

一种实现 Fornasini-Marchesini 模型的新方法的研究^①

曹中泳^② 程 骅 吴徐冬子 刘 昶

(武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430080)

摘 要 针对给定的多维系统有理传递函数,对利用解析不变后向移位空间和矩阵值函数得到 Fornasini-Marchesini(F-M)状态空间模型实现矩阵的问题进行了研究,提出一种新的实现矩阵的求解方法。与前者相比,新方法根据传递函数或传递矩阵的结构特征进行变换,能够得到 F-M 状态空间模型更低阶实现矩阵,可以使求解状态空间模型的实现矩阵计算过程的复杂度得到简化,避免产生不必要的高阶次,能够得到系统更加清晰简洁的表现形式,有利于系统的分析。利用 F-M 状态空间模型的特点,将此方法运用在多输入多输出(MIMO)雷达系统中,能够提高雷达系统的工作效率。

关键词 Fornasini-Marchesini(F-M)状态空间模型;多输入多输出(MIMO)雷达;实现矩阵

0 引 言

在过去的几十年中,多维系统吸引了极大的关注,这主要归功于多维系统在各种工程领域的广泛使用和潜在使用,如信号和图像处理、热工艺、医疗应用、无线传感器网络等^[1-3]。

多维系统理论中一个基本问题是通过确定的多维状态空间模型来实现给定的有理传递函数或传递矩阵,该模型通常是 Roesser 模型或 Fornasini-Marchesini(F-M)模型。与传统的 1 维(1-D)情况不同,通常 n 维($n \geq 2$)滤波器或者系统的最小状态空间实现很难获得。因此研究可以得到低阶 n 维状态空间的实现新方法就显得格外重要。此外,许多研究人员对 Roesser 状态空间模型进行了广泛和深入的研究,只有少数文献阐述了关于 F-M 模型实现问题。比如,Alpay 和 Dubi^[4]给出了直接构建一个 n 维($n \geq 2$)F-M 实现方法。但是,这种方法求得 F-M 模型实现矩阵阶数却非常高^[5]。

本文针对 Alpay 和 Dubi^[4]的 n 维 F-M 模型的实现矩阵求解方法,提出一种新解法,该方法获取

实现矩阵的阶更低并且更易于实现。将此算法运用到多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)雷达系统中,提高了雷达目标检测^[6-8]的效率以及反应灵敏度。

1 F-M 状态空间模型

对于 n 维 MIMO 线性离散系统,F-M 状态空间模型的描述如下^[9-11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i_1 + 1, i_2 + 1, \dots, i_n + 1) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(i_1, i_2 + 1, \dots, i_n + 1) + \dots \\ &\quad + \mathbf{A}_n \mathbf{x}(i_1 + 1, \dots, i_{n-1} + 1, i_n) \\ &\quad + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(i_1, i_2 + 1, \dots, i_n + 1) + \dots \\ &\quad + \mathbf{B}_n \mathbf{u}(i_1 + 1, \dots, i_{n-1} + 1, i_n) \quad (1) \\ \mathbf{y}(i_1, \dots, i_n) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(i_1, \dots, i_n) + \mathbf{D} \mathbf{u}(i_1, \dots, i_n) \quad (2) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{x}(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{R}^r$ 、 $\mathbf{u}(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{R}^l$ 、 $\mathbf{y}(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{R}^m$ 分别是局部状态向量、输入向量、输出向量。 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 是实数矩阵,且 $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathbf{R}^{r \times r}$, $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n \in \mathbf{R}^{r \times l}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times r}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times l}$ 。

① 国家自然科学基金(61304129),国家重点研发项目(2017YFC0805100)和湖北省教育厅科学技术项目(Q20121107)资助。
② 男,1993 年生,硕士生;研究方向:多维系统理论研究等;联系人,E-mail: cinsist@foxmail.com
(收稿日期:2019-06-14)

n 维信号 $\mathbf{u}(i_1, \dots, i_n)$ 的 n 维 z 变换的定义如下。

$$U(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_n}^{\infty} \mathbf{u}(i_1, \dots, i_n) z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$$

