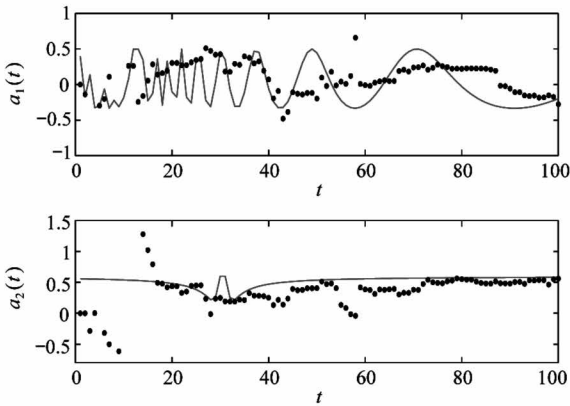


图 1 带遗忘因子递推最小二乘对 a_i 的辨识结果

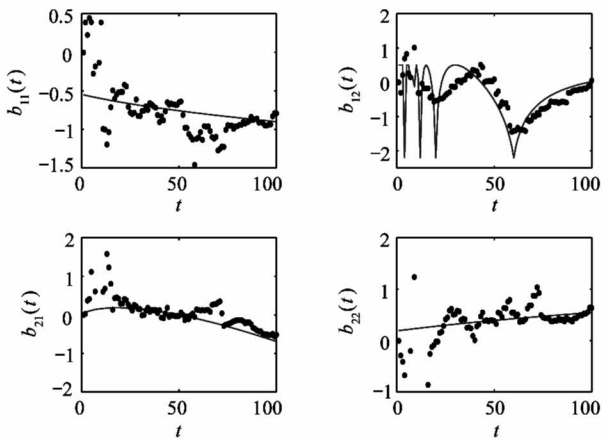


图 2 带遗忘因子递推最小二乘对 b_{ij} 的辨识结果

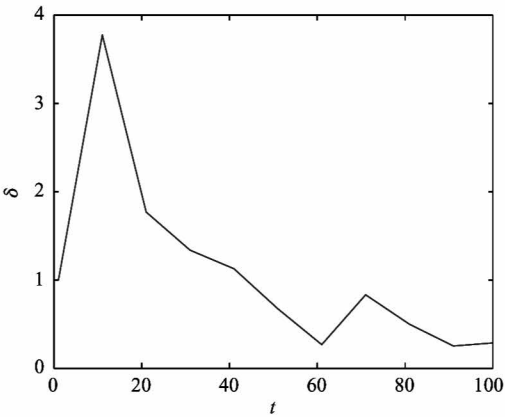


图 3 带遗忘因子递推最小二乘辨识误差

图 4 和图 5 为迭代学习随机梯度算法的辨识结果。由图 4 和图 5 可知,相比于带遗忘因子的递推最小二乘算法,迭代学习随机梯度算法具有较强的跟踪时变参数的能力,但在迭代次数取值为 100 时,仍存在一定的误差。由图 6 可知,迭代学习随机梯度

