

基于 LMI 方法的网络化保性能 PID 控制^①

刘义才^{②*} 刘 斌* 高 俊**

(* 武汉科技大学信息科学与工程学院; 冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心 武汉 430081)

(** 武汉商学院机电工程与汽车服务学院 武汉 430056)

摘 要 针对具有双边时变时延和数据丢包的网络控制系统(NCSs),研究了基于线性矩阵不等式(LMI)方法的二阶过程网络化保性能比例积分微分(PID)控制。通过采用状态反馈的增广状态空间模型重新描述了具有典型二阶传递函数形式的控制对象和 PID 控制增益,同时结合时滞系统的分析方法,将 PID 跟踪控制器参数选择归结为 LMI 求解问题。进一步地,采用自由权矩阵、互逆凸组合以及锥补线性化方法,给出了满足性能的控制参数求解方法,实现了采用传统的 PID 控制方法实现网络化轨迹跟踪控制。最后通过示例仿真和实验,验证了本文所提方法的有效性。

关键词 网络控制系统(NCS); 线性矩阵不等式(LMI); 比例积分微分(PID); 跟踪控制

0 引 言

网络控制系统(networked control systems, NCSs)是由控制器、传感器、执行器等部件通过通信网络连接构成的闭环系统。与传统的控制系统相比,网络控制系统具有接线少、成本低、便于安装和维护等优点^[1-3]。然而数据在带宽有限的网络中进行传输时,受到网络协议类型、负载变化等因素的影响,不可避免的会产生网络时延和数据丢包,这将会引起系统性能下降甚至破坏其稳定性,因此目前它成为 NCSs 分析和设计考虑的基本问题之一^[4,5]。针对网络时延和数据丢包所带来的问题,近年来许多学者对此做了广泛研究,分别采用了时滞系统分析方法^[6,7]、异步动态系统分析方法^[8,9]、随机系统分析方法^[10,11]、预测控制分析方法^[12,13]、切换系统分析^[14,15]等方法来解决,给出了保证系统性能或者稳定的条件。

跟踪控制是指在给定跟踪性能的要求下,使被控对象输出或状态尽可能紧地跟踪预定的参考轨

迹,同时系统的稳定性也可以看成跟踪控制问题的一种特例。跟踪控制普遍存在于工业、生物和经济等领域的动态过程中,并广泛应用于机器人、导弹跟踪控制以及飞行姿态的跟踪控制。但是由于 NCSs 的时延和数据丢包的通信约束,其反馈控制信号会导致输出误差,因此在 NCSs 中实现期望的跟踪性能更具挑战性。预测控制^[16,17]、自适应控制^[18]、以及鲁棒 H_∞ 控制^[19,20]等方法常被用来实现网络控制系统中的输出跟踪问题。然而在工业应用中,比例积分微分(proportional integral derivative, PID)控制是现阶段最普遍和最流行的控制策略,因此基于现有的 PID 控制系统的改进,以适应网络通信的约束将会更有现实意义。因此,文献[21]基于标准增益和相位裕度,研究了一阶和二阶时滞 NCSs 的 PID 和 PI 控制。在文献[22]中,针对存在未知网络时延的直流电动机系统,提出了一种基于双线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)的特定 PI 调节器设计方法。文献[23]将 PID 控制器设计问题转化为静态输出反馈控制器问题。文献[24]结合了

① 国家自然科学基金(61873197, 61573263)和湖北省教育厅科学研究计划(2017280)资助项目。

② 男,1982 年生,博士生,讲师;研究方向:网络控制系统,预测控制等;联系人,E-mail: liuyicai027@wbu.edu.cn
(收稿日期:2019-06-01)

静态输出反馈和鲁棒 H^∞ 跟踪控制的特点,设计了鲁棒 H^∞ PID 控制器。

随着工业过程不断地发展,实际应用中出现的被控对象越来越复杂,因此导致了系统模型的阶数也越来越高,这也造成了计算难度的增大以及控制成本的增加。因此模型降阶理论一直都是热门研究领域。自 1966 年 Davison 提出模型降阶思想后的几十年来,针对高阶线性时不变单输入单输出(single input single output, SISO)系统或多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)系统模型,国内外学者和专家提出了大量有效的关于模型降阶的方法,例如最小实现、集结法、摄动法、模态近似法、Padé 逼近法、矩阵匹配法、平衡理论法等。他们通过对实际中存在的难以控制的高阶对象进行降阶处理,以简单的低阶模型来替代实际的高阶对象,从而降低设计控制器的难度,提高控制效果和精度。另外,由于许多工程和工业过程可以被直接建模为二阶传递函数,因此受上述研究的启发,本文针对具有双边时变时延和数据丢包的 NCSs,采用了状态反馈的增广状态空间模型重新描述了具有典型二阶传递函数形式的控制对象和 PID 控制增益,同时利用时滞系统的分析方法,在考虑时延和丢包特点的基础上,将 PID 跟踪控制器参数选择归结为 LMI 求解问题。文章最后通过仿真示例和实验验证了本文所提方法的有效性。