其中, $z_1, \dots, z_n$ 是单位延迟算子。

对式(1)进行 n 维 z 变换后可得:

$$\begin{aligned} z_1^{-1} \cdots z_n^{-1} X(z_1, \dots, z_n) &= \mathbf{A}_1 z_2^{-1} z_3^{-1} \cdots z_n^{-1} X(z_1, \dots, z_n) \\ &+ \mathbf{A}_2 z_1^{-1} z_3^{-1} \cdots z_n^{-1} X(z_1, \dots, z_n) + \cdots \\ &+ \mathbf{A}_n z_1^{-1} z_2^{-1} \cdots z_n^{-1} X(z_1, \dots, z_n) \\ &+ \mathbf{B}_1 z_2^{-1} z_3^{-1} \cdots z_n^{-1} U(z_1, \dots, z_n) \\ &+ \mathbf{B}_2 z_1^{-1} z_3^{-1} \cdots z_n^{-1} U(z_1, \dots, z_n) + \cdots \\ &+ \mathbf{B}_n z_1^{-1} z_2^{-1} \cdots z_n^{-1} U(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

将 $z_1 z_2 \cdots z_n$ 整理可得:

$$\begin{aligned} X(z_1, \dots, z_n) &= (\mathbf{A}_1 z_1 + \cdots + \mathbf{A}_n z_n) X(z_1, \dots, z_n) \\ &+ (\mathbf{B}_1 z_1 + \cdots + \mathbf{B}_n z_n) U(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

若将上述等式按 $X(z_1, \dots, z_n)$ 整理可得:

$$\begin{aligned} X(z_1, \dots, z_n) &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 z_1 - \cdots - \mathbf{A}_n z_n) \\ &= (\mathbf{B}_1 z_1 + \cdots + \mathbf{B}_n z_n) U(z_1, \dots, z_n) \end{aligned} \quad (3)$$

式(2)的 n 维 z 变换如下。

$$Y(z_1, \dots, z_n) = \mathbf{C}X(z_1, \dots, z_n) + \mathbf{D}U(z_1, \dots, z_n)$$

代入式(3)后可得如下所示传递矩阵:

$$\mathbf{H}(z_1, \dots, z_n) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathbf{I}_r - \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\sum_{i=1}^n z_i \mathbf{B}_i) \quad (4)$$

其中, $z_1, \dots, z_n$ 是单位延迟算子。假设 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $|\boldsymbol{\gamma}| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ 则可以将一个 n 维单项式转变为 n 个单项式的乘积的形式, 如 $z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \cdots z_n^{\gamma_n}$ 。因此一个 n 维的多项式 $m(z_1, \dots, z_n)$ 可以由如下公式表示:

$$m(\mathbf{z}) = \sum_{0 \leq |\boldsymbol{\gamma}| \leq k} m_\gamma \mathbf{z}^\gamma \quad (5)$$

其中, $\eta = \deg m(\mathbf{z}) = \max\{|\boldsymbol{\gamma}| \mid \forall \boldsymbol{\gamma} \text{ s.t. } m_\gamma \neq 0\}$ 。

若系统的传递函数 $h(\mathbf{z}) = q(\mathbf{z})/m(\mathbf{z})$, 其中 $q(\mathbf{z})$ 和 $m(\mathbf{z})$ 是 n 维多项式, 当 $m(0, \dots, 0) \neq 0$, 则称这个系统为因果系统^[12]。如果一个有理矩阵的每一项都是因果的, 则该有理矩阵是因果有理矩阵。

对于一个给定的传递矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{z})$, 如果式(4)成

立, 则 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 被称为传递矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{z})$ 的 F-M 状态空间模型的实现, 该实现的充分必要条件就是 $\mathbf{H}(\mathbf{z})$ 是因果矩阵。由 Galkowski 教授^[13]的研究可知, 对于某个因果有理传递函数或传递矩阵, 存在很多 F-M 模型实现, 但不一定具有相同的阶次。由于状态空间实现的顺序与系统的计算或硬件实现的成本密切相关, 因此期望具有低阶状态空间实现。对于 1 维情况, 已经得到很好的发展。然而, 对于 n 维 ($n \geq 2$) 情况, 情况变得更加复杂和困难, 因此, 在 n 维情况下, 寻求低阶实现尤为重要。

本文将研究如下形式的传递矩阵的 F-M 状态空间模型的实现问题。

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{q_{11}(\mathbf{z})}{m_1(\mathbf{z})} & \cdots & \frac{q_{1l}(\mathbf{z})}{m_l(\mathbf{z})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_{nl}(\mathbf{z})}{m_l(\mathbf{z})} & \cdots & \frac{q_{nl}(\mathbf{z})}{m_l(\mathbf{z})} \end{bmatrix} \quad (6)$$

