doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2020.11.003

带有量化的信息物理系统安全控制①

朱俊威② 吴 珺 冯 宇③

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要 本文针对量化环境下的信息物理系统(CPS)提出了一种安全控制方法。考虑执行器和传感器同时受到攻击,并且在信息传输过程中受到量化影响,首先设计了一种中间观测器对系统状态和攻击信号同时进行估计,并基于估计值设计了容侵控制器,通过李雅普诺夫稳定性分析得到保证闭环系统状态一致最终有界的充分条件。该方法通过直接调节某些特定参数可以抑制量化误差的影响,并且不需要引入任何性能指标。最后通过网络化运动控制系统验证了所提方法的有效性。

关键词 信息物理系统(CPS);量化;攻击估计;中间观测器;安全控制

0 引 言

随着近年来计算机控制技术和电子硬件设备的快速发展,信息物理系统(cyber-physical systems, CPSs)在工业控制领域受到广泛应用。与传统数字控制系统相比,信息物理系统融合了网络资源和物理资源,将所有设备和网点通过通信网络连接在一起,大大提高了系统的时效性。如今,CPSs 在工业现场、楼宇自动化、智能电网和智慧城市等领域中起着重要的作用。也正是由于网络环境的开放性,CPSs 较传统控制网络面临更高的安全威胁。例如,2003 年 1 月,SQLSlammer 蠕虫病毒攻击了美国戴维斯贝斯核电站,使得过程控制中心连续数小时无法工作。2010 年 6 月,stuxnet“震网”蠕虫病毒[1]突破西门子公司的数据采集与监控系统,对伊朗的布什尔核电站造成极大破坏。2012 年“打印机木马”横扫美国、印度等国家,使得打印机疯狂打印毫无意义的内容,造成极大的浪费。诸如此类的工业控制网络攻击的例子屡见不鲜,在此背景下,CPSs 的安全问题已经引起了政府企业和社会各界的广泛关注。

从控制的角度看,网络攻击通常被建模为一种附加信号,根据攻击的对象不同,攻击会影响控制器到执行器的通道,也会影响传感器到观测器的通道。针对复杂系统的攻击问题,一些研究着重考虑了攻击检测问题。Pasqualetti 等人[2]从图论和系统理论的角度阐述基本检测的限制,提出了攻击检测的数学框架,并设计了集中式和分布式攻击检测观测器。Do[3]研究了智能电网中的攻击检测问题。Wang 等人[4]设计了一个区间观测器来估计物理系统内部的区间状态,并用区间残差来取代传统攻击检测方法中的评价函数和检测门限。Miao 等人[5]在输入端随机附加变量信号来改变传感器的输出,目的是增加攻击下的估计误差以使攻击被检测到。攻击检测主要关注攻击是否发生以及攻击发生的时间,另一些研究者侧重攻击估计问题,即不仅要知道攻击是否发生,还要能够跟踪到攻击的大小和具体波形,例如 Alan 等人[6]针对服务降级控制的数据注入攻击提出了一种链路监控策略,以辨识攻击中间人的线性时不变传递函数,且不会对系统造成干扰。Hu

① 国家自然科学基金(61803334, 61573318, 61973276),浙江省自然科学基金(LQ18F030012, LR17F030003)和国家留学基金(201908330040)资助项目。

② 男,1985 年生,博士,副教授;研究方向:信息物理系统安全;E-mail: junweizhu1001@zjut.edu.cn

③ 通信作者,E-mail: yfeng@zjut.edu.cn

(收稿日期:2019-10-28)

等人[7]针对受到网络攻击和通信故障下的电力系统设计了一种安全估计器来获得电网系统的动态性能并重构攻击信号。有些研究在攻击估计的基础上进一步完成了安全控制,例如,Hu 等人[8]针对带有不确定性和量化的多智能体系统提出了一种自适应反馈控制,先用高增益观测器估计系统不确定性部分,再设计自适应输出反馈控制器以实现安全控制。

CPSs 的开放性和自身的可靠性能提高了系统的安全性和可维护性,但同时网络中的不确定性无法避免,例如,当多信号共享系统信道时会产生数据拥挤从而导致网络时延[9];在总线中传输的数据通常会经过多台下位机,线路复杂、通信情况较差时会发生丢包问题[10,11];囿于通信带宽的限制,在设备交换信息和数据采样的过程中需要经过量化处理,这会导致信号失真,使得观测器难以对系统参数作出精确的估计[12,13]。其中量化过程不可避免,且量化的存在必然导致系统稳定性能下降。针对抑制量化误差影响的研究有,龙跃[14]研究了量化环境下的带有时延及丢包的网路控制系统在有限频率范围下的故障检测问题,将其转化为一个多目标优化问题。俞立等人[15]将量化器建模为系统不确定性部分,定义性能指标和设计鲁棒预测控制器来补偿系统中的量化和丢包现象。Elia 和 Mitter[16]研究了量化状态反馈控制器和量化状态估计器,并提供了一种有线数量级量化的对数量化器,并实现闭环系统的稳定性。欧洋等人[17]针对量化环境下的网络化不确定性系统设计了鲁棒预测控制器,通过性能指标来分析系统的性能上界和控制输入的收敛性。文献[15,17]是从传统鲁棒控制的角度出发,通过引入 H_∞ 性能指标来抑制量化误差的影响,实现鲁棒预测控制。朱俊威[18]针对故障诊断问题设计了一种中间观测器,在系统含有时延和丢包的情况下,对干扰和故障有非常好的估计效果。中间观测器通常用于故障诊断领域,也可以在攻击辨识问题上实现较好的估计效果,但是上述工作中大多数观测器在分析中都没有考虑到量化的情况,或者考虑了量化的影响但没有考虑对攻击作出估计。