1 问题描述及系统模型

针对高阶系统模型,可通过模型降阶法将其进行降阶处理,从而获得等效的二阶系统模型。所获得的典型二阶被控对象传递函数模型可描述为

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

其中, a_0, a_1, b_1, b_0 为标量常数。

将传递函数式(1)转换为空间状态模型式(2)。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} =$$

$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$ 。采用 PID 控制器 $C(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s$, 可将其转化为空间状态模型形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} k_p & k_d & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + k_d b_1 \dot{\mathbf{x}}_2 \\ &= \bar{\mathbf{K}}\mathbf{W}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{其中, } \bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{1 - k_d b_1} \begin{bmatrix} k_p & k_d & k_i \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ -b_1 a_0 & b_0 - b_1 a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

图 1 所示为存在双边时变时延的网络控制系统,其中 $r(t)$ 为参考输入,对该系统作如下合理假定:

- (1) 传感器采用时间周期为 h 的驱动模式;
- (2) 执行器和控制器采用事件驱动,即当新的数据到达节点时,立即执行相关操作;
- (3) 不考虑执行器获取缓冲器数据的时间以及控制器的运算时间,只考虑从传感器到控制器反馈通道和控制器到执行器前向通道的随机时延 τ_k^{sc} 、 τ_k^{ca} , 并满足 $\bar{\tau} \leq \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} < h$;
- (4) 网络数据采用单包传输,且连续丢包数 d 有界,满足 $d \leq \bar{d}$ 。

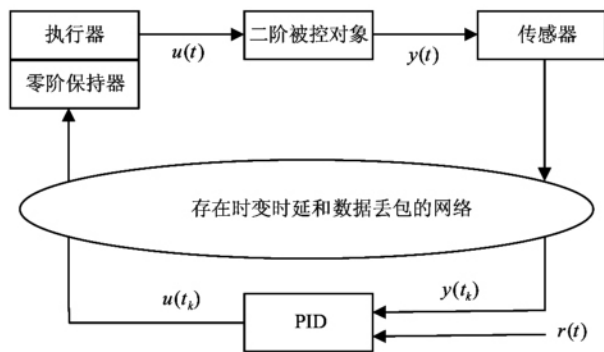


图 1 典型的网络控制系统结构图

如图 2 所示,考虑双边网络诱导时变时延和丢包的影响,传感器采样 $x(t_k h)$ 将会在时刻 $t_{k+1} h + \tau_{k+1}$ 到达执行器。

定义 $\tau(t) = t - t_k h$, $t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1})$ 为零阶保持器的保持时间,考虑系统时延和连续丢

包,则有:

$$\bar{\tau} \leq \tau(t) < (\bar{d} + 2)h = \bar{\tau}$$

因此反馈控制律可重新表述如下:

$$u(t) = Kx(t_k h) = \bar{K}W(x(t - \tau(t))),$$
$$t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1}) \quad (4)$$

其中 $K = \bar{K}W$ 。从式(2) ~ 式(4)可得闭环 NCS 模型:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau(t)),$$
$$t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1})$$
$$y(t) = Cx(t) \quad (5)$$

对于被控系统式(5),定义二次性能指标:

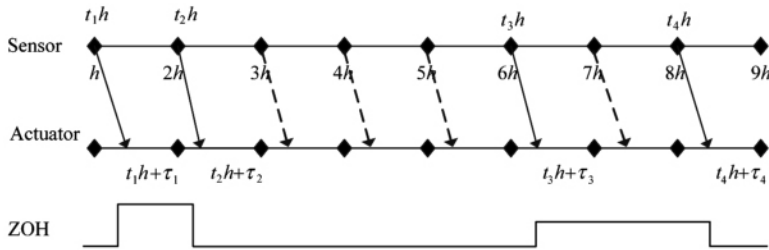


图 2 信号时序图

2 网络化 PID 控制稳定性分析

引理 1 互逆凸组合方法 (reciprocally convex approach)^[25]:假设 $f_1, f_2, \dots, f_N: \Re^m \rightarrow \Re$ 在开集 D 的子集中有正值, $D \subset \Re^m$ 。那么在集合 D 中 f_i 的相互组合满足:

$$\min_{\{\beta_i | \beta_i > 0, \sum \beta_i = 1\}} \sum_i \frac{1}{\beta_i} f_i(t) = \sum_i f_i(t) + \max_{g_{i,j}} \sum_{i \neq j} g_{i,j}(t)$$