2 Alpay 和 Dubi 的实现方法

针对 n 维因果有理传递函数, Alpay 和 Dubi^[4]提出了一个构建 F-M 模型实现的建设性方法。但是 Alpay 和 Dubi 的实现方法通常会产生不必要的高阶次, 这就促使本文研究一个替代的实现方法, 考虑到给定传递函数或传递矩阵的结构特征, 阶数更低的实现方法是可行的^[11]。

如果 $F(\mathbf{z})$ 是一个矩阵值函数, 本文用 $\mathbf{M}(F(\mathbf{z}))$ 来表示 $\mathbf{C}^m$ 值函数的向量空间, 其中值函数是 $F(\mathbf{z})$ 所有列的线性组合。

定义 1 设 $\mathbf{M}$ 是 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 中的函数解析向量空间。如果相关的 Gleason 问题在 $\mathbf{M}$ 中是可解的, 则称其为解析不变量。比如, 对任意的 $f(\mathbf{z}) \in \mathbf{M}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \Omega$, 存在一个函数 $g_{1,\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{z}), \dots, g_{n,\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{z}) \in \mathbf{M}$ 满足:

$$f(\mathbf{z}) - f(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^n (z_i - \varepsilon_i) g_{i,\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{z}) \quad (7)$$

$\mathbf{G}(\mathbf{z})$ 的表达形式为 $\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{C}(\mathbf{I}_r - \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{A}_i)^{-1}$ 。

定义 2 设 $\mathbf{M}$ 是在 $\mathbf{C}^n$ 上定义的函数向量空间。若对任意 $f(\mathbf{z}) \in \mathbf{M}$ 存在 $g_1(\mathbf{z}), \dots, g_n(\mathbf{z}) \in \zeta$ 满足:

$$f(z) - f(0) = \sum_{i=1}^n z_i g_i(z) \quad (8)$$

则称 ζ 为 M 的后向移位空间。

定理 1 设 $H(z): \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{m \times l}$ (Ω 包含 $(0, \dots, 0)$), $H(z)$ 具有满足式(4)的 F-M 实现矩阵 (A, B, C, D) , 当且仅当 $M(H(z))$ 具有有限维度和解析不变后移空间 ζ 。

设 $h(z) = q(z)/m(z)$ 是单输入单输出(SISO)的多维系统有理传递函数, $q(z)$ 和 $m(z)$ 分别是分子和分母多项式。假设 $h(z)$ 是因果关系, 即 $p(0, \dots, 0) \neq 0$, 将 $k = \{\deg p(z), \deg m(z)\}$ 称为有理函数 $h(z)$ 的度。Alpay 和 Dubi^[4] 所构造空间如下:

$$\zeta = \text{span} \left\{ \frac{z^\alpha}{m(z)} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), 0 \leq |\alpha| \leq k \right\} \quad (9)$$

它的维度是有限, 并且还是 $M(h(z))$ 的后向移位空间。可以看出通过 Alpay 和 Dubi 的方法得到实现矩阵的阶数 r 与 ζ 中元素的数量相同, 并且可以由式(10)计算得到。

$$r = \sum_{i=1}^k \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!} \quad (10)$$

因此, 对于某个确定的 n , Alpay 和 Dubi 的方法所获得的实现阶数将完全由 $h(z)$ 的 k 值确定。现在容易验证, 即使对于相对较小的 n 和 k , 实现阶数通常也相当高, 随着 n 或 k 的增加, r 的值也快速增加。表 1 显示在 $n = 2, 3, 4, 5$ 和 $k = 2, 3, \dots, 6$ 的情况

$$\sigma = \text{span} \left\{ \frac{1}{m(z)}, \frac{z_1}{m(z)}, \frac{z_2}{m(z)}, \frac{z_3}{m(z)}, \frac{z_1^2}{m(z)}, \frac{z_1 z_2}{m(z)}, \frac{z_2^2}{m(z)}, \frac{z_1 z_3}{m(z)}, \frac{z_2 z_3}{m(z)}, \frac{z_3^2}{m(z)}, \frac{z_1^3}{m(z)}, \frac{z_1^2 z_2}{m(z)}, \frac{z_1 z_2^2}{m(z)}, \frac{z_2^3}{m(z)}, \frac{z_1 z_2 z_3}{m(z)}, \frac{z_1^2 z_3}{m(z)}, \frac{z_2^2 z_3}{m(z)}, \frac{z_1 z_3^2}{m(z)}, \frac{z_2 z_3^2}{m(z)}, \frac{z_3^3}{m(z)} \right\}$$