基于上述分析本文主要做出如下几点工作:(1)首次考虑了量化下基于观测器的 CPSs 安全控制问题,而传统方法的重点主要放在时延[9]和丢包[10]问题上,对于量化问题没有充分考虑。(2)不同于处理量化问题的传统方法[17,19],本文通过直接调节特定参数来抑制量化误差的影响,而不需要引进任何鲁棒性能指标,同时得到的闭环系统稳定性条件的保守性更小。(3)通过网络化运动控制系统验证了算法的有效性。

1 数学模型及问题描述

CPSs 是数字化和网络化时代的产物,通过信息感知技术和信号传输技术将网络环境和物理设备融合起来,利用算法和计算机控制技术进行管理和调控,实现二者的深度融合。

本文考虑的 CPSs 结构框图如图 1 所示,在传感器将信息传输到观测器的通道上会受到量化影响,这条通道和控制器到执行器的传输通道也会受到未知网络攻击的影响。执行器、被控对象和传感器处于物理层中。

根据以上描述考虑下列离散系统:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}x(k) + \boldsymbol{B}u(k) + \boldsymbol{B}a_u(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}x(k) \end{aligned} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态量,$\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入,$\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ 为系统的测量输出,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为常数矩阵,其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$,$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$。

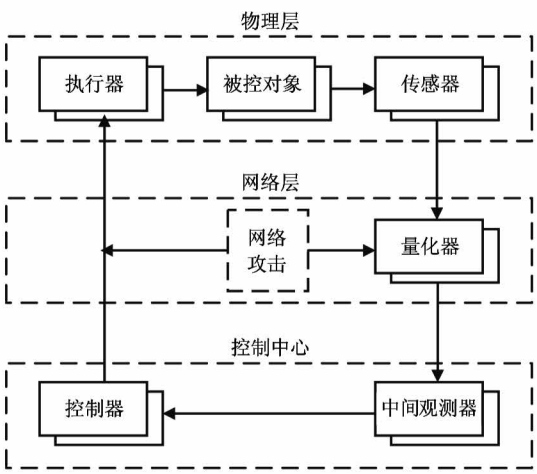

图 1 带有量化的 CPSs 结构图

考虑到攻击者也能访问通信网络,因此 CPSs 可

能受到攻击,设置 $\boldsymbol{a}_u(k) \in \mathbb{R}^r$ 为外部对执行器的攻击,$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为对应 $\boldsymbol{a}_u$ 的攻击分布矩阵;攻击者利用网络注入虚假数据,通过篡改量化器的输出值来破坏系统的控制和数据测量通道,同理在观测器侧接收到的测量值为 $\boldsymbol{s}(k)$:

$$\boldsymbol{s}(k) = (I + \Delta_q)\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_y(k) \tag{2}$$

式中,$\Delta_q \in \mathbb{R}^{p\times n}$ 用来表示描述系统中的量化影响。设置 $\boldsymbol{a}_y(k) \in \mathbb{R}^q$ 为外部对传感器的网络攻击,$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 是关于 $\boldsymbol{a}_y$ 的攻击分布矩阵。$\boldsymbol{a}_u$ 和 $\boldsymbol{a}_y$ 互相不相关,分属不同的攻击。下面给出 2 个假设。

假设 1 攻击信号及其变化率是有界的,即存在:

$$\| \boldsymbol{a}_u(k+1) - \boldsymbol{a}_u(k) \| \leqslant \eta_u$$

$$\| \boldsymbol{a}_y(k+1) - \boldsymbol{a}_y(k) \| \leqslant \eta_y$$

其中 $\eta_u \geqslant 0$ 且 $\eta_y \geqslant 0$。

假设 2 执行器和传感器的攻击分布矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是列满秩,即:

$$rank(\boldsymbol{B}) = r \text{ 且 } rank(\boldsymbol{D}) = r$$

注释 1 假设 1 在大多数攻击估计的文献中被广泛使用,例如文献[14,18,19]。

注释 2 假设 2 是非常普遍的,文献[15,18]中也采用了这种假设。列满秩在攻击估计里是十分常见的,当矩阵非列满秩时观测器无法对攻击信号进行重构从而得到准确的估计值。

同时考虑观测器在 CPSs 环境下所存在的量化现象,量化过程将离散信号转换成数字信号,量化精度影响信息传输的准确性。本文考虑一种静态时不变量化器,即对数量化器。首先对该模型做出具体描述:定义量化密度为 $\rho \in (0,1)$,给定对数量化器的输入为 $\boldsymbol{y}(k)$,输出为 $\boldsymbol{f}(k)$,则有 $\boldsymbol{f}(k) = Q(\boldsymbol{y}(k))$,$Q(\boldsymbol{y}(k))$ 表示相关的量化过程。

容易验证,对于量化器 Q 和 $0 < \varepsilon < 1$,定义 $\#g[\varepsilon]$ 为区间 $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ 上的量化级数,则量化器满足:

$$\eta_q = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\frac{\#g[\varepsilon]}{-\ln\varepsilon}$$

其中,η_q 表示量化器的量化密度。根据文献[2]易知,对于对数量化器满足 $\eta_q = 2/[\ln(1/\rho)]$。该式表明 ρ 值和 η_q 值呈正相关,因此后文描述对数量化器时用 ρ 表示量化密度。