其中, $g_{i,j}: \Re^m \rightarrow \Re, g_{i,j}(t) = g_{j,i}(t),$

$$\begin{bmatrix} f_i(t) & g_{j,i}(t) \\ g_{i,j}(t) & f_j(t) \end{bmatrix} \geq 0.$$

引理 2^[26] 对任意合适维数的矩阵 $\Xi_i (i = 1, 2)$ 和 Ω , 以及关于 t 的函数 $\eta(t), 0 \leq \eta(t) \leq \bar{\eta}$, 不等式 $\eta(t)\Xi_1 + (\bar{\eta} - \eta(t))\Xi_2 + \Omega < 0$ 成立, 当且仅当满足 $\bar{\eta}\Xi_1 + \Omega < 0$ 以及 $\bar{\eta}\Xi_2 + \Omega < 0$ 。

定理 1 给定常数 $0 \leq \underline{\tau} < \bar{\tau}$, 如果存在矩阵 $P > 0, H > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0, U, M$ 使式(7) ~ (9)成立, 则闭环控制系统式(5)是渐近稳

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)\hat{Q}x(t) + u(t)\hat{R}u(t))dt \quad (6)$$

其中 $\hat{Q}$ 和 $\hat{R}$ 是给定的对称正定权矩阵。

定义 1 考虑系统式(1)和性能指标式(6), 如果存在矩阵 K 和一个正数 J^* , 使得闭环系统式(5)渐近稳定, 且二次性能指标 $J \leq J^*$, 则称 $u(t) = \bar{K}Wx(t)$ 为系统式(1)的一个保性能控制律, 且 J^* 为闭环系统式(5)的二次性能上界。

针对网络控制系统中的时变时延和数据丢包影响, 本文的目的就是要采用 LMI 方法设计一个 PID 控制律实现轨迹跟踪, 且其二次性能不能超过一个确定的上界。

定的。

$$\begin{bmatrix} R_2 & * \\ U & R_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

$$\Xi_1 = \left(\begin{aligned} &\Xi + \bar{\tau}MH^{-1}M^T + M(e_1 - e_3) + (e_1 - e_3)^T M^T \\ &+ (\bar{\tau} - \underline{\tau})\Gamma^T H \Gamma + e_1^T (\hat{Q} + K^T \hat{R} K) e_1 \end{aligned} \right) \leq 0 \quad (8)$$

$$\Xi_2 = \left(\begin{aligned} &\Xi + \bar{\tau}MH^{-1}M^T + M(e_1 - e_3) + (e_1 - e_3)^T M^T \\ &+ e_1^T (\hat{Q} + K^T \hat{R} K) e_1 \end{aligned} \right) \leq 0 \quad (9)$$

其中, $M = [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T]^T, e_1 = [I \ 0 \ 0 \ 0], e_3 = [0 \ 0 \ I \ 0],$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * & * & * \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & * & * \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & \Xi_{33} & * \\ 0 & \Xi_{42} & \Xi_{43} & \Xi_{44} \end{bmatrix}, \Gamma = [A \ 0 \ BK \ 0],$$

$$\Xi_{11} = A^T P + PA + Q_1 + \tau^2 A^T R_1 A + (\bar{\tau} - \underline{\tau})^2 A^T R_2 A$$

$$\begin{aligned} -R_1, \Xi_{21} &= R_1, \Xi_{22} = Q_2 - Q_1 - R_1 - R_2, \Xi_{31} = \\ K^T B^T P + \tau^2 K^T B^T R_1 A + (\bar{\tau} - \tau)^2 K^T B^T R_2 A, \Xi_{32} &= - \\ U + R_2, \Xi_{33} &= \tau^2 K^T B^T R_1 B K + (\bar{\tau} - \tau)^2 K^T B^T R_2 B K - \\ (2R_2 - U^T - U), \Xi_{42} &= U, X_{43} = -U + R_2, \Xi_{44} = - \\ Q_2 - R_2. \end{aligned}$$

证明:构建 Lyapunov-Krasovskii 函数。

$$V(t) = \sum_{i=1}^4 V_i(t, x_i),$$

$$t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1}),$$

其中, $V_1(t, x_i) = x^T(t) P x(t)$,

$$V_2(t, x_i) = \int_{t-\tau}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau} x^T(s) Q_2 x(s) ds,$$

$$V_3(t, x_i) = \left[\begin{array}{l} \tau \int_{t-\tau}^t \int_s^t \dot{x}^T(v) R_1 \dot{x}(v) dv ds \\ + (\bar{\tau} - \tau) \int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau} \int_s^t \dot{x}^T(v) R_2 \dot{x}(v) dv ds \end{array} \right],$$

$$V_4(t, x_i) = (\tau_2 - \tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) H \dot{x}(s) ds.$$