由 Alpay 和 Dubi 的方法可得 F-M 实现矩阵阶数 $r = 20$, 与式(10)所得结果一样。利用以下矩阵来代表的实现矩阵 (A, B, C, D) 。

$$A_1 = \begin{bmatrix} -m_{10} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

下, 通过 Alpay 和 Dubi 的方法获得的实现阶数。

表 1 Alpay 和 Dubi 的实现阶数

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=2$	6	10	15	21	28
$n=3$	10	20	35	56	84
$n=4$	15	35	70	126	210
$n=5$	20	55	125	251	461

但是, 文献[14, 15] 曾经提出对于 n 维情况下的实现阶数不仅取决于给定传递函数 $h(z)$ 的 k 值, 而且还取决于给定传递函数 $h(z)$ 的结构甚至系数。特别是在 n 维 ($n \geq 2$) 情况下, 具有相同 k 值但结构不同的传递函数可能具有不同实现阶数。这个事实意味着当 $h(z)$ 缺少一些单项式时得到的实现阶数远低于 Alpay 和 Dubi 不考虑结构特征的方法获得的实现阶数^[16]。

例 1

$$h(z) = \frac{q_{20} z_1^2 + q_{01} z_2 z_3}{1 + m_{10} z_1 + m_{01} z_1 z_3 + m_{11} z_1 z_2 z_3}$$

其中, $z = (z_1, z_2, z_3)$ 是独立变量, $q_{20}, q_{01}, m_{10}, m_{01}$ 为系数, 由于 $h(z)$ 的度为 3, 因为 $m(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, 显然 $h(z)$ 是因果的。

可以使用所有 $z^\alpha/p(z)$ 构造 ζ , 其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), 0 \leq |\alpha| \leq 3$ 。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{01} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$\mathbf{D} = \mathbf{0}$ 不仅满足式(4)而且它的阶次为 7,远低于 Al-pay 和 Dubi 的方法计算出来的阶次。本文所关注的是如何构建这样一个低阶实现,这将在下一节中讨论。

3 新方法步骤

步骤 1 首先取得每一列中系数非 0 的单项式 $z^\alpha = z^{\alpha_1} \cdots z^{\alpha_n}$, 然后将这些单项式组成一个如下所示的矩阵^[17,18]。

$$\tilde{\mathbf{G}}_j(z) = [\beta_{1j}(z) \quad \cdots \quad \beta_{r_jj}(z)]^T$$

(11)

步骤 2 查看 $\tilde{\mathbf{G}}_j(z)$ 中除形式为 $\frac{z_i}{m(z)}$ 的其他每一项是否都可以通过与 z_j 相乘得到,若不能,则在 $\tilde{\mathbf{G}}_j(z)$ 中插入一个新的项 $\beta_{(r+1)j}(z) = \frac{z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}}{m_j(z)}$, 重复上述步骤直至所有的项都满足此条件。重新定义 $\tilde{\mathbf{G}}_j(z)$ 行的阶数。

将 $h_j(z)$ 表示成 $h_j(z) - h_j(0) = \mathbf{C}_j \tilde{\mathbf{G}}_j(z)$, 其中 $\mathbf{C}_j$ 由 $h_j(z)$ 的多项式分子系数决定。只要 $h(z)$ 中所有 n 维单项式都被作为 $\tilde{\mathbf{G}}(z)$ 的一些项的分子, 则以上步骤始终成立。

步骤 3 构造矩阵 $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$ 。初始化 $\mathbf{A}_{il} = \mathbf{0}_{r_l, r_l}$, $\mathbf{B}_{il} = \mathbf{0} \ i = 1, \cdots, n$ 。若 $\mathbf{G}_j(z)$ 中第 s 个位置的项 $\eta_{sj}(z)$ 满足 $\eta_{sj}(z) = \frac{z_i}{m_j(z)} \ j = 1, \cdots, n$, 则可得

$$\eta_{sj}(z) = \frac{z_i}{m_l(z)} = z_i(\lambda^T \mathbf{G}_j(z) + 1)$$

(12)

其中 λ^T 为 m_l 取反后再加上 1 的式子的系数。重置 $\mathbf{B}_{ij}$, 即将第 s 个位置的项置 1, 其他的项保持不变。重置 $\mathbf{A}_{ij}$, 即第 i 行、 j 列的数值置为 λ^T 。