得到量化映射关系函数如下:

$$Q(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \rho^i u_0 & \boldsymbol{y} > 0 \text{ 且} \dfrac{\rho^i u_0}{1+\tau} < \boldsymbol{y} < \dfrac{\rho^i u_0}{1-\tau} \\ 0 & \boldsymbol{y} = 0 \\ -Q(-\boldsymbol{y}) & \boldsymbol{y} < 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中,$\tau = \dfrac{1-\rho}{1+\rho}$。由文献[2]可知量化器的输出为

$$f(k) = Q(\boldsymbol{y}(k)) = (1 + \Delta_q)\boldsymbol{y}(k)$$

其中,$\Delta_q \in [-\tau, \tau]$。下文中使用该量化器来描述网络中的量化影响。

由于 CPSs 同时受到执行器和传感器攻击,需要观测器能够对状态和多个攻击信号实现准确估计,因此本文通过改进文献[18]的中间观测器方法来实现对量化环境下的 CPSs 状态和外部攻击等未知信号的同时估计。

综合式(1)~式(3),本文闭环系统可描述为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_u(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{s}(k) &= (I_q + \Delta_q)\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_y(k) \end{aligned} \tag{4}$$

设置新的状态变量 $\boldsymbol{\zeta}(k) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) \quad \boldsymbol{a}_y^{\mathrm{T}}(k)]$

此时,式(1)和式(2)可改写为增广系统:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}(k+1) &= \boldsymbol{A}_a\boldsymbol{\zeta}(k) + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{a}_u(k) \\ &\quad + \boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_y(k+1) \\ \boldsymbol{s}(k) &= \boldsymbol{C}_a\boldsymbol{\zeta}(k) + \Delta_q\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{M}_n = [I_n \quad 0]$,$\boldsymbol{C}_a = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{D}]$

设置中间变量如下:

$$\boldsymbol{\tau}(k) = \boldsymbol{a}_u(k) - \omega\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(k) \tag{6}$$

其中,ω 是可调整的参数,改变 ω 的值可以改善估计效果。此时可以确定设计的观测器为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\zeta}}(k+1) &= \boldsymbol{A}_a\hat{\boldsymbol{\zeta}}(k) + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}_a\hat{\boldsymbol{a}}_u(k) \\ &\quad + \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{a}}_y(k) + \boldsymbol{L}(\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{s}) \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}(k+1) &= \hat{\boldsymbol{a}}_u(k) - \omega\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}_a\hat{\boldsymbol{\zeta}}(k) + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(k) \\ &\quad + \boldsymbol{B}_a\hat{\boldsymbol{a}}_u(k) + \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{a}}_y(k)] \\ \hat{\boldsymbol{a}}_u(k) &= \hat{\boldsymbol{\tau}}(k) - \omega\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\zeta}}(k) \end{aligned} \tag{7}$$

同时设计容侵控制器为

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{k}_s\hat{\boldsymbol{x}}(k) - \hat{\boldsymbol{a}}_u(k) \tag{8}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{a}}_u(k) \in \mathbb{R}^r$ 是对攻击 $\boldsymbol{a}_u$ 的估计值，$\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{(n+q)\times p}$ 是需要确定的观测器增益，$\boldsymbol{k}_s \in \mathbb{R}^n$ 是设计的容侵控制器增益，$\hat{\boldsymbol{x}}(k)$、$\hat{\boldsymbol{\zeta}}(k)$、$\hat{\boldsymbol{\tau}}(k)$、$\hat{\boldsymbol{a}}_u(k)$、$\hat{\boldsymbol{a}}_y(k)$ 是对应参数 $\boldsymbol{x}(k)$、$\boldsymbol{\zeta}(k)$、$\boldsymbol{\tau}(k)$、$\boldsymbol{a}_u(k)$、$\boldsymbol{a}_y(k)$ 的估计值。

定义误差 $\boldsymbol{e}_\zeta(k) = \boldsymbol{\zeta}(k) - \hat{\boldsymbol{\zeta}}(k)$，$\boldsymbol{e}_\tau(k) = \boldsymbol{\tau}(k) - \hat{\boldsymbol{\tau}}(k)$，$\boldsymbol{e}_u(k) = \boldsymbol{a}_u(k) - \hat{\boldsymbol{a}}_u(k)$，$\boldsymbol{e}_y(k) = \boldsymbol{a}_y(k) - \hat{\boldsymbol{a}}_y(k)$ (9)

本文着重解决量化下受攻击的 CPSs 系统的安全控制问题，设计中间观测器得到状态和攻击信号的估计值，并基于估计值设计容侵控制器，使得闭环系统的状态一致最终有界。

2 闭环系统稳定性分析

结合式(5)～式(9)可得出系统的闭环系统方程如下：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{e}_\zeta(k) \\
&\quad + \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_\tau(k) + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_\zeta(k) \\
\boldsymbol{e}_\zeta(k+1) &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}_q\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + [\boldsymbol{A}_u + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}_a]\boldsymbol{e}_\zeta(k) \\
&\quad + \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{e}_\tau(k) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}_y(k) \\
\boldsymbol{e}_\tau(k+1) &= \boldsymbol{K}_u\boldsymbol{e}_\zeta(k) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\tau(k) + \boldsymbol{\Delta}_u(k) \\
&\quad - \omega\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}_y(k)
\end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{A}_C = \boldsymbol{A}_a + \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{K}_C = \omega\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_C)$，$\boldsymbol{\Delta}_y = \boldsymbol{a}_y(k+1) - \boldsymbol{a}_y(k)$，$\boldsymbol{\Delta}_u = \boldsymbol{a}_u(k+1) - \boldsymbol{a}_u(k)$，$\boldsymbol{A}_u = \boldsymbol{A}_C + \omega\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{K}_u = \boldsymbol{K}_C - \omega^2\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} - \omega\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a$，$\boldsymbol{C}_b = \boldsymbol{C}\boldsymbol{M}_n + \boldsymbol{D}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$。

