

具有通信时滞的多无人飞行器系统编队控制研究^①

张 潘^② 姜玉莲^③

(长春工业大学电气与电子工程学院 长春 130012)

摘要 基于多智能体系统一致性理论,本文主要研究了带有通信时滞的多无人飞行器系统编队控制问题。首先考虑领导者存在的情况,提出分布式编队控制协议。进而利用图论、负矩阵分析法和李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性理论,获得了控制参数矩阵特征值的取值范围,并得到实现编队的充分条件,且通过求解线性矩阵不等式(LMI)得到通信时滞的最大容许值。最后进行仿真实验对本文方法进行验证和分析。仿真结果表明,在有向通信网络拓扑结构下,当通讯时滞和控制参数的特征值满足本文所给的条件时,设计的编队控制算法能够使二阶多无人飞行器系统实现编队目标。

关键词 无人飞行器; 多智能体; 编队控制; 通信时滞; 通信网络

0 引言

近年来,由于多智能体系统在各领域的广泛应用,使得人们对多智能体系统协调控制的研究兴趣不断增加^[1-4]。其中,编队控制作为该领域的重点研究方向之一,在飞行器、车辆、机器人等领域^[5-7]得到了普遍的应用。无人飞行器主要分为无人机和卫星两类,其中卫星集群主要有成本低、测量精度高、容错率高等优点^[8]。

一般来说,编队控制的主要问题是设计合适的控制协议,达成编队目标使各个智能体之间能够实现和保持预定的几何形状,完成相应的合作任务,如监视、勘探、搜索和救援、运送大型物体和控制卫星阵列等。编队控制主要有基于行为(behavior-based)法^[7]、虚拟结构(virtual structure)法^[9]和领导跟随(leader-following)法^[10]。基于行为法定义了无人飞行器运动的一系列基本行为,通过综合行为实现运动控制。该方法有明确的队形反馈,但是对群

体的行为没有明确意义,无法保证系统稳定性。虚拟结构法将整个编队队形看作刚体,每个无人飞行器与刚体上的点进行对应。该方法无法根据环境的变化改变队形,系统灵活性不足。领导跟随法通过引入“领导者”,从而让无人飞行器系统收敛到一个特定的轨迹^[11]。该方法数学分析简单,队形易保持,系统的稳定性有保证,因此被广泛应用。文献[12]基于一致性算法实现了多航天器系统的编队飞行。文献[13]针对多无人飞行器系统,提出了一致性理论和分散式模型预测控制。文献[14]通过领导跟随法和人工势场法,解决了多自治水下机器人(autonomous underwater vehicle, AUV)编队的避障问题。文献[15]基于雁群行为设计了一种控制协议,实现了多无人飞行器编队重构。

多无人飞行器系统中,信息交互是保证多无人飞行器编队安全稳定控制的前提,由于信息传输和处理速度有限,相邻飞行器之间的交互不可避免地存在时滞,特别是通信时滞。当通信时滞较大时,很可能因为飞行器无法完成正常的信息交流从而导致

^① 国家自然科学基金青年项目(61503045),吉林省科技厅优秀人才基金(20180520074JH),吉林省教育厅“十三五”科学技术研究(JJKH20191308KJ)和吉林省自然科学基金(20180101333JC)资助项目。

^② 男,1992 年生,硕士生;研究方向:多智能体系统协调与控制;E-mail:389112137@qq.com

^③ 通信作者,E-mail:jiang_harmony@163.com

(收稿日期:2019-08-19)

编队失败,因此研究具有通讯时滞的编队控制具有十分重要的现实意义^[16]。

本文主要研究了有向通信网络拓扑结构下,带有通信时滞的无人飞行器系统的编队控制问题。首先根据多智能体一致性理论提出多无人飞行器编队控制协议,然后利用负矩阵分析法给出了控制参数矩阵的特征值的取值范围,通过 Lyapunov 稳定性理论得到系统稳定的充分条件,并求解线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)求得通讯时滞的最大值,最后通过仿真实验验证了本文方法的有效性。

1 问题描述

1.1 图论基础

有向图 $\mathbf{G} = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{A})$ 包含 n 个节点,表示 n 个多无人飞行器,其中 $\boldsymbol{\nu} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示节点集合, $\boldsymbol{\varepsilon} \subseteq \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}$ 为图 \mathbf{G} 边的集合,图 \mathbf{G} 边的权值矩阵矩阵为 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, 当 $(v_i, v_j) \in \boldsymbol{\varepsilon}$, 且个体 j 能直接获得个体 i 的信息时, $a_{ij} = 1$; 若 $(v_i, v_j) \notin \boldsymbol{\varepsilon}$, 则 $a_{ij} = 0$ 。图 \mathbf{G} 的 Laplacian 矩阵为 $\mathbf{L} = (l_{ij})$, 其中,