步骤 4 若 $\eta_{sj}(z)$ 不能够满足式(12), 即 $\eta_{sj}(z)$

$\neq \frac{z_i}{m_l(z)}, j = 1, \cdots, n$, 则可得 $\eta_{sj}(z) = z_i \lambda^T \mathbf{G}_j(z)$, 其中 λ^T 为 m_l 取反后再加上 1 的式子的系数。只需重置 $\mathbf{A}_{ij}$, 即第 i 行、 j 列的数值置为 λ^T 。

步骤 5 令 $\mathbf{A}_i = \text{diag}\{\mathbf{A}_{i1} \cdots \mathbf{A}_{in}\}$, $\mathbf{B}_i = \text{diag}\{\mathbf{B}_{i1} \cdots \mathbf{B}_{in}\}$, $\tilde{\mathbf{G}}(z) = \text{diag}\{\tilde{\mathbf{G}}_1(z), \cdots, \tilde{\mathbf{G}}_n(z)\}$, 可得式(13)。

$$\tilde{\mathbf{G}}(z) - \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{B}_i = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{G}}(z)$$

(13)

令 $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_n]$, $\mathbf{D} = \mathbf{H}(0)$, 由式(13)得:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(\mathbf{I}_r - \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{A}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{B}_i + \mathbf{D}$$

(14)

通过式(14), 构造的矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 即为 $\mathbf{H}(z)$ 的 F-M 实现。其中 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n)$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_n)$ 。

4 实例

利用上述新方法对例 1:

$$h(z) = \frac{q_{20}z_1^2 + q_{01}z_2z_3}{1 + m_{10}z_1 + m_{01}z_1z_3 + m_{11}z_1z_2z_3}$$

$$= q(z)/m(z)$$

进行实现矩阵的求解。

$$\mathbf{G}_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m(z)} & \frac{z_1}{m(z)} & \frac{z_1^2}{m(z)} & \frac{z_1z_3}{m(z)} & \frac{z_2z_3}{m(z)} & \frac{z_1z_2z_3}{m(z)} & \frac{z_3}{m(z)} \end{bmatrix}$$

$$h(z) - h(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m(z)} & \frac{z_1}{m(z)} & \frac{z_1^2}{m(z)} & \frac{z_1z_3}{m(z)} & \frac{z_2z_3}{m(z)} & \frac{z_1z_2z_3}{m(z)} & \frac{z_3}{m(z)} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & z_1q_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \mathbf{G}_1(z)(z_1\mathbf{B}_{11} + z_2\mathbf{B}_{12} + z_3\mathbf{B}_{13})$$

$$\beta_{11}(z) - \beta_{11}(0) = \frac{1}{m(z)} - \frac{1}{m(0)} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{m(z)} & \frac{z_1}{m(z)} & \frac{z_1^2}{m(z)} & \frac{z_1z_3}{m(z)} & \frac{z_2z_3}{m(z)} & \frac{z_1z_2z_3}{m(z)} & \frac{z_3}{m(z)} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & z_1q_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2q_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \mathbf{G}_1(z)(z_1\kappa_{11} + z_2\kappa_{12} + z_3\kappa_{13})$$

进一步,令 $\kappa_{j1} = \kappa_{j2} = \kappa_{j3} = 0$ 。因为 $\beta_{12}(z) = z_1\beta_{11}(z)$,按照步骤中的方法令 $\kappa_{21} = 1$ 。

同理 $\kappa_{32}(2) = \kappa_{43}(2) = \kappa_{53}(7) = \kappa_{61}(5) = \kappa_{72}(1) = 1$ 。剩余其他的项为 0。 $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_{1j}$, $\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_{1j}$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}_1(z)$, $\mathbf{C} = \mathbf{G}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, $\mathbf{D} = h(0) = 0$ 。此时实现矩阵的阶数为 $r = 7$,远低于 Alpay 和 Dubi 教授所求出的 20。

在雷达目标跟踪系统中,通常将被跟踪的目标建立如下状态方程^[19]:

$$\mathbf{X}(k+1, k) = \mathbf{F}\mathbf{X}(k) + \mathbf{Q}\omega(k-1, k-1) \quad (15)$$