本节通过求解以下定理中所定义的线性矩阵不等式(linear matrix inequality，LMI)条件求解估计增益矩阵 $\boldsymbol{L}$。

定理 1 给定可调整参数 $\omega > 0$，$\varepsilon > 0$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{P}_2 \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)} > 0$，$\boldsymbol{P}_3 \in \mathbb{R}^{r\times r} > 0$，$\boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_2^2$，$\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{(n+q)\times p}$，$\sigma \in (0,1)$ 满足：

$$\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{\Pi}_{12} & \boldsymbol{\Pi}_{13} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} \\
* & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{\Pi}_{23} & 0 & \boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & \boldsymbol{\Pi}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\boldsymbol{P}_2 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\sigma\boldsymbol{P}_4 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\boldsymbol{P}_2 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\sigma
\end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

其中，a_{ij} 位置上的 * 表示 a_{ji} 位置上元素的转置，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Pi}_{11} &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s) + \varepsilon\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q\boldsymbol{C} - \boldsymbol{P}_1 \\
\boldsymbol{\Pi}_{12} &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}) + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u \\
\boldsymbol{\Pi}_{13} &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a \\
\boldsymbol{\Pi}_{22} &= (\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}) \\
&\quad + \boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_u + He\{\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a\} + \varepsilon\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u + \varepsilon\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a \\
&\quad + \boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{K}_u + 2\varepsilon\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_u - \boldsymbol{P}_2 \\
\boldsymbol{\Pi}_{23} &= (\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a + \boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a \\
&\quad + \boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{\Pi}_{33} &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a + \varepsilon\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T} + 2\varepsilon\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} \\
&\quad - \boldsymbol{P}_3
\end{aligned}$$

则整个闭环系统式(10)的状态是一致最终有界，并且由上式可得所设计的中间观测器的估计增益矩阵 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{H}$。

证明 定义 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(k) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{e}_\zeta(k) \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{e}_\tau(k)
\end{aligned} \tag{12}$$

对上式求导，首先计算 3 个分量，由式(10)可得第 1 个分量的误差项为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(k+1) \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)\boldsymbol{x}(k) \\
&\quad + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e}_\zeta(k) \\
&\quad + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_\tau(k) + \boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n \\
&\quad + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e}_\zeta(k) \\
&\quad + 2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_\tau(k) \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_\tau(k)
\end{aligned}$$

考虑所定义的误差系统，得到第 2 个分量的误差项为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{e}_\zeta(k+1) \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_q\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u\boldsymbol{e}_\zeta(k)
\end{aligned}$$

$$+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a\boldsymbol{e}_\zeta(k)$$
$$+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{e}_\tau(k)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y$$
$$+\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_u\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\times He\{\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a\}\boldsymbol{e}_\zeta(k)$$
$$+2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{e}_\tau(k)+2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}\Delta_y$$
$$+\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a\boldsymbol{e}_\zeta(k)+2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{e}_\tau(k)$$
$$+2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\times\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y+\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{e}_\tau(k)$$
$$+2\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}\Delta_y+\Delta_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}\Delta_y$$

其中,$He(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$,对于非对称项和不确定项,由假设1可知存在参数$\varepsilon>0$使下面不等式成立:

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a\boldsymbol{e}_\zeta(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\Delta_q\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_2^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a\boldsymbol{e}_\zeta(k)$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\Delta_q\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\eta_y^2$$

$$2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}_\mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^2\boldsymbol{M})\eta_y^2$$

$$2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\eta_y^2$$

$$2\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{e}_\tau(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^2\boldsymbol{M})\eta_y^2$$

$$\Delta_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M})\eta_y^2$$

整理上式得到如下结果:

$$\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{e}_\zeta(k+1)\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\Delta_q\boldsymbol{C}+\varepsilon\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\Delta_q\boldsymbol{C}+\varepsilon\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\Delta_q\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)$$
$$(2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u)\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)(2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a)$$
$$\times\boldsymbol{e}_\tau(k)+\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)(\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a+\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_u$$
$$+He\{\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a\}+\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_a+\varepsilon\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u+\varepsilon\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a)$$
$$\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)(2\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a+2\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a)\boldsymbol{e}_\tau(k)$$
$$+\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a+\varepsilon\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a)\boldsymbol{e}_\tau(k)+\frac{2}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})$$
$$\eta_y^2+\frac{2}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^2\boldsymbol{M})\eta_y^2+\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M})\eta_y^2$$

其中,$He(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$,同理可以得到第3个分量$\boldsymbol{e}_\tau(k+1)$的误差项为

$$\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{e}_\tau(k+1)$$
$$=\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{K}_u\boldsymbol{e}_\zeta(k)+2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\tau(k)+2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)$$
$$\times\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\Delta_u-2\omega\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y+\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\tau(k)$$
$$+2\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\Delta_u-2\omega\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y+\Delta_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\Delta_u$$
$$-2\omega\Delta_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y+\omega^2\Delta_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y$$