对其求导,可得:

$$\dot{V}_1(t, x_i) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t, x_i) &= \\ \left[\begin{array}{l} x^T(t) Q_1 x(t) + x^T(t - \tau_1) (Q_2 - Q_1) x(t - \tau_1) \\ - x^T(t - \tau_2) Q_2 x(t - \tau_2) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t, x_i) &\leq \left[\begin{array}{l} \tau^2 \dot{x}^T(t) R_1 \dot{x}(t) - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\ + (\bar{\tau} - \tau)^2 \dot{x}^T(t) R_2 \dot{x}(t) \\ - (\bar{\tau} - \tau) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \end{array} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t, x_i) &\leq - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) H \dot{x}(s) ds \\ &\quad + (\bar{\tau} - \tau(t)) \dot{x}^T(t) H \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

继续对式(12)中的积分部分采用 Jensen 不等式,可得:

$$\begin{aligned} -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\ \leq \left[\begin{array}{l} -x^T(t) R_1 x(t) + x^T(t) R_1 x(t - \tau) \\ + x^T(t - \tau) R_1 x(t) - x^T(t - \tau) R_1 x(t - \tau) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$- (\bar{\tau} - \tau) \int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\bar{\tau} - \tau}{\tau(t) - \tau} [x^T(t - \tau) - x^T(t - \tau(t))] \\ R_2 [x(t - \tau) - x(t - \tau(t))] \\ -\frac{\bar{\tau} - \tau}{\bar{\tau} - \tau(t)} [x^T(t - \tau(t)) - x^T(t - \bar{\tau})] \\ R_2 [x(t - \tau(t)) - x(t - \bar{\tau})] \end{array} \right\} \quad (15)$$

若存在矩阵 U 满足式(7),对式(15)采用引理

1,可得:

$$\begin{aligned} -(\bar{\tau} - \tau) \int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\ \leq - \left[\begin{array}{l} x^T(t - \tau) R_2 x(t - \tau) \\ + x^T(t - \tau) (U^T - R_2) x(t - \tau(t)) \\ - x^T(t - \tau) U^T x(t - \bar{\tau}) \\ + x^T(t - \tau(t)) (U - R_2) x(t - \tau) \\ + x^T(t - \tau(t)) (2R_2 - U^T - U) x(t - \tau(t)) \\ + x^T(t - \tau(t)) (U^T - R_2) x(t - \tau_2) \\ - x^T(t - \bar{\tau}) U x(t - \tau) \\ + x^T(t - \bar{\tau}) (U - R_2) x(t - \tau(t)) \\ + x^T(t - \bar{\tau}) R_2 x(t - \bar{\tau}) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

令 $\xi^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t - \tau) \ x^T(t - \tau(t)) \ x^T(t - \bar{\tau})]$, 根据牛顿-莱布尼茨公式以及选取任意自由权矩阵 M ,可得:

$$2\xi^T(t) M [x(t) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds] = 0 \quad (17)$$

应用柯西不等式可得:

$$\begin{aligned} -2\xi^T(t) M \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ \leq \tau(t) \xi^T(t) M H^{-1} M^T \xi(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) H \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (18)$$

综合式(7)~式(18)有:

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \\ \xi^T(t) &\left[\begin{array}{l} \Xi + \tau(t) M H^{-1} M^T \\ + 2M(e_1 - e_3) + (\bar{\tau} - \tau(t)) \Gamma^T(t) H \Gamma \end{array} \right] \xi(t) \end{aligned} \quad (19)$$

由于 $\tau \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$, 根据引理2,当满足定理条件式(7)~式(9)时,则有:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \Xi + \tau(t)MH^{-1}M^T \\ + 2M(e_1 - e_3) + (\bar{\tau} - \tau(t))\Gamma^T(t)H\Gamma \end{array} \right] \\ & < -e_1^T(\hat{Q} + K^T\hat{R}K)e_1 \end{aligned} \quad (20)$$

因此有 $\dot{V}(t) < 0$, 闭环控制系统式(5)渐近稳定。
根据式(19)和式(20), 则 $\dot{V}(t) \leq -x^T(t)(\hat{Q} + K^T\hat{R}K)x(t)$, 将其两边对时间从 0 到 ∞ 求积分, 可得:

$$\begin{aligned} -V(0) &= \int_0^\infty \dot{V}(t) dt \\ &\leq -\int_0^\infty x^T(t)(\hat{Q} + K^T\hat{R}K)x(t) dt \\ &= -\int_0^\infty x^T(t)\hat{Q}x(t) + u^T(t)\hat{R}u(t) dt \end{aligned}$$