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik} & i = j \end{cases}$$

在有向图中,如果存在一个节点使得任意节点到这个节点都有有向路径,则称其为强连通图。

记 $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$, 其中 \mathbf{D} 是对角矩阵,当领导者信息能被跟随者接收时, $d_i = 1$; 否则, $d_i = 0$ 。下面的引理展现 \mathbf{H} 的正稳定性与图 \mathbf{G} 的连通性之间的关系。

引理 1^[1] 当且仅当图 \mathbf{G} 包含生成树,矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$ 是正稳定的。

1.2 系统模型

本文研究的多无人飞行器系统由 n 个无人飞行器和一个领导者无人飞行器构成,其中的无人飞行器是以文献[17]中的卫星集群系统作为本文的主要研究对象,第 i 个无人飞行器的动力学线性方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i - 2\omega_0 \dot{y}_i &= u_{x_i} \\ \ddot{y}_i + 2\omega_0 \dot{x}_i - 3\omega_0^2 y_i &= u_{y_i} \\ \ddot{z}_i + \omega_0^2 z_i &= u_{z_i} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, x_i, y_i, z_i 表示第 i 个无人飞行器的位置分量信息; $u_{x_i}, u_{y_i}, u_{z_i}$ 为控制输入; ω_0 表示无人飞行器的角速率。

取 $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ 表示第 i 个跟随者无人飞行器的位置信息, $\mathbf{u}_i = [u_{x_i}, u_{y_i}, u_{z_i}]^T$ 表示第 i 个跟随者无人机的控制输入,这时,多无人飞行器系统模型式(1)可以改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(t) \\ \dot{\mathbf{r}}_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{u}_i(t) \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_0 & 0 \\ -2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

领导者的动力学方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0(t) \\ \dot{\mathbf{r}}_0(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

记 $(\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) \in \mathbf{R}^3$ 表示领导者与第 i 个跟随者的期望距离, $\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)$ 是领导者与第 i 个无人飞行器的实际距离。为明确编队控制目标,本文给出以下定义。

定义 1 当领导者与跟随者之间的距离误差和速度误差分别满足:

$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)) = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_0, \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{r}}_0(t)) = 0$ 则表明多无人飞行器式(2)、(3)能够渐近实现编队控制目标,解决编队控制问题。

考虑到各个无人飞行器之间存在通讯时滞,在有向通信网络拓扑结构下,为实现多无人飞行器系统编队飞行,本文提出如下控制协议:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) &= -\mathbf{A}_1 [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{h}_i - \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{h}_0] \\ &\quad - \mathbf{A}_2 [\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{r}}_0(t)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^N a_{ij} [\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_i(t-\tau) - \mathbf{h}_i - \mathbf{r}_j(t-\tau) + \mathbf{h}_j) \\ &\quad + \mathbf{F}_2(\dot{\mathbf{r}}_i(t-\tau) - \dot{\mathbf{r}}_j(t-\tau))] \\ &\quad + d_i [\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_0(t-\tau) - \mathbf{h}_0 - \mathbf{r}_i(t-\tau) + \mathbf{h}_i) \\ &\quad + \mathbf{F}_2(\dot{\mathbf{r}}_0(t-\tau) - \dot{\mathbf{r}}_i(t-\tau))] \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 是控制参数矩阵且 $\mathbf{F}_1 > 0, \mathbf{F}_2 > 0, \tau$ 是相邻无人飞行器之间通讯时滞。

令 $\bar{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{r}_0(t) - \mathbf{h}_0 - \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{h}_i$ 作为系统的

位置误差, $\dot{\bar{r}}(t) = \dot{\bar{r}}_0(t) - \dot{\bar{r}}_i(t)$ 作为系统的速度误差, 将编队控制协议式(4)作用于多无人飞行器系统式(2)和(3), 得到闭环系统动态为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{r}}_i(t) \\ \ddot{\bar{r}}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_i(t) \\ \dot{\bar{r}}_i(t) \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^N a_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_i(t-\tau) \\ \dot{\bar{r}}_i(t-\tau) \end{bmatrix} - d_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_i(t-\tau) \\ \dot{\bar{r}}_i(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (5)$$