而雷达的观测方程可表示为

$$\mathbf{W}(k) = h(k) + \mathbf{x}(k) + \mathbf{v} \quad (16)$$

令 $k = z$, 上述状态方程与观测方程可以转化为

$$\mathbf{X}(z+1, z) = \mathbf{F}\mathbf{X}(z) + \mathbf{Q}\omega(z, z) \quad (17)$$

$$\mathbf{W}(z) = h(z)\mathbf{x}(z) + \mathbf{v}$$

若系统矩阵 $\mathbf{v} = 0$, 则系统是严格因果系统。

基于上述公式,利用 F-M 状态空间模型来表示状态方程与观测方程^[20],对 MIMO 雷达目标检测的研究也即是对 F-M 状态空间模型的研究。

图 1 是 3 个求得坐标后的目标位置信息。

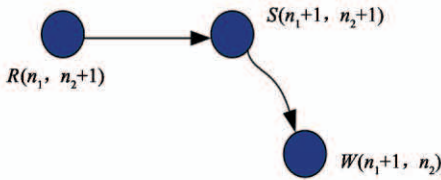


图 1 待测目标位置信息

通过定位算法进行坐标计算后,3 个位置的坐标分别用 $R = (x_r, y_r)$, $S = (x_s, y_s)$, $W = (x_w, y_w)$ 表示。则可对系统建立如下 3 维 F-M 状态空间模型:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(x_r, y_r, t+1) &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}(x_s, y_s, t+1) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}(x_w, y_w, t+1) \\ &\quad + \mathbf{A}_3\mathbf{x}(x_r, y_r, t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(x_s, y_s, t+1) \\ &\quad + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(x_w, y_w, t+1) + \mathbf{B}_3\mathbf{u}(x_r, y_r, t+1) \\ \mathbf{y}(x_r, y_r, t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(x_r, y_r, t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(x_r, y_r, t) \end{aligned} \quad (18)$$

将式(15)进行 z 变换之后,可得系统传递函数为

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2, z_3) &= \frac{Y(z_1, z_2, z_3)}{U(z_1, z_2, z_3)} \\ &= \mathbf{C}[\mathbf{I} - \mathbf{A}_1z_1^jz_2^k - \mathbf{A}_2z_1^mz_2^n - \mathbf{A}_3z_3^{-1}]^{-1} \\ &\quad \times (\mathbf{B}_1z_1^jz_2^k + \mathbf{B}_2z_1^mz_2^n + \mathbf{B}_3z_3^1) \end{aligned} \quad (19)$$

成功实现建模后,对 MIMO 雷达系统的研究就转移到 F-M 状态空间模型上。

例 2 对 MIMO 雷达系统进行系统建模后得到的 3×2 传递矩阵如下所示^[20]。

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{n_{01}z_2z_3}{m_0(z)} & \frac{n_{31}z_1z_2 + n_{32}z_2z_3}{m_2(z)} \\ \frac{n_{11}z_1 + n_{12}z_2 + n_{13}z_3}{m_0(z)} & \frac{n_{41}z_1z_2z_3}{m_2(z)} \\ \frac{n_{21}z_1z_2}{m_0(z)} & \frac{n_{51}z_2z_3 + n_{52}z_3}{m_2(z)} \end{bmatrix}$$

$$m_0(z) = 1 - d_{01}z_2 - d_{02}z_3 + d_{03}z_1z_2$$

$$m_2(z) = 1 + d_{11}z_1 - d_{12}z_1z_2 + d_{13}z_1z_2z_3$$

通过新方法可以得到以下结果:

$$\mathbf{G}_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{z_3z_2}{m_0(z)} & \frac{z_2z_1}{m_0(z)} & \frac{z_3}{m_0(z)} & \frac{z_2}{m_0(z)} & \frac{z_1}{m_0(z)} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{03} & d_{02} & d_{01} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{03} & d_{02} & d_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{03} & d_{02} & d_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因为 $\mathbf{C}_1 = \mathbf{N}_{HT1}$, $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_{HT1}\boldsymbol{\Psi}_1$, 可得:

$$N_1 = \begin{bmatrix} n_{01}z_2z_3 \\ n_{11}z_1 + n_{12}z_2 + n_{13}z_3 \\ n_{21}z_1z_2 \end{bmatrix} \quad \Psi_1 = \begin{bmatrix} z_3z_2 \\ z_2z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

代入式(13)可以得到:

$$C_1 = \begin{bmatrix} n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & n_{12} & n_{11} \\ 0 & n_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{r}_1 = 5$$