因此满足 $J = \int_0^\infty [x^T(t)\hat{Q}x(t) + u^T(t)\hat{R}u(t)] < V(0)$, 求得性能指标上界为 $V(0)$ 。证毕。

3 网络化 PID 控制器设计

定理 2 给定常数 $0 \leq \underline{\tau} < \bar{\tau}$, 如果存在矩阵 $X > 0, Y > 0, \tilde{H} > 0, \tilde{Q}_1 > 0, \tilde{Q}_2 > 0, \tilde{R}_1 > 0, \tilde{R}_2 > 0, \tilde{U}$ 以及 $\tilde{M}$ 使式(21) ~ (23)成立, 则闭环控制系统式(5)渐近稳定, 且控制器增益为 $\bar{K} = YX^{-1}W^{-1}$ 。

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & * \\ \tilde{U} & \tilde{R}_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA^T + AX + \tilde{Q}_1 \\ -\tilde{R}_1 + \tilde{M}_1 + \tilde{M}_1^T \end{pmatrix} & * & * & * & * & * & * & * \\ \tilde{R}_1 + \tilde{M}_2 & \begin{pmatrix} \tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_1 \\ -\tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 \end{pmatrix} & * & * & * & * & * & * \\ (Y^TB^T + \tilde{M}_3 - \tilde{M}_1^T) & -(\tilde{U} - \tilde{R}_2) - \tilde{M}_2^T & \begin{bmatrix} -(2\tilde{R}_2 - \tilde{U}^T - \tilde{U}) \\ -\tilde{M}_3 - \tilde{M}_3^T \end{bmatrix} & * & * & * & * & * \\ \tilde{M}_4 & \tilde{U} & -(\tilde{U} - \tilde{R}_2) - \tilde{M}_4' & (-\tilde{Q}_2 - \tilde{R}_2) & * & * & * & * \\ \sqrt{\tau} \tilde{M}_1^T & \sqrt{\tau} \tilde{M}_2^T & \sqrt{\tau} \tilde{M}_3^T & \sqrt{\tau} \tilde{M}_4^T & -\tilde{H} & * & * & * \\ \underline{\tau}AX & 0 & \underline{\tau}BY & 0 & 0 & -X\tilde{R}_1^{-1}X & * & * \\ (\bar{\tau} - \underline{\tau})AX & 0 & (\bar{\tau} - \underline{\tau})BY & 0 & 0 & 0 & -X\tilde{R}_2^{-1}X & * \\ \sqrt{(\bar{\tau} - \underline{\tau})}AX & 0 & \sqrt{(\bar{\tau} - \underline{\tau})}BY & 0 & 0 & 0 & 0 & -X\tilde{H}^{-1}X \\ \hat{Q}X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{Q} \\ \hat{R}Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA^T + AX + \tilde{Q}_1 \\ -\tilde{R}_1 + \tilde{M}_1 + \tilde{M}_1^T \end{pmatrix} & * & * & * & * & * & * & * \\ \tilde{R}_1 + \tilde{M}_2 & \begin{pmatrix} \tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_1 \\ -\tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 \end{pmatrix} & * & * & * & * & * & * \\ (Y^TB^T + \tilde{M}_3 - \tilde{M}_1^T) & -(\tilde{U} - \tilde{R}_2) - \tilde{M}_2^T & \begin{bmatrix} -(2\tilde{R}_2 - \tilde{U}^T - \tilde{U}) \\ -\tilde{M}_3 - \tilde{M}_3^T \end{bmatrix} & * & * & * & * & * \\ \tilde{M}_4 & \tilde{U} & -(\tilde{U} - \tilde{R}_2) - \tilde{M}_4' & (-\tilde{Q}_2 - \tilde{R}_2) & * & * & * & * \\ \sqrt{\tau} \tilde{M}_1^T & \sqrt{\tau} \tilde{M}_2^T & \sqrt{\tau} \tilde{M}_3^T & \sqrt{\tau} \tilde{M}_4^T & -\tilde{H} & * & * & * \\ \underline{\tau}AX & 0 & \underline{\tau}BY & 0 & 0 & -X\tilde{R}_1^{-1}X & * & * \\ (\bar{\tau} - \underline{\tau})AX & 0 & (\bar{\tau} - \underline{\tau})BY & 0 & 0 & 0 & -X\tilde{R}_2^{-1}X & * \\ \hat{Q}X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{Q} \\ \hat{R}Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