关于不确定项Δ_y和Δ_u,由假设1可知存在参数$\varepsilon>0$使下面不等式成立:

$$2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_\mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\Delta_u(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_\mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_\mu\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3^2)\eta_u^2$$

$$-2\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_\mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{K}_\mu^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_\mu\boldsymbol{e}_\zeta(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$

$$2\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\Delta_u(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\tau(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3^2)\eta_u^2$$

$$-2\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\tau(k)+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$

$$-2\omega\Delta_u^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\varepsilon\eta_u^2+\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$

$$\omega^2\Delta_y^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Delta_y(k)\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$

$$\Delta_u^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_3\Delta_u(k)\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3)\eta_u^2$$

整理上式并得到如下结果:

$$\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{e}_\tau(k+1)\leqslant\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{K}_u+2\varepsilon\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_u)\boldsymbol{e}_\zeta(k)$$
$$+\boldsymbol{e}_\xi^{\mathrm{T}}(k)\times(2\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T})\boldsymbol{e}_\tau(k)+\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T}+2\varepsilon\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T})$$
$$\boldsymbol{e}_\tau(k)+\frac{2}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3^2)\eta_u^2+\frac{3}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$
$$+\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3^2)\eta_u^2+\varepsilon\eta_u^2+\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$

将上述结果代回到式(12)的变化率中得到如下结果:

$$\Delta\boldsymbol{v}(k)=\boldsymbol{v}(k+1)-\boldsymbol{v}(k)$$
$$=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\quad\boldsymbol{e}_\zeta^{\mathrm{T}}(k)\quad\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}(k)]\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\\boldsymbol{e}_\zeta(k)\\\boldsymbol{e}_\tau(k)\end{bmatrix}+\boldsymbol{\beta}$$

其中:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11}&\boldsymbol{\Sigma}_{12}&\boldsymbol{\Sigma}_{13}\\*&\boldsymbol{\Sigma}_{22}&\boldsymbol{\Sigma}_{23}\\*&*&\boldsymbol{\Sigma}_{33}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{H}\Delta_q\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\Delta_q\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\Delta_q\boldsymbol{C}-\boldsymbol{P}_1$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{M}_n+\omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\Delta_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u$$

$$\Sigma_{13} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a$$

$$\Sigma_{22} = (\boldsymbol{BK}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{BB}_a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{BK}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{BB}_a^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{HC}_a + \boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_u + He\{\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a\} + \boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{HC}_a + \varepsilon\boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_u + \varepsilon\boldsymbol{C}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b + \boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{K}_u + 2\varepsilon\boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_u - \boldsymbol{P}_2$$

$$\Sigma_{23} = (\boldsymbol{BK}_s\boldsymbol{M}_n + \omega\boldsymbol{BB}_a^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a + \boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a + \boldsymbol{K}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T}$$

$$\Sigma_{33} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_a + \varepsilon\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{T} + 2\varepsilon\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{P}_3$$

$$\beta = \frac{2}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\eta_y^2 + \frac{2}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^2\boldsymbol{M})\eta_y^2 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M})\eta_y^2 + \frac{2}{\varepsilon}\bar{\lambda}(\boldsymbol{P}_3^2)\eta_u^2 + \frac{3}{\varepsilon}\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}) \times \omega^2\eta_y^2 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3^2)\eta_u^2 + \varepsilon\eta_u^2 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{P}_3^2\boldsymbol{B}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\omega^2\eta_y^2$$

根据舒尔补理论，若上式中 $\Sigma < 0$，结合式(11)可得：

$$\Delta v(k) \leqslant \lambda_{\max}(\Sigma)(\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + \|\boldsymbol{e}_\zeta(k)\|^2 + \|\boldsymbol{e}_\tau(k)\|^2) + \beta \tag{13}$$

同时，联合定理 1 可知：

$$\begin{aligned} v(k) &\leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_1)\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2)\|\boldsymbol{e}_\zeta(k)\|^2 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3)\|\boldsymbol{e}_\tau(k)\|^2 \\ &\leqslant \max[\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_1), \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2), \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3)] \cdot (\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + \|\boldsymbol{e}_\zeta(k)\|^2 + \|\boldsymbol{e}_\tau(k)\|^2) \end{aligned}$$

由此，式(13)可以表达为

$$\Delta v(k) \leqslant -\kappa v(k) + \beta$$

其中 $\kappa = \dfrac{-\lambda_{\max}(\Sigma)}{\max[\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_1), \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_2), \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_3)]} > 0$。

为证明误差系统最终一致有界，定义集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 和其补集 $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ 如下：

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{e}_\zeta(k) \\ \boldsymbol{e}_\tau(k) \end{bmatrix} \middle| \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_1)\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_2)\|\boldsymbol{e}_\zeta(k)\|^2 + \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_3)\|\boldsymbol{e}_\tau(k)\|^2 \leqslant \frac{\beta}{\kappa} \right\}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{e}_\zeta(k) \\ \boldsymbol{e}_\tau(k) \end{bmatrix} \middle| \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_1)\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_2)\|\boldsymbol{e}_\zeta(k)\|^2 + \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_3)\|\boldsymbol{e}_\tau(k)\|^2 \geqslant \frac{\beta}{\kappa} \right\}$$