显然, 对于 $\forall i$, 若闭环系统动态式(5)达到渐近稳定, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r}_i(t) = 0$ 及 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{r}}_i(t) = 0$ 成立, 就表示多无人飞行器系统式(2)和(3)完成了编队控制目标。因此, 系统式(2)和(3)的编队控制问题可转化成闭环系统动态式(5)的稳定性问题。

设复系数多项式 $R(z) = \zeta_0 + \zeta_1 z + \cdots + \zeta_n z^n$, 令 $\zeta_i \in C, i = 0, 1, \dots, n$ 。将 $z = i\varpi$ 代入 $R(z)$ 得 $R(i\varpi) = \alpha(\varpi) + i\beta(\varpi)$ 。其中, i 为虚数单位, $\alpha(\varpi), \beta(\varpi) \in R$, 首先给出引理2、3和4, 以方便得到本文结果。

引理2^[18] 对于一个复系数多项式 $R(z)$, 当且仅当对应的多项式 $\alpha(\varpi), \beta(\varpi)$ 是交错的并且 $\alpha(0)\beta'(0) - \alpha'(0)\beta(0) > 0$ 时, $R(z)$ 是赫尔维茨(Hurwitz)稳定。其中, $\alpha'(0)$ 和 $\beta'(0)$ 分别是 $\alpha(0)$ 和 $\beta(0)$ 的导数。

引理3^[19] 若多项式 $\alpha(\varpi), \beta(\varpi)$ 满足以下2个条件, 则它们是交错的。

(1) $\alpha(\varpi) = 0, \beta(\varpi) = 0$ 均只有互异的实根, 即 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{k'}$ 。

(2) 当 $|k - k'| \leq 1$ 且当 $\alpha(\varpi) = 0, \beta(\varpi) = 0$ 的根满足以下3种情况:

$$\begin{cases} \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 \cdots < \beta_{k'} < \alpha_k, k' + 1 = k \\ \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k'}, k + 1 = k' \\ \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 \cdots < \beta_{k'} < \alpha_k, \text{或者} \\ \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k'}, k = k' \end{cases}$$

引理4^[20] 设向量 $x, y \in R^n$, 对于任意的正定矩阵 $N \in R^{n \times n}$, 有 $2x^T y \leq x^T N^{-1} x + y^T N y$ 。

2 编队控制稳定性分析

令 $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)^T$, $\dot{\bar{r}} = (\dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_n)^T$, 则式(5)可以写成:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}(t) = \dot{\bar{r}}(t) \\ \ddot{\bar{r}}(t) = -(\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{H})\bar{r}(t-\tau) - (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{H})\dot{\bar{r}}(t-\tau) \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{D}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in R^{3 \times 3}$ 且 $\mathbf{F}_1 > 0, \mathbf{F}_2 > 0$ 。

令 $\xi(t) = [\bar{r}^T(t) \quad \dot{\bar{r}}^T(t)]^T$, 根据系统式(6)可得:

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{Y}\xi(t) + \mathbf{X}\xi(t-\tau) \quad (7)$$

$$\text{其中, } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{H}) & -(\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{H}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

根据牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式有:

$$\begin{aligned} \xi(t-\tau) &= \xi(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{\xi}(t+s) ds \\ &= \xi(t) - \mathbf{Y} \int_{-\tau}^0 \xi(t+s) ds \\ &\quad - \mathbf{X} \int_{-\tau}^0 \xi(t-\tau+s) ds \end{aligned} \quad (8)$$

结合式(7)和(8), 可得到:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{M}\xi(t) - \mathbf{Y}\xi(t-\tau) \\ &\quad - \mathbf{X}^2 \int_{-\tau}^0 \xi(t-\tau+s) ds \end{aligned}$$

其中,

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y} + \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -(\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{H}) & -(\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{H}) \end{bmatrix}.$$

引理5^[21] 设 $\mathbf{M} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -(\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{H}) & -(\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{H}) \end{bmatrix}, \text{ 其中, } \mathbf{F}_1 > 0, \mathbf{F}_2 >$$

> 0 。当且仅当矩阵 \mathbf{H} 是正稳定的, 而且控制参数矩阵 \mathbf{F}_1 和 \mathbf{F}_2 的任意特征值 f_1 和 f_2 满足

$$\frac{f_2^2}{f_1} > \max \frac{\operatorname{Im}^2(\theta)}{\operatorname{Re}(\theta) + |\theta|^2} \quad (9)$$