证明:对式(8)采用舒尔补引理,可得式(24)。

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + PA + Q_1 \\ -R_1 + M_1 + M_1^T \end{pmatrix} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ R_1 + M_2 & \begin{pmatrix} Q_2 - Q_1 \\ -R_1 - R_2 \end{pmatrix} & -(U^T - R_2) - M_2 & * & * & * & * & * & * & * \\ (K^T B^T P + M_3 - M_1^T) & -(U - R_2) - M_2^T & \begin{bmatrix} -(2R_2 - U^T - U) \\ -M_3 - M_3^T \end{bmatrix} & * & * & * & * & * & * & * \\ M_4 & U & -(U - R_2) - M_4 & (-Q_2 - R_2) & * & * & * & * & * & * \\ \sqrt{\tau} M_1^T & \sqrt{\tau} M_2^T & \sqrt{\tau} M_3^T & \sqrt{\tau} M_4^T & -H & * & * & * & * & * \\ \tau A & 0 & \tau B K & 0 & 0 & -R_1^{-1} & * & * & * & * \\ (\bar{\tau} - \tau) A & 0 & (\bar{\tau} - \tau) B K & 0 & 0 & 0 & -R_2^{-1} & * & * & * \\ \sqrt{(\bar{\tau} - \tau)} A & 0 & \sqrt{(\bar{\tau} - \tau)} A & 0 & 0 & 0 & 0 & -H^{-1} & * & * \\ \hat{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{Q} & * \\ \hat{R} K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{R} \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

令 $X = P^{-1}$, $Y = KX$, $\tilde{Q}_1 = XQ_1X$, $\tilde{Q}_2 = XQ_2X$, $\tilde{R}_1 = XR_1X$, $\tilde{R}_2 = XR_2X$, $\tilde{H} = XHX$, $\tilde{U} = XUX$ 以及 $\tilde{M}_j = XM_jX$, $1 \leq j \leq 4$ 。则有 $K = \bar{K}W = YX^{-1}$ 。对式(24)左右分别乘 $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, R_1^{-1}, R_2^{-1}, H^{-1}, I, I\}$ 和它的转置,可得定理2条件中的式(23),同样可以从式(9)得到定理2条件中的式(23)。对式(7)分别左右乘 $\text{diag}\{X, X\}$ 和它的转置,可得式(21)。证毕。

注意到在定理2条件中存在非线性项 $X\tilde{R}_1^{-1}X$, $X\tilde{R}_2^{-1}X$, $X\tilde{H}^{-1}X$ 。为了能够采用 LMI 工具来求解控制器,首先假设存在矩阵 $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $L_3 > 0$ 满足:

$$-L_3 \geq -X\tilde{H}^{-1}X, \quad -L_i \geq -X\tilde{R}_i^{-1}X, \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

然后对式(25)采用舒尔补引理可得式(26)。

$$\begin{bmatrix} -\tilde{H}^{-1} & X^{-1} \\ X^{-1} & -L_3^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} -\tilde{R}_i^{-1} & X^{-1} \\ X^{-1} & -L_i^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

引入 X_N , R_{1N} , R_{2N} , L_{1N} 和 L_{2N} , 则式(26)可重新写成式(27)和式(28)。

$$\begin{bmatrix} -\tilde{H}_N & X_N \\ X_N & -L_{3N} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} -\tilde{R}_{iN} & X_N \\ X_N & -L_{iN} \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} XX_N &= I, \tilde{R}_1 \tilde{R}_{1N} = I, \tilde{R}_2 \tilde{R}_{2N} = I, \tilde{H} \tilde{H}_N = I, \\ L_1 L_{1N} &= I, L_2 L_{2N} = I, L_3 L_{3N} = I \end{aligned} \quad (28)$$

因此定理2可行解的问题转化为以下 LMI 最优化问题:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \text{tr}(XX_N + \tilde{R}_1 \tilde{R}_{1N} + \tilde{R}_2 \tilde{R}_{2N} + \tilde{H} \tilde{H}_N + \sum_{i=1}^3 L_i L_{iN}) \\ \text{subject to } & \text{式(21)} \sim \text{式(23)} \text{ 和式(27)} \text{ 得:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & * \\ 0 & X_N \end{bmatrix} &> 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & * \\ 0 & \tilde{R}_{iN} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2 \\ \begin{bmatrix} \tilde{H} & * \\ 0 & \tilde{H}_N \end{bmatrix} &> 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{L}_j & * \\ 0 & \tilde{L}_{jN} \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

其中,式(22)和式(23)中的 $X\tilde{R}_1^{-1}X$, $X\tilde{R}_2^{-1}X$ 和 $X\tilde{H}^{-1}X$ 分别被 L_1 , L_2 , L_3 代替。