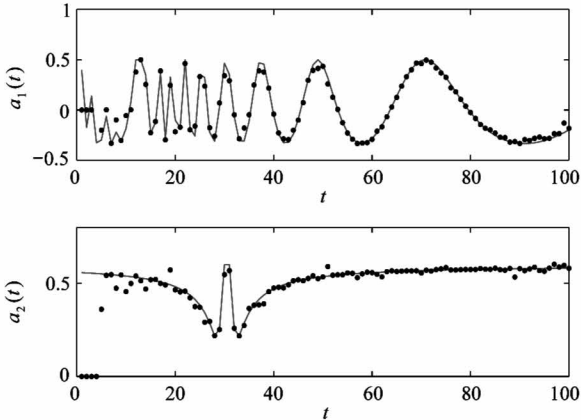


图 4 迭代学习随机梯度算法对 a_i 的辨识结果

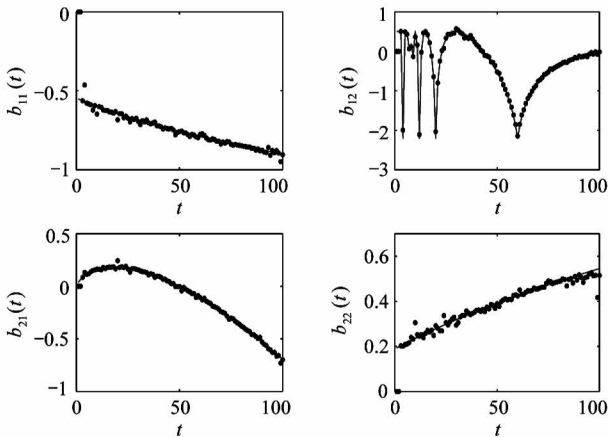


图 5 迭代学习随机梯度算法对 b_{ij} 的辨识结果

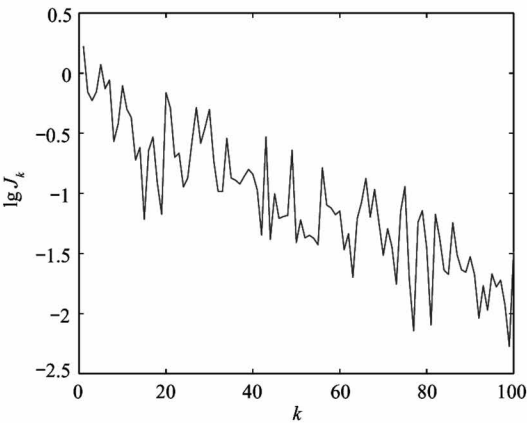


图 6 迭代学习随机梯度算法的误差

算法得到的辨识结果已经取得较好的辨识精度,但效果或者说是收敛速度仍有待提升。

图 7 和图 8 为迭代学习最小二乘算法的辨识结果。由图 7、图 8 可知,相比于另 2 种算法,迭代学习

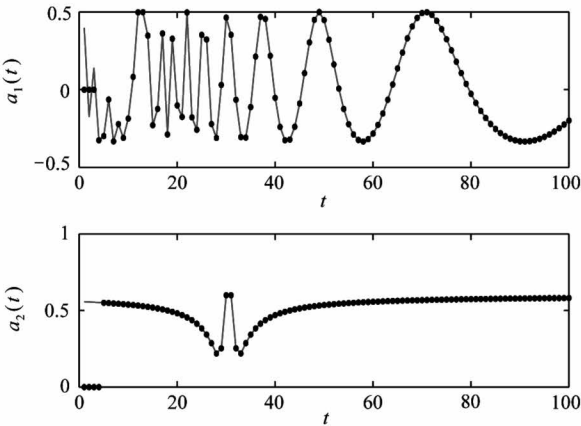


图 7 迭代学习最小二乘算法对 a_i 的辨识结果

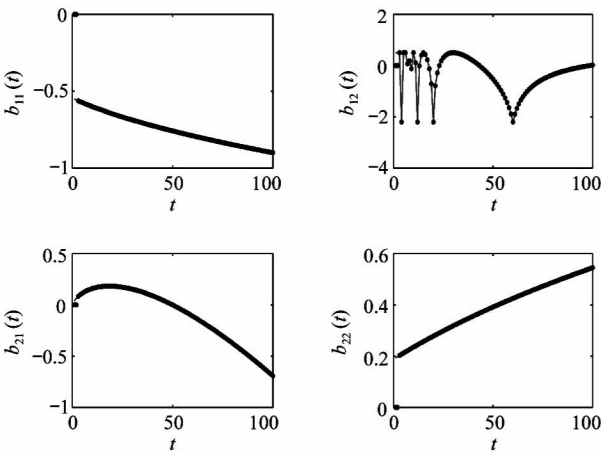


图 8 迭代学习最小二乘算法对 b_i 的辨识结果

最小二乘算法几乎实现了对参数的完全辨识,辨识结果与真值一致。由图 10 可知,迭代学习最小二乘算法得到的辨识结果已经收敛于真值。

图 9 和图 10 的结果表明对重复运行的时变系统,迭代学习最小二乘学习算法可以更好地实现对参数的无偏估计。进一步对比同一 t 时刻参数的辨识情况,在激励信号相同的情况下,随机选取 $t = 40$ 这一时刻。由表 1 可以看出,在不同噪声水平下,迭代学习随机梯度算法的辨识能力不同,当噪声太小时,辨识能力较差。由图 10 可以看出,当噪声方差达到一定的大小,迭代学习随机梯度算法迭代 50 次左右可以实现对参数的完全估计。对于迭代学习最小二乘学习算法,由表 2 和图 11 可以看出,无论