则 \mathbf{M} 是 Hurwitz 稳定, 其中 θ 是矩阵 \mathbf{H} 的特征值。

证明 取 \mathbf{M} 的任意一个特征值 z , 则 \mathbf{M} 的特征多项式为:

$$\det(z\mathbf{I}_{2np} - \mathbf{M})$$

$$\begin{aligned} &= \det \left(\begin{bmatrix} z\mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ (\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{H}) & z\mathbf{I}_n + (\mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{H}) \end{bmatrix} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n (z^2 + f_2\theta_i z + f_1\theta_i) \end{aligned}$$

其中, \mathbf{H} 的第 i 个特征值用 θ_i 表示, f_1, f_2 为 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 的任意特征值。令 $z = i\varpi$, 代入 $R(z)$ 得:

$$\begin{aligned} R(i\varpi) &= -\varpi^2 + f_2[\operatorname{Re}(\theta_i) + i\operatorname{Im}(\theta_i)]i\varpi \\ &\quad + f_1[\operatorname{Re}(\theta_i) + i\operatorname{Im}(\theta_i)] \end{aligned} \quad (10)$$

进而得到 $\alpha(\varpi) = -\varpi^2 - \operatorname{Im}(\theta_i)f_2\varpi + \operatorname{Re}(\theta_i)f_1$, $\beta(\varpi) = \operatorname{Re}(\theta_i)f_2\varpi + \operatorname{Im}(\theta_i)f_1$ 。

当 $\alpha(\varpi) = 0$ 时, $\Delta_\alpha = \operatorname{Im}^2(\theta_i)f_2^2 + 4\operatorname{Re}(\theta_i)f_1$, 因为 \mathbf{H} 是正稳定的, 所以 $\Delta_\alpha > 0$, 且 $\alpha(\varpi) = 0$ 有

$$\begin{aligned} &2 \text{ 个不相等的实根, 即 } \alpha_1 = \frac{-f_2\operatorname{Im}(\theta_i) - \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}, \alpha_2 \\ &= \frac{-f_2\operatorname{Im}(\theta_i) + \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}。 \end{aligned}$$

$$\text{当 } \beta(\varpi) = 0 \text{ 时, } \beta_1 = -\frac{f_1\operatorname{Im}(\theta_i)}{f_2\operatorname{Re}(\theta_i)}。$$

令 $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2$ 得:

$$\begin{aligned} &\frac{-f_2\operatorname{Im}(\theta_i) - \sqrt{\Delta_\alpha}}{2} < -\frac{f_1\operatorname{Im}(\theta_i)}{f_2\operatorname{Re}(\theta_i)} \\ &< \frac{-f_2\operatorname{Im}(\theta_i) + \sqrt{\Delta_\alpha}}{2} \Rightarrow f_0 = \frac{f_2^2}{f_1} > \frac{\operatorname{Im}^2(\theta_i)}{\operatorname{Re}(\theta_i) + |\theta_i|^2} \end{aligned}$$

由于 $\alpha(0)\beta'(0) - \alpha'(0)\beta(0) = f_1f_2 + |\theta_i|^2 > 0$, 所以根据引理 2 和 3 可知, \mathbf{F}_1 和 \mathbf{F}_2 的任意特征值 f_1 和 f_2 满足 $\frac{f_2^2}{f_1} > \frac{\operatorname{Im}^2(\theta_i)}{\operatorname{Re}(\theta_i) + |\theta_i|^2}$, \mathbf{M} 是 Hurwitz 稳定。

根据式 (6), 令 $\boldsymbol{\gamma}(t) = [\bar{\mathbf{r}}_1(t), \dot{\bar{\mathbf{r}}}_1(t), \dots, \bar{\mathbf{r}}_n(t), \dot{\bar{\mathbf{r}}}_n(t)]^\top$, 且 $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbf{R}^{2n \times n}$ 。此时, 有向通信拓扑结构下的系统动态方程可表示为:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\boldsymbol{\gamma}(t) - (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})\boldsymbol{\gamma}(t - \tau) \quad (11)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$$

定理 1 对于系统式(11), 当控制参数矩阵的任意特征值 f_1 和 f_2 满足

$$\frac{f_2^2}{f_1} > f_0 = \frac{\operatorname{Im}^2(\theta)}{\operatorname{Re}(\theta) + |\theta|^2} \quad (12)$$

且存在对称矩阵 $\mathbf{J} > 0, \mathbf{T} > 0, \mathbf{Q} > 0$, 同时 $\mathbf{J}, \mathbf{T}, \mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ 满足:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{11} & \boldsymbol{\eta}_{12} & \boldsymbol{\eta}_{13} \\ \boldsymbol{\eta}_{12}^\top & \boldsymbol{\eta}_{22} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\eta}_{13}^\top & \mathbf{0} & \boldsymbol{\eta}_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