如果 $[\boldsymbol{x}(k) \quad \boldsymbol{e}_\zeta(k) \quad \boldsymbol{e}_\tau(k)]^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{\Omega}$，那么显然误差系统都是有界的；如果 $[\boldsymbol{x}(k) \quad \boldsymbol{e}_\zeta(k) \quad \boldsymbol{e}_\tau(k)]^{\mathrm{T}} \in \bar{\boldsymbol{\Omega}}$，那么可以得到：

$$v(k) \geqslant \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_1)\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_2)\|\boldsymbol{e}_\zeta(k)\|^2 + \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_3)\|\boldsymbol{e}_\tau(k)\|^2 \geqslant \frac{\beta}{\kappa}$$

由此可知 $\Delta V(k) \leqslant 0$。根据李雅普诺夫稳定性理论，$\boldsymbol{e}_\zeta(k)$ 和 $\boldsymbol{e}_\tau(k)$ 都是有界的。所以闭环系统是一致有界最终有界的。在实际调节中，只需要通过调节参数 ω 即可影响整体估计效果。安全控制整体流程如图 2 所示。

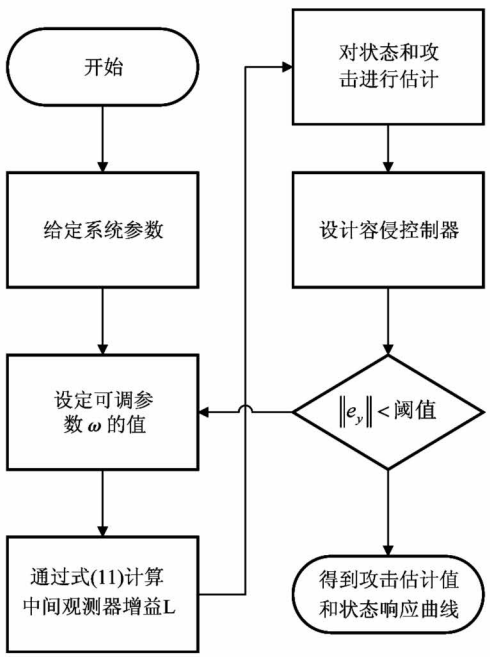

图 2 安全控制流程图

注释 3 本文主要工作是考虑 CPSs 中存在量化影响时观测器的设计和闭环系统的安全控制问题。针对网络不确定性的研究，以往的文献主要从时延[9,20,21]和丢包[11,22]的攻击估计问题考虑，但是均没有考虑量化因素的相关结果，因此本文主要针对量化环境下基于估计的安全控制问题作出研究。

注释 4 通过定理 1 得到估计增益 $\boldsymbol{L}$ 的作用是改善攻击估计的速度和准度，并抑制量化误差的影响。通过观测器对状态和攻击进行估计并设计容侵控制。传统的处理量化误差的方法通常是通过引入 H_∞ 性能指标将量化问题转化为鲁棒控制问题，如文献[17,19]，而本文通过直接调整参数 ω 来调节估

计的效果,设计容侵反馈控制器调整控制效果,从而避免了引入其他性能指标。

3 实验仿真

为了验证上述定理的有效性,本节选用一个基于网络化运动控制系统的实验来验证上述定理。该运动系统由电机、交流伺服系统和 PC 上位机组成,并用 CAN 总线连接,如图 3 所示。PC 上位机负责处理控制算法和数据,并通过总线将控制命令传输到各交流伺服系统,同时返回交流伺服系统的数据,例如速度、位移、力矩等信息,并把这些数据交给 PC 上位机进行处理。CAN 总线负责实现分布式控制系统各节点之间的实时数据通信。交流伺服系统包含 4 个电机,受到 ARM 单片机的控制,同时单片机接受 PC 上位机的控制命令。

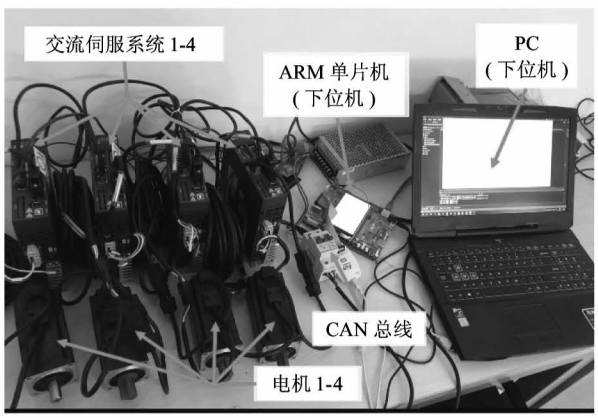

图 3 网络化运动控制系统

该系统具有如下性质:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -41.1015\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 3.4414\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,系统的 2 个状态分别是位置和速度。

本节设置容侵控制器 $\boldsymbol{u}(k)=-k_s\hat{\boldsymbol{x}}(k)-\hat{\boldsymbol{a}}_u(k)$ 中的 $k_s=[36.4\quad 54.2]$,并根据假设 2 设定 $\boldsymbol{D}=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}$。设置执行器和传感器上的错误数据注入攻击为正弦信号,设定量化密度 $\rho=0.7$,设置给定的调节参数 $\omega=75$,根据式(12),得到:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}8.6591 & 0.0203\\ 0.0203 & 0.0547\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}13.7503 & -5.2133 & 5.5250\\ -5.2133 & 18.5490 & -1.9386\\ 5.5250 & -1.9386 & 14.938\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_3=1.5799,$$

$$\boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix}329.6154 & -136.7990 & 128.4113\\ -136.7990 & 426.3837 & -79.1514\\ 128.4113 & -79.1514 & 340.9982\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}-0.3804 & -0.0466\\ -0.0147 & -0.5389\\ 0.0343 & -0.5305\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}-0.0601 & 0.0027\\ -0.0197 & -0.0479\\ 0.0277 & -0.0576\end{bmatrix}。$$