进一步地,可以采用 CCL^[27] 算法求解控制器增益 $\bar{K} = YX^{-1}W^{-1}$, 从而可以获得相应的 PID 控制器参数。

4 数值仿真与实验

4.1 数值仿真

首先通过设计数值仿真示例来验证所提算法的有效性。控制对象采用 Quanser 公司的直流伺服电机驱动模型,网络采用基于 Matlab/Simulink 的 Tru-

etime 工具箱模拟实现。

图 3 所示的是直流电机电枢回路和齿轮传动的工作原理,可建立其电机输入电压 V_i 和负载转动角 θ_l 的传递函数形式:

$$\frac{\theta_l(s)}{V_i(s)} = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t}{s(R_m(\eta_g K_g^2 J_m + J_l)s + k_m \eta_g K_g^2 \eta_m k_t + R_m B_{eq})}$$

其中, $R_m = 2.6 \Omega$ 、 $k_t = 7.68 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/A}$ 、 $\eta_m = 0.69$ 、 $k_m = 7.68 \times 10^{-3} \text{ V}/(\text{rad/s})$ 、 $J_m = 4.61 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $K_g = 70$ 、 $J_l = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $B_{eq} = 1.5 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{rad/s})$ 和 $\eta_g = 0.90$ 分别表示电机电枢电阻、电机转矩常数、电机转动效率、电机反电动势常数、电机驱动轴转动惯量、齿轮箱齿轮转动效率、负载轴转动惯量、等效粘滞阻尼系数以及电机转动效率。带入相应的值得其电机输入电压 V_i 和负载转动角 θ_l 的二阶模型

$$\frac{\theta_l(s)}{V_i(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s} = \frac{36.96}{s^2 + 24.15s}$$
。进一步地,根据式(2)可得相应的空间

状态模型参数 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -24.15 & 0 \\ 36.96 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 36.96 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

为了验证本文所提网络化保性能 PID 跟踪控制算法的有效性,设网络控制系统中的传感器采用周期 $h = 40 \text{ ms}$, $10 \text{ ms} \leq \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} < h$, 且连续丢包最多

为 2 个,则 $\tau(t) \in [10, 160) \text{ ms}$,同时 PID 控制器采用传感器采样周期时间进行离散化。考虑系统丢包最坏的情况,即每 3 个数据包中连续丢包 2 个,数据传输序列为 $\cdots 100100100 \cdots$, 1 代表数据包成功传输,0 代表丢包。

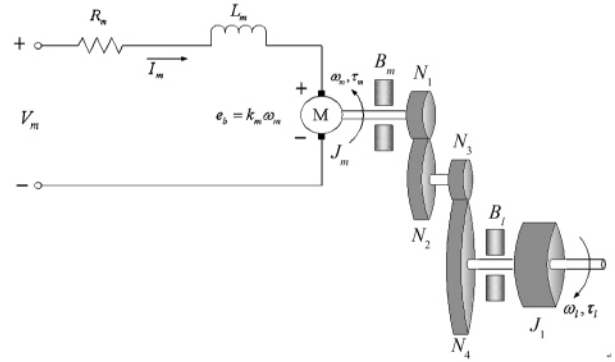


图 3 直流伺服电机电枢回路和齿轮传动的原理图

表 1 给出了根据定理 2 在不同二次性能指标参数下的 PID 控制器以及对应的直流电机阶跃响应性能指标,其中上升时间 t_r 表示在暂态过程中,输出第一次达到对应于输入的终值的时间(从 $t = 0$ 开始计时);峰值时间 t_p 对应于最大超调量发生的时间;超调量 M_p 表示为在暂态期间输出超过对应于输入的终值的最大偏离量的百分比;调整时间 t_s 表示输出与其对应于输入的终值之间的偏差达到容许范围(取 5%)所经历的暂态过程时间。图 4 是相应的阶跃响应曲线。从表 1 和图 4 可以看出,通过改变参数 $\hat{Q}(1,1), \hat{Q}(2,2)$ 和 $\hat{Q}(3,3)$,可相应的调整 PID 控制器中的 k_p, k_i, k_d 参数。例如当图 4(a) 中

表 1 不同二次性能指标参数下的 PID 控制器以及对应的直流电机阶跃响应性能指标

序号	$\hat{Q}, \hat{R}$	k_p	k_i	k_d	t_r (s) (上升时间)	t_p (s) (峰值时间)	M_p (%) (超调量)	t_s (s) (调整时间)
1	$\hat{Q} = \text{diag}(1, 1, 1),$ $\hat{R} = 10$	0.6571	0.3164	0.0267	2.2560	4.5870	9.8209	9.3010
2	$\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1, 1),$ $\hat{R} = 10$	1.0818	0.3158	0.0425	1.8300	3.7550	4.4414	\
3	$\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1,$ $1.5 \times 10^{-2}), \hat{R} = 10$	0.8855	0.0387	0.0349	2.8060	5.6540	1.8376	\
4	$\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1,$ $10^{-4}), \hat{R} = 10$	0.8573	0.0338	0.0032	5.3410	10.7560	0.0925	\