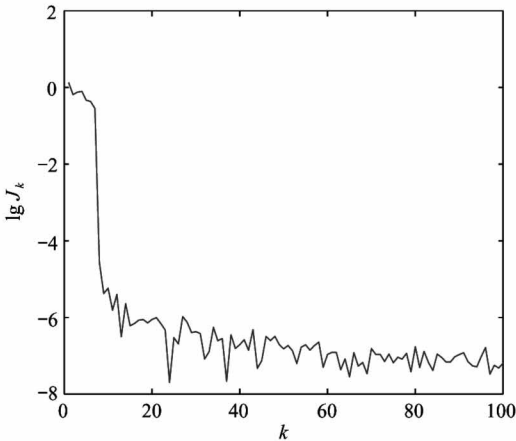


图 9 迭代学习最小二乘算法的辨识误差

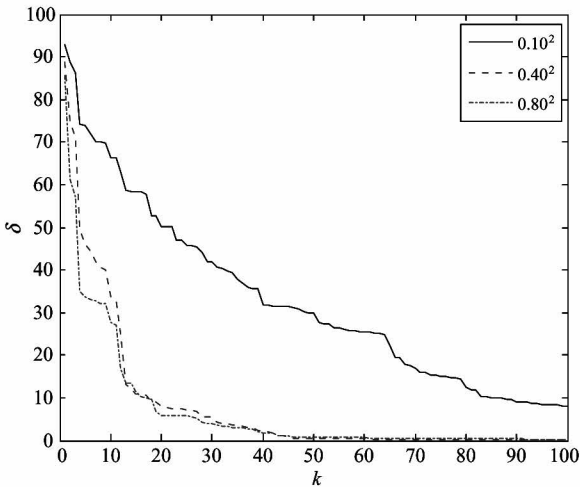


图 10 不同噪声方差下迭代学习随机梯度算法估计误差随迭代次数的变化曲线

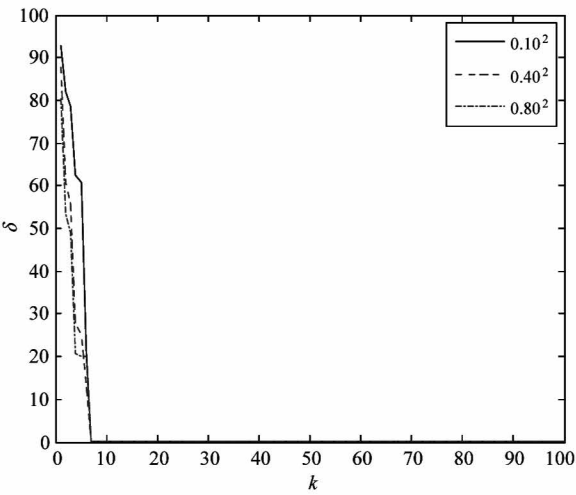


图 11 不同噪声方差下迭代学习最小二乘算法估计误差随迭代次数的变化曲线

噪声方差取何值,迭代学习最小二乘学习算法都能实现对参数的完全估计,且只需要 7 次迭代就能使参数收敛到真值。仿真结果表明了参数估计的一致收敛性,证明该算法可以实现对 MISO 时变 OE 模型参数的完全估计。

5 结 论

本文提出的迭代学习最小二乘学习算法可用于解决一类多输入单输出 OE 系统的时变参数估计问题。针对有限区间重复作业下的时变系统,推导了迭代学习随机梯度算法和迭代学习最小二乘算法。在重复持续激励条件下,通过仿真实例,证明了迭代