给定被控对象的初始条件为 $\boldsymbol{x}(0)=[1\quad 1]$,观测器的初始状态设为零初始条件,实验结果如图 4 ~ 图 7 所示。图 4 中将受到量化影响和网络攻击的系统和标称系统进行对比,$\boldsymbol{s}_2$ 表示在量化密度 $\rho=0.7$ 下系统在攻击影响下的输出量,$\boldsymbol{y}_2$ 表示没有受到量化影响的系统的输出量,通过二者的比较可以看到在上述影响下系统的输出值呈现锯齿形状,表明了量化过程对系统的影响。图 5 和图 6 是在量化系统下,分别采用标称中间观测器和本文所设计的考虑量化的中间观测器对执行器攻击和传感器攻击的估计曲线对比图,图中虚线为估计值,实线为实际值,对应系统的量化密度 $\rho=0.7$。其中图 5 为执行器攻击估计曲线,标称中间观测器在此时有较大误差,而本文所设计中间观测器能够很好地拟

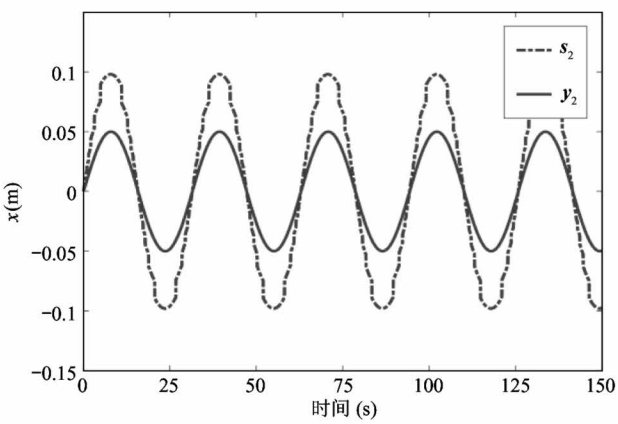

图 4 受到攻击的量化系统和标称系统输出比较

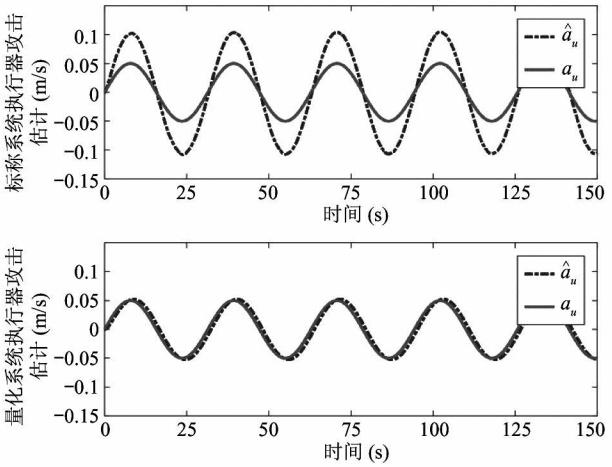

图 5　执行器攻击信号估计曲线对比

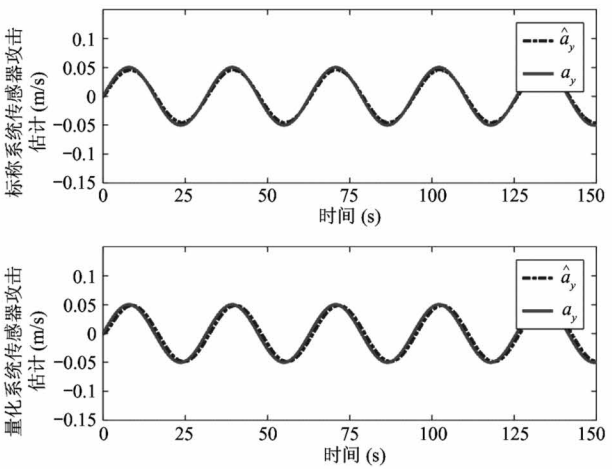

图 6　传感器攻击信号估计曲线对比

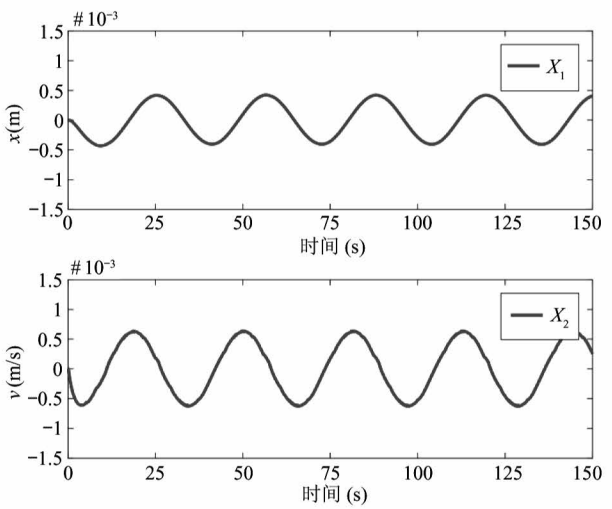

图 7　状态响应曲线

合攻击曲线。图 6 为传感器攻击估计曲线，可以看到二者对该攻击的跟踪性能较好。图 7为状态响应曲线，可以看出，在攻击发生的情况下，系统状态依旧能够保持稳定。

ω 的调节对估计性能有积极影响。当完成一次实验后，观察 e_y 和阈值的差值，如果曲线的幅值在给定的阈值之内，则认为此时的 ω 是符合控制要求的值；否则，调节 ω 的值以及容侵控制率 k_s 直到曲线的幅值在给定阈值内。