同理,另一结果如下:

$$G_2(z) = \begin{bmatrix} \frac{z_3z_2z_1}{m_2(z)} & \frac{z_2z_3}{m_2(z)} & \frac{z_2z_1}{m_2(z)} & \frac{z_3}{m_2(z)} & \frac{z_1}{m_2(z)} \end{bmatrix}^T$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{13} & 0 & d_{12} & 0 & -d_{11} \end{bmatrix} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{13} & 0 & d_{12} & 0 & -d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = N_{HT2}, \quad N_2 = N_{HT2} \Psi_2$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} n_{31}z_1z_2 + n_{32}z_2z_3 \\ n_{41}z_1z_2z_3 \\ n_{51}z_2z_3 + n_{52}z_3 \end{bmatrix} \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} z_3z_2z_1 \\ z_3z_2 \\ z_2z_1 \\ z_3 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

代入式(13)得到如下结果:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & n_{32} & n_{31} & 0 & 0 \\ n_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{51} & 0 & n_{52} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{r}_2 = 5$$

由上述结果知,传递矩阵 $H(z)$ 的实现矩阵如

下。

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{diag}\{A_{11}, A_{21}\} & A_2 &= \text{diag}\{A_{12}, A_{22}\} \\ A_3 &= \text{diag}\{A_{13}, A_{23}\} \\ B_1 &= \text{diag}\{B_{11}, B_{21}\} & B_2 &= \text{diag}\{B_{12}, B_{22}\} \\ B_3 &= \text{diag}\{B_{13}, B_{23}\} \\ C &= [C_1 \quad C_2] & D &= 0 \end{aligned}$$

若使用 Alpay 和 Dubi 所提出方法求得的实现矩阵阶数是 45,而新方法所求阶数为 10。

将此算法运用到 MIMO 雷达系统的多维处理过程中,采用 Matlab 工具进行仿真实验。图 2 与图 3 分别是 2 种方法在 x 轴与 y 轴上速度协方差的比较。Alpay 和 Dubi 算法的检测速度协方差在收敛前一直稍大于 F-M 状态空间模型的步数,并且后者的收敛速度快于前者。这表明采用新方法进行降阶后,可以提高雷达系统的定位准确度以及反应速度。

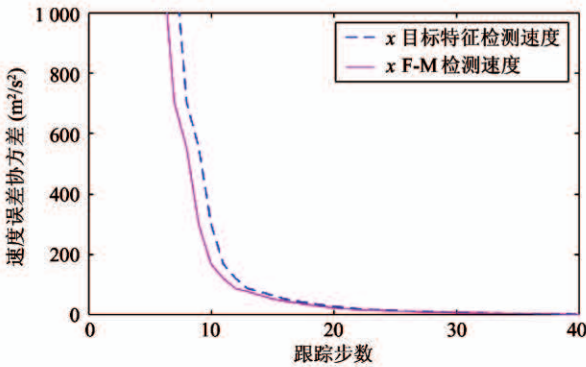


图 2 x 方向预测和更新速度误差协方差

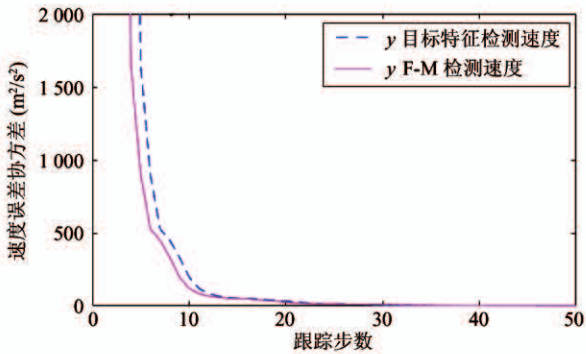


图 3 y 方向预测和更新速度误差协方差

5 结论

本文针对 n 维 F-M 模型实现问题提出了一种新的求解方法,与 Alpay 和 Dubi 的方法相比,它可

以得到更低阶实现矩阵。具体而言,即使对于简单的有理传递函数,Alpay 和 Dubi 给出的方法通常会具有不必要的高阶实现矩阵。并且,通过考虑给定传递函数或传递矩阵的结构性质,可以构造一个阶数较低的实现矩阵,并通过举例说明该方法的可实施性及有效性。将此算法运用到 MIMO 雷达系统的多维处理过程中,可以大幅降低系统的数据处理时间,提高雷达系统对所跟踪物体的反应速度和定位的准确度。今后更进一步的研究是尽可能减少约束条件,使之能够获取到更加低阶的系统实现矩阵。