表 1 迭代学习随机梯度算法辨识结果和误差

σ^2	k	a_1	a_2	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	δ (%)
0.1	10	0.1537	0.5090	-0.5349	0.4421	0.0646	0.1517	66.3829
	20	-0.1254	0.3149	-0.6970	0.1378	0.1573	0.1950	50.2892
	30	-0.2001	0.3551	-0.6033	0.0966	0.1674	0.2372	41.8608
	40	-0.0731	0.3626	-0.6824	0.2281	0.0905	0.5156	31.7267
	50	-0.0129	0.3654	-0.6669	0.2420	0.1458	0.4370	30.0438
	60	-0.0649	0.4760	-0.7179	0.1569	0.0733	0.3087	25.4646
	70	-0.0730	0.4649	-0.7267	0.1866	0.1200	0.3300	17.0494
	80	-0.1110	0.4790	-0.7226	0.2044	0.0216	0.3702	12.5260
	90	-0.1045	0.4741	-0.7288	0.1985	0.0361	0.3656	9.1358
	100	-0.0701	0.4486	-0.7149	0.2287	0.0497	0.3529	8.0391
0.4	10	0.1801	0.4895	-0.5245	0.4719	0.0669	0.1806	33.7823
	20	-0.0444	0.4652	-0.6935	0.1886	0.1472	0.2653	8.1305
	30	-0.0716	0.4519	-0.7082	0.1591	0.1485	0.3305	5.5785
	40	-0.0466	0.4503	-0.7196	0.1836	0.0860	0.3518	2.0034
	50	-0.0506	0.4698	-0.7221	0.1844	0.0833	0.3519	0.5924
	60	-0.0519	0.4690	-0.7230	0.1827	0.0855	0.3556	0.3904
	70	-0.0511	0.4694	-0.7234	0.1845	0.0881	0.3573	0.1975
	80	-0.0512	0.4702	-0.7243	0.1851	0.0889	0.3574	0.1349
	90	-0.0517	0.4703	-0.7242	0.1852	0.0893	0.3570	0.0902
	100	-0.0515	0.4703	-0.7243	0.1857	0.0893	0.3566	0.0684
0.8	10	0.0823	0.5368	-0.4841	0.3672	-0.0481	0.2396	27.7667
	20	-0.0387	0.4605	-0.6589	0.1856	0.1072	0.3120	6.0119
	30	-0.0569	0.4589	-0.7010	0.1653	0.1275	0.3373	3.9725
	40	-0.0468	0.4557	-0.7105	0.1754	0.0913	0.3502	1.8109
	50	-0.0471	0.4685	-0.7172	0.1806	0.0854	0.3538	0.8454
	60	-0.0485	0.4691	-0.7203	0.1789	0.0860	0.3543	0.7193
	70	-0.0486	0.4701	-0.7234	0.1820	0.0868	0.3586	0.4675

表 1 续

80	-0.0487	0.4705	-0.7245	0.1829	0.0882	0.3589	0.4004
90	-0.0499	0.4704	-0.7241	0.1830	0.0893	0.3584	0.3194
100	-0.0494	0.4705	-0.7243	0.1839	0.0894	0.3576	0.2782
真值	-0.0522	0.4701	-0.7243	0.1861	0.0893	0.3563	

表 2 迭代学习最小二乘算法辨识结果和误差

σ^2	k	a_1	a_2	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	$\delta (\%)$
0.1	1	0.1378	-0.0166	-0.1646	0.4231	-0.0897	0.1927	92.6570
	2	0.5130	0.2848	-0.2474	0.2493	0.1246	0.3420	82.0809
	3	0.4433	0.1667	-0.3830	0.1093	0.0912	0.5562	78.7129
	4	0.0500	0.6470	-0.5987	0.1497	0.0254	0.5710	62.5047
	5	0.1133	0.6539	-0.6556	0.1015	-0.1389	0.4996	60.6222
	6	-0.0134	0.4419	-0.9143	0.1758	0.1639	0.2463	21.2808
	7	-0.0521	0.4702	-0.7245	0.1861	0.0892	0.3563	0.0632
	8	-0.0522	0.4701	-0.7243	0.1861	0.0893	0.3563	0.0028
0.4	1	0.1727	-0.0208	-0.2063	0.5302	-0.1124	0.2415	87.6595
	2	0.5647	0.3219	-0.2634	0.2420	0.1484	0.3673	60.6509
	3	0.4798	0.1913	-0.3981	0.1005	0.1079	0.5800	55.7274
	4	0.0502	0.6472	-0.5988	0.1497	0.0255	0.5711	27.9000
	5	0.0577	0.6142	-0.6151	0.1270	-0.1018	0.4958	24.9794
	6	-0.0817	0.4917	-0.5799	0.1939	0.0325	0.4400	13.2267
	7	-0.0522	0.4701	-0.7243	0.1861	0.0893	0.3563	0.0021
	8	-0.0522	0.4701	-0.7243	0.1861	0.0893	0.3563	0.0003
0.8	1	0.2005	-0.0242	-0.2395	0.6158	-0.1305	0.2805	80.4338
	2	0.4021	0.2050	-0.2130	0.2649	0.0737	0.2878	53.5315
	3	0.3171	0.0817	-0.3307	0.1397	0.0333	0.4735	49.0374
	4	-0.1009	0.4831	-0.5045	0.1906	-0.0534	0.4495	20.6857
	5	-0.0944	0.5057	-0.5042	0.1966	-0.0004	0.4854	20.0144
	6	-0.0974	0.5031	-0.5031	0.1981	0.0023	0.4844	20.0104
	7	-0.0523	0.4701	-0.7242	0.1861	0.0893	0.3563	0.0016
	8	-0.0522	0.4701	-0.7243	0.1861	0.0893	0.3563	0.0003
真值		-0.0522	0.4701	-0.7243	0.1861	0.0893	0.3563	