则多无人飞行器系统式(11)能够实现编队飞行, 其中,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{11} &= \mathbf{J}[(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})] \\ &\quad + \tau(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \\ &\quad + [(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}))^\top \mathbf{J} + \mathbf{T}] \\ \boldsymbol{\eta}_{12} &= -\tau(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \\ \boldsymbol{\eta}_{22} &= -\mathbf{T} + \tau(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \\ \boldsymbol{\eta}_{13} &= \mathbf{J}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \\ \boldsymbol{\eta}_{33} &= -\frac{\mathbf{Q}}{\tau} \end{aligned}$$

证明 构造新的 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{J} \boldsymbol{\gamma}(t) + \int_t^{t-\tau} \boldsymbol{\gamma}^\top(s) \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}(s) ds \\ &\quad + \int_{-t}^0 \int_t^s \dot{\boldsymbol{\gamma}}^\top(s) \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) ds d\varphi \end{aligned}$$

求导得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(t) &= 2\boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) - \boldsymbol{\gamma}^\top(t - \tau) \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}(t - \tau) \\ &\quad + \tau \dot{\boldsymbol{\gamma}}^\top(t) \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) + \boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}(t) \\ &\quad - \int_{t-\tau}^t \dot{\boldsymbol{\gamma}}^\top(s) \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) ds \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{V}}(t) &= 2\boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{J}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \boldsymbol{\gamma}(t) + \boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}(t) \\ &\quad - 2\boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{J}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \boldsymbol{\gamma}(t - \tau) + \tau \dot{\boldsymbol{\gamma}}^\top(t) \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \\ &\quad - \boldsymbol{\gamma}^\top(t - \tau) \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \dot{\boldsymbol{\gamma}}^\top(s) \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) ds \end{aligned} \quad (14)$$

根据引理 4 及 $\boldsymbol{\gamma}(t - \tau) = \boldsymbol{\gamma}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) ds$ 得到:

$$\begin{aligned} &-2\boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{J}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \boldsymbol{\gamma}(t - \tau) \\ &= -2\boldsymbol{\gamma}^\top(t) \mathbf{J}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \boldsymbol{\gamma}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-\tau}^t 2\gamma^T(t) J(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \dot{\gamma}(s) ds \\
\leq & -2\gamma^T(t) J(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \gamma(t) + \int_{t-\tau}^t \dot{\gamma}^T(s) Q \dot{\gamma}(s) ds \\
& + \tau \gamma^T(t) J(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) Q^{-1} [(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) J]^T \gamma(t) \\
\dot{V}(t) \leq & 2\gamma^T(t) J(I_n \otimes A) \gamma(t) \\
& - 2\gamma^T(t) J(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \gamma(t) \\
& + \tau \gamma^T(t) J(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) Q^{-1} [(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) J]^T \gamma(t) \\
& + \tau \gamma^T(t) (I_n \otimes A)^T Q (I_n \otimes A) \gamma(t) \\
& - \tau \gamma^T(t) (I_n \otimes A)^T Q (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \gamma(t-\tau) \\
& - \tau \gamma^T(t-\tau) (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})^T Q (I_n \otimes A) \gamma(t) \\
& + \tau \gamma^T(t-\tau) (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})^T Q (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \gamma(t-\tau) \\
& - \gamma^T(t-\tau) T \gamma(t-\tau)
\end{aligned}$$

整理得 $\dot{V}(t) \leq \left[\begin{array}{c} \gamma(t) \\ \gamma(t-\tau) \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} \bar{\eta}_{11} & \bar{\eta}_{12} \\ \bar{\eta}_{12}^T & \bar{\eta}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \gamma(t) \\ \gamma(t-\tau) \end{array} \right]$

因此, $\bar{\eta} = \left[\begin{array}{cc} \bar{\eta}_{11} & \bar{\eta}_{12} \\ \bar{\eta}_{12}^T & \bar{\eta}_{22} \end{array} \right] < 0$ 是 $\dot{V}(t) < 0$ 的充要

条件,其中:

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_{11} &= J[(I_n \otimes A) - (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})] \\
&+ \tau(I_n \otimes A)^T Q (I_n \otimes A) \\
&+ [(I_n \otimes A - (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})]^T J + T \\
&+ \tau J(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) Q^{-1} (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) J \\
\bar{\eta}_{12} &= -\tau(I_n \otimes A)^T Q (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \\
\bar{\eta}_{22} &= -T + \tau(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})^T Q (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B})
\end{aligned}$$