参考文献

- [1] Cheng H, Sheng D Q, Xu L. A new method to the realization of n-D Fornasini-Marchesini state-space model[C] //2nd International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application, Sanya, China, 2012: 60-63
- [2] Roberts W, Stoica P, Li J, et al. Iterative adaptive approaches to MIMO radar imaging[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(1):5-20
- [3] Wang D W, Duan N J, Ma X Y, et al. High-resolution imaging using a wideband MIMO radar system[C] //International Conference on Information and Automation, Harbin, China, 2010:1150-1155
- [4] Alpay D, Dubi C. A realization theorem for rational functions of several complex variables[J]. *Systems and Control Letters*, 2003, 49(3):225-229
- [5] Fang Z, Cheng H, Cheng G. Fornasini-Marchesini model realization of MIMO radar image by elementary operation approach[C] //11th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Hefei, China, 2016: 585-590
- [6] Godrich H, Haimovich A M, Blum R S. A MIMO radar system approach to target tracking[C] //Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, California, USA, 2010:1186-1190
- [7] Hu Z T, Zhang J, Fu C L, et al. Maneuvering target tracking algorithm based on CDKF in observation bootstrapping strategy[J]. *High Technology Letters*, 2017, 23(2):35-41
- [8] Wang Q, Cui X W, Liu J, et al. Quantitative analysis of the performance of vector tracking algorithms[J]. *High Technology Letters*, 2017, 23(3):12-18
- [9] Xu L, Yan S. A new elementary operation approach to multidimensional realization and LFR uncertainty modeling: the SISO case[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2010, 21(4):343-372
- [10] 程骅, 刘天鹏. 基于多维系统的无线传感器网络移动节点定位算法[P]. 中国专利,106131960A,2016-11-16
- [11] 方之昊. 面向无线传感器网络的 Fornasini-Marchesini II 状态空间模型的研究[D]. 武汉:武汉科技大学信息科学与工程学院,2017:12-23
- [12] Lin Z. Feedback stabilization of MIMO 3-D linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(10):1950-1955
- [13] Galkowski K. State-space realisations of linear 2-D systems with extensions to the general nD ($n > 2$) case[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2001:24-30
- [14] Matsushita S Y, Saito T, Xu L. A procedure for n-D Fornasini-Marchesini state-space model realization based on right matrix fraction description[C] //International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, Canada, 2013:6133-6137
- [15] Saito Y, Matsushita S Y, Xu L. A new procedure for low-order realization of n-D systems in Fornasini-Marchesini state-space model[C] //Proceedings of SICE Annual Conference, Akita, Japan, 2012: 861-865
- [16] 田甄. 智能车辆多激光雷达目标检测系统的设计与实现[D]. 重庆:重庆邮电大学计算机科学与技术学院, 2016:31-40
- [17] 肖扬, 张颖康. 多维信号处理与多维系统[M]. 北京:电子工业出版社,2011:8-26
- [18] Xu L, Yan S. A new elementary operation approach to multidimensional realization and LFR uncertainty modeling[C] //Proceedings of SICE Annual Conference, Tokyo, Japan, 2008:2890-2894
- [19] Park S T, Lee J G. Improved Kalman filter design for three-dimensional radar tracking[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, 37(2):727-739
- [20] 逯晓玲. MIMO 雷达信号处理关键技术研究[D]. 成都:电子科技大学电子工程学院,2018:35-46

Research on a new method for realizing the Fornasini-Marchesini model

Cao Zhongyong, Cheng Hua, Wu Xudongzi, Liu Chang

(Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430080)

Abstract

For the given rational transfer function of multi-dimensional system, the problem of obtaining the state space model of Fornasini-Marchesini (F-M) by using the resolvent invariant backward shift space and matrix valued function is studied, and a new method of solving the realization matrix is proposed. Compared with the former, the lower order realization matrix of F-M state space model can be obtained according to the structural characteristics of transfer function or transfer matrix. The complexity of the calculation process of the realization matrix for solving the state-space model can be simplified, unnecessary higher order can be avoided, and a clearer and concise representation of the system can be obtained, which is beneficial to the analysis of the system. Based on the characteristics of F-M state space model, this method can be applied to MIMO radar system to improve the efficiency of the radar system.

Key words: Fornasini-Marchesini (F-M) state space model, MIMO radar, realization matrix