学习最小二乘学习算法的有效性,可以实现对时变参数的完全估计。

参考文献

[1] Ljung L. System Identification: Theory for the User[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1999: 9-11

[2] Salahshoor K, Hamzehnejad M. A novel online affine model identification of multivariable processes using adaptive neuro-fuzzy networks[J]. Chemical Engineering

Research and Design, 2010, 88(2):155-169

[3] Noe L J P, Kerschen G. Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 40(2): 701-717

[4] Sarmadi S A, Venkatasubramanian V. Electromechanical mode estimation using recursive adaptive stochastic subspace identification[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2014, 29(1):349-358

[5] 张余,蔡跃明,陈贤明,等. 一种基于协同 MIMO 的

- 无线传感器网络传输方案[J]. 高技术通讯, 2008, 18(11):1141-1147
- [6] Khandaker M R A, Wong K K. SWIPT in MISO multicasting systems[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2014, 3(3):277-280
- [7] Ma J, Xiong W, Ding F. Iterative identification algorithms for input nonlinear output error autoregressive systems[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2016, 14(1):140-147
- [8] Ding F, Wang F, Xu L, et al. Decomposition based least squares iterative identification algorithm for multivariate pseudo-linear ARMA systems using the data filtering[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(3):1321-1339
- [9] Liu X, Lu J. Least squares based iterative identification for a class of multirate systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(3):549-554
- [10] 刘毅男, 张胜修, 张超. 基于递归约简的在线自适应最小二乘支持向量回归机[J]. 控制与决策, 2014, 29(1):50-56
- [11] Jin Q, Wang Z, Liu X. Auxiliary model-based interval-varying multi-innovation least squares identification for multivariable OE-like systems with scarce measurements[J]. *Journal of Process Control*, 2015, 35:154-168
- [12] Ding F, Chen H, Li M. Multi-innovation least squares identification methods based on the auxiliary model for MISO systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 187(2):658-668
- [13] 孙明轩, 毕宏博. 学习辨识: 最小二乘算法及其重复一致性[J]. 自动化学报, 2012, 38(5):698-706
- [14] 孙明轩, 毕宏博. 最小二乘学习辨识[C]//第30届中国控制会议, 烟台, 2011: 969-974
- [15] 侯忠生, 金尚泰, 赵明. 宏观交通流模型参数的迭代学习辨识方法[J]. 自动化学报, 2008(1):64-71
- [16] Jia L, Yang T, Chiu M. An integrated iterative learning control strategy with model identification and dynamic R-parameter for batch processes[J]. *Journal of Process Control*, 2013, 23(9):1332-1341
- [17] 萧德云. 系统辨识理论及应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2014:176-178

Learning identification of multiple-input and single-output time-varying output error model

Zhu Xuxuan, Zhong Guomin, He Xiongxiang

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

This paper presents a parameter estimation method for multiple-input and single-output (MISO) time-varying error model, whose parameters may change rapidly or abruptly with respect to time. For the system model undertaken, the problem in identification lies in that the model parameters to be identified change with time, and especially the rapid or abrupt change parameters are difficult to identify. With the aid of the auxiliary model, learning identification algorithms, including least-squares learning algorithm and the gradient learning algorithm, are proposed for the purpose of parameter estimation. Numerical simulation is carried out and results are presented to demonstrate effectiveness of the proposed learning algorithms. The experiment results show that the proposed algorithm can provide accurate estimation for the error model.

Key words: learning identification, least squares algorithm, gradient algorithm, auxiliary model, multiple-input single-output (MISO) system