根据文献[21]中的引理5可知 $\bar{\eta} < 0$ 的充要条件是 $\eta < 0$,因此,系统式(11)在满足定理1的条件下,能够实现定义1中的编队控制目标。

3 仿真结果

在有向通信拓扑结构下,考虑包含1个领导者和4个跟随者的多无人飞行器系统,系统的通信拓扑图如图1所示。根据图1和式(12)计算可得 $f_0 = 0.0585$ 。取控制参数矩阵 F_1 的最大特征值 $f_{1\max} = 1$, F_2 的最小特征值 $f_{2\min} = 0.5$,其解条件 $f_0 > 0.0585$,通过定理1,可知线性矩阵不等式(13)可行解,求得系统通信时滞的最大容许值为 $\tau_0 = 0.1248$ s。选取 $\mathbf{h}_0 = [15 \ -13 \ 13]^T$, $\mathbf{h}_1 = [-14 \ 6 \ 9]^T$, $\mathbf{h}_2 = [1 \ 12 \ 12]^T$, $\mathbf{h}_3 =$

$[4 \ -11 \ -8]^T$, $\mathbf{h}_4 = [-10 \ -14 \ -12]^T$ 进行仿真验证,图2(a)和(b)分别描述了通讯时滞 $\tau = 0.1$ s 时跟随者飞行器与领导者飞行器的编队位置误差和速度误差。容易看到,4个跟随者无人飞行器能渐进实现定义1中的编队控制目标,即 $t \rightarrow \infty$ 时 $(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_0(t)) \rightarrow (\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_0)$ 。图3显示了领导者

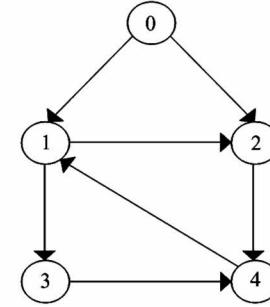
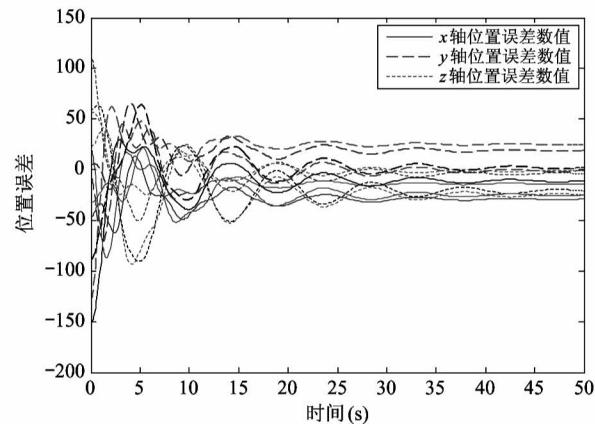
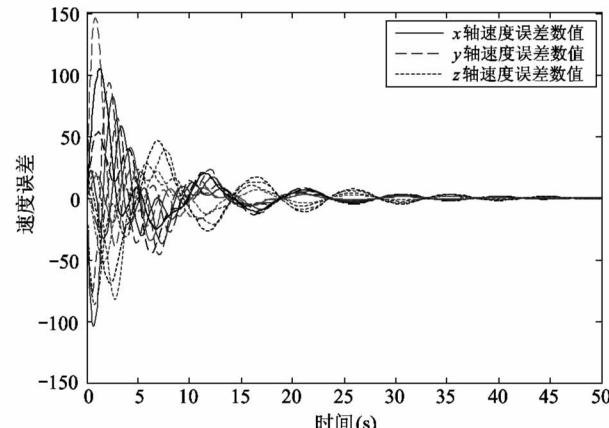