影响跟踪性能的参数是 ω，而 ω 的取值范围和量化密度 ρ 有关。当 ρ 的值越小，即量化效果的影响因素越大的时候，ω 的可调节范围越小。

需要注意的是，在实际情况中通常无法确定攻击信号的确切表达式，而衡量攻击估计性能的好坏需要从 e_y 值的拟合程度去判断。当状态的估计值能够跟踪到其实际值时，此时认为得到的攻击信号的估计值和真实信号十分接近。

4　结 论

针对受到量化影响的 CPSs，设计了一种基于中间观测器的安全控制方法，通过状态和攻击信号的估计值设计容侵控制器，并证明了闭环系统状态一致最终有界。实验结果证明该方法能够抑制量化误差的影响，在量化影响较大的情况下仍能保持较高的估计精度。因此本文提出的方法有一定的实际意义。

参考文献

[1] 程建军，王佳月，余瑞华. 浅释 Stuxnet 蠕虫病毒[J]. 才智，2011(10)：49-49

[2] Pasqualetti F, Dörfler F, Bullo F. Attack detection and identification in cyber-physical systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(11):2715-2729

[3] Do V L. Statistical detection and isolation of cyber-physical attacks on SCADA systems[C]// IECON 2017 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Beijing, China, 2017: 3524-3529

[4] Wang X Y, Luo X Y, Zhang Y Y, et al. Detection and isolation of false data injection attacks in smart grids via nonlinear interval observer[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2019, 6(4): 6498-6512

[5] Miao F, Zhu Q Y, Pajic M, et al. Coding schemes for securing cyber-physical systems against stealthy data injection attacks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 4(1): 106-117

[6] Alan Oliveira de Sá, Luiz Fernando Rust da C Carmo, Raphael C S M. Countermeasure for identification of controlled data injection attacks in networked control systems [C]//2019 II Workshop on Metrology for Industry 4.0 and IoT (MetroInd4.0&IoT), Naples, Italy, 2019: 455-459

[7] Hu Q, Fooladivanda D, Chang Y H, et al. Secure state estimation and control for cyber security of the nonlinear power systems[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2018, 5(3): 1310-1321

[8] Hu J L, Sun X X, He L, et al. Adaptive output feedback formation tracking for a class of multiagent systems with quantized input signals [J]. *Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering*, 2018, 19(9): 1086-1098

[9] Montestruque L, Antsaklis P J. Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1562-1572

[10] Yu M, Wang L, Xie G, et al, Stabilization of networked control systems with data packet dropout via switched system approach[C]//2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, Bahamas, 2004: 362-367

[11] Che W W, Li Y P, Wang Y L. H∞ tracking control for NCS with packet losses in multiple channels case[J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2011, 11(7): 6507-6521

[12] Zhou B, Duan G R, Lam J. On the absolute stability approach to quantized feedback control [J]. *Automatica*, 2010, 46: 337-346

[13] Che W W, Yang G H. Quantized dynamic output feedback H control for discrete-time systems with quantizer ranges consideration[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34: 652-658

[14] 龙跃. 网络控制系统的故障检测方法研究[D]. 辽宁: 东北大学信息科学与工程学院, 2012

[15] 俞立,白丽叶,刘安东. 量化反馈系统的鲁棒预测控制[J]. 控制工程,2012, 19(6):1033-1037

[16] Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited information[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9):1384-1400

[17] 欧洋,薛斌强,董心壮,等. 具有量化的网络不确定系统鲁棒预测控制研究[J]. 青岛大学学报(工程技术版), 2017, 32(3):31-38

[18] 朱俊威. 基于中间观测器的故障诊断和容错控制方法研究[D]. 辽宁:东北大学信息科学与工程学院, 2016

[19] 薛斌强. 基于滚动时域优化策略的网络化系统状态估计与控制器设计[D]. 上海:上海交通大学电子信息与电气工程学院, 2013

[20] 周萌,王振华,王昶,等. Lipschitz 非线性系统的 H_-/L_∞ 故障检测观测器设计[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(6):778-785

[21] Wang Z D, Shen B, Shu H S, et al. Quantized H_infty control for nonlinear stochastic time-delay systems with missing measurements [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(6): 1431-1444

[22] Qin J H, Li M L, Shi L, et al. Optimal denial-of-service attack scheduling with energy constraint over packet-dropping networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(6): 1648-1663

Secure control for cyber-physical systems with quantization

Zhu Junwei, Wu Jun, Feng Yu

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

A secure control method for the cyber-physical system (CPS) with quantization is proposed. Both of the actuator and sensor attacks are considered, and the system is subject to quantization during the transmission of information. Firstly, an intermediate observer is designed to estimate both of the system states and the attack signals, based on the estimation, an attack tolerant controller is designed. Subsequently, through the analysis of Lyapunov stability theory, the sufficient conditions are obtained for ensuring the states of the closed-loop system state to be ultimately uniformly bounded. The effect of quantization error can be suppressed by directly adjusting certain parameters without introducing any performance indices. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by a networked motion control system.

Key words: cyber-physical system (CPS), quantization, attack estimation, intermediate observer, secure control