图1 通信拓扑图

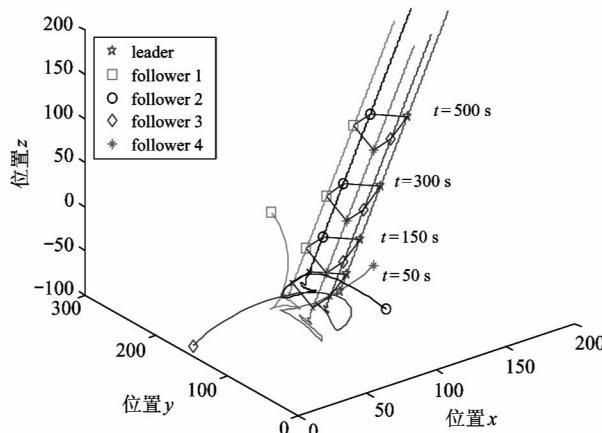


(a) 通信时滞 $\tau = 0.1$ s 时的位置误差

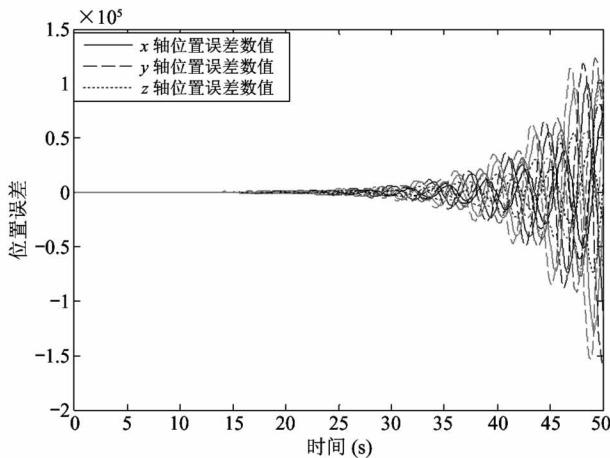


(b) 通信时滞 $\tau = 0.1$ s 时的速度误差

图2 通信时滞 $\tau = 0.1$ s 时多无人飞行器系统的运动轨迹

图 3 通信时滞 $\tau=0.1$ s 时系统的编队运动轨迹

与跟随者无人飞行器的编队飞行轨迹,表明在 $t=0$ s 时刻,无人飞行器的位置随机分布,经过一段时间后 4 个跟随者无人飞行器追随领导者实现编队,



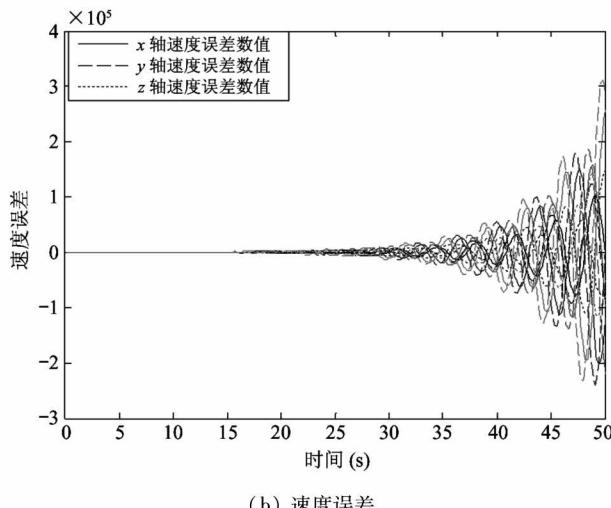
(a) 位置误差

并保持一个五边形的队形飞行,更为直观地验证系统在编队控制协议式(4)的作用下,能够渐近实现稳定性。

为进一步验证控制参数 F_1 、 F_2 和通信时滞对系统编队控制的重要性,本文另提供 2 部分仿真结果。

(1) 当通信时滞 $\tau < \tau_0$,选取新的控制参数 F_1 和 F_2 ,使其特征值为 $f_{1\max} = 1$ 和 $f_{2\min} = 0.24$,即 $f_{2\min}^2/f_{1\max} = 0.0576 < 0.0585$ 不满足约束条件时,领导者和跟随者无人飞行器的编队位置与速度差如图 4(a)和(b)所示,跟随者飞行器最终无法与领导者飞行器形成编队目标。

(2) 当控制参数满足条件式(9),设定通信时滞 $\tau > \tau_0$,即超出通信时滞上界 τ_0 时,经过仿真计算,线性矩阵不等式(13)无可行解。



(b) 速度误差

图 4 控制参数不满足约束条件时多无人飞行器系统运动轨迹

4 结 论

本文解决了有向通信拓扑结构下带有通信时滞的二阶多无人飞行器系统的编队控制问题,提出了新的编队控制律。基于图论、矩阵论和 Lyapunov 稳定性理论,利用负矩阵分析法将控制参数矩阵的特征值限定在一定范围内并给出了多无人飞行器系统能够稳定编队飞行的充分条件,且通过求解线性矩阵不等式,得到系统渐近实现编队时的最大通讯时滞允许上界。最后,通过仿真验证了所得理论结果的正确性和有效性,并证明了控制参数矩阵和通信

时滞上界对多无人飞行器系统实现编队目标的重要性。

参考文献

- [1] Hu J P, Hong Y G. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays[J]. *Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications*, 2007, 374(2): 853-863
- [2] Jiang Y L, Liu J C, Wang S Q. A consensus-based multi-agent approach for estimation in robust fault detection [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(5):1562-1568
- [3] Wu L, Su X, Shi P. Output feedback control of markovian jump repeated scalar nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(1): 199-

204

- [4] Jiang Y L, Wang H Q, Wang S Q. Distributed $H\infty$ consensus control for nonlinear multi-agent systems under switching topologies via relative output feedback [J]. *Neural Computing & Applications*, 2019, 31(1):1-9
- [5] Yan W S, Fang X P, Li J B. Formation optimization for AUV localization with range-dependent measurements noise [J]. *Communications Letters IEEE*, 2014, 18(9): 1579-1582
- [6] 张克, 邵长胜, 强文义. 基于面向 Agent 技术的任务规划系统研究 [J]. 高技术通讯, 2002, 22(5): 82-86
- [7] Lee G, Chwa D. Decentralized behavior-based formation control of multiple robots considering obstacle avoidance [J]. *Intelligent Service Robotics*, 2017, 11(1): 127-138
- [8] Shaw G B , Miller D W , Hastings D E . Generalized characteristics of communication, sensing, and navigation satellite systems [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2000, 37(6):801-811
- [9] 潘无为, 姜大鹏, 庞永杰, 等. 人工势场和虚拟结构相结合的多水下机器人编队控制 [J]. 兵工学报, 2017(2):121-129
- [10] Tian B L, Zuo Z Y, Wang H. Leader-follower fixed-time consensus of multi-agent systems with high-order integrator dynamics [J]. *International Journal of Control*, 2016, 90(7): 1420-1427
- [11] He M J, Zheng L J, Liu H. A cyberphysical-based approach to leader-following consensus for distributed multi-agent systems [J]. *High Technology Letters*, 2019, 25(2): 153-159
- [12] Cong B L, Liu X D, Chen Z. Distributed attitude syn-chronization of formation flying via consensus-based virtual structure [J]. *Acta Astronautica*, 2011, 68 (11-12):1973-1986
- [13] Kuriki Y, Namerikawa T. Formation control with collision avoidance for a multi-UAV system using decentralized MPC and consensus-based control [J]. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, 2015, 8 (4): 285-294
- [14] 丁国华, 朱大奇. 多 AUV 主从式编队及避障控制方法 [J]. 高技术通讯, 2014, 24(5):538-544
- [15] Gao Y L, Yu J Y, Shao J L, et al. Group consensus for second-order discrete-time multi-agent systems with time-varying delays under switching topologies [J]. *Neurocomputing*, 2016, 207:805-812
- [16] 周绍磊, 康宇航, 郭志强, 等. 具有通信时延下多无人机编队控制 [J]. 科技导报, 2017(7):79-84
- [17] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous [J]. *Aerospace Sciences*, 1960, 27(9): 653-658
- [18] Ogata K. Discrete-time control systems [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995: 124-137
- [19] Wang L, Huang L, Hollot C. On the robust stability of polynomials and related topics [J]. *Systems Science & Mathematical Sciences*, 1992, 5(1):42-54
- [20] Souza C E, Li X. Delay-dependent robust $H\infty$ control of uncertain linear state-delayed systems [J]. *Automatica*, 2014, 35(7):1313-1321
- [21] Xia H, Huang T Z, Shao J L, et al. Second-order leader-following consensus of multiagent systems with time delays [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 59(9): 1-8

Formation control of multi-unmanned aerial vehicle system with communication delays

Zhang Xiao, Jiang Yulian

(College of Electrical and Electronic Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012)

Abstract

This work mainly investigates the formation control problem for multi-unmanned aerial vehicle systems with considering communication delays based on the consensus theory of multi-agent systems. Firstly, considering the existence of a leader, a distributed formation control protocol is proposed. Then, by using graph theory, negative matrix analysis and Lyapunov stability, both the range of eigenvalues of control parameter matrices and sufficient conditions to achieve the formation are obtained. Furthermore, by solving the linear matrix inequality (LMI), the maximum permissible value of communication delay is provided. Finally, the verification and analysis of the proposed method is completed via the simulation experiment, which shows that, under the directed communication network, the designed formation control algorithm can realize the formation target for multi-unmanned aerial vehicle systems with second-order dynamics, as the conditions of communication delay and eigenvalues of control parameters are satisfied.

Key words: unmanned aerial vehicle, multiple-agent, formation control, communication time-delay, communication network