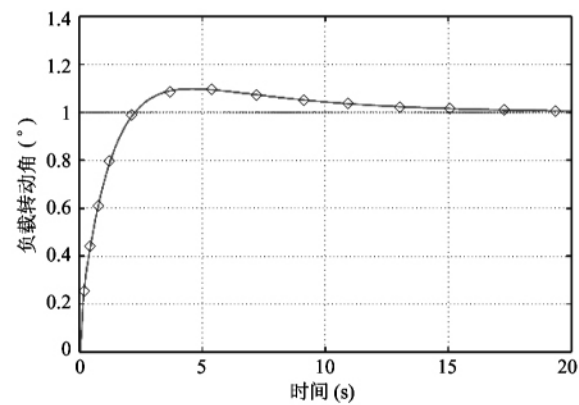
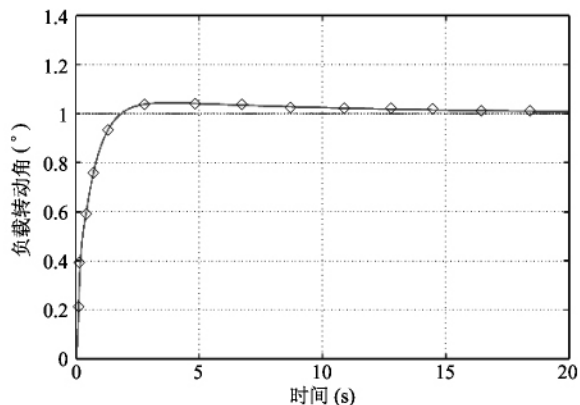
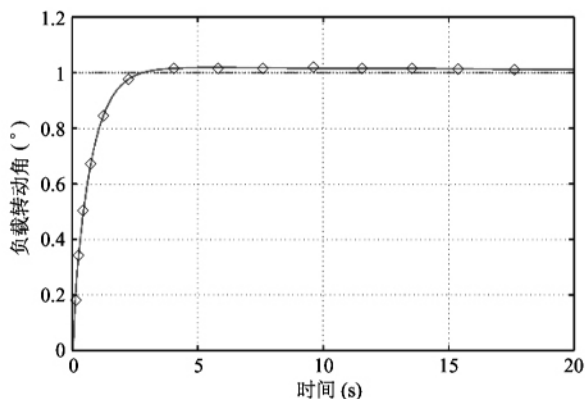
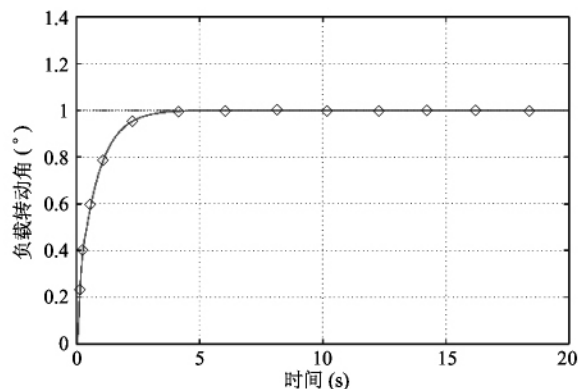

 (a) $\hat{Q} = \text{diag}(1, 1, 1)$, $\hat{R} = 10$

 (b) $\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1, 1)$, $\hat{R} = 10$

 (c) $\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1, 1.5 \times 10^{-2})$, $\hat{R} = 10$

 (d) $\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1, 10^{-4})$, $\hat{R} = 10$

图 4 不同二次型参数下所对应直流伺服电机的阶跃响应曲线

的调整时间过长时,可适当增大 $\hat{Q}(1, 1)$ 而获得大的 k_p ; 如图 4(b) 中存在超调量时,可以减小 $\hat{Q}(3, 3)$ 而获得较小的 k_i 。通过反复调整参数和仿真以获得较好的阶跃响应性能。

进一步考虑文献[28, 29]中采样周期为 0.04 s 的四阶离散系统模型。它是由直流电机、负载板、速度和角度传感器组成的伺服电机控制系统,其模型传递函数为

$$G(z) = \frac{0.05409Z^{-2} + 0.115Z^{-3} + 0.0001Z^{-4}}{1 - 1.12Z^{-1} - 0.213Z^{-2} + 0.335Z^{-3}}$$

采用双线性变换可得对应的连续传递函数

$$G(s) = \frac{-0.03868s^4 + 7.303s^3 - 171.1s^2 - 18320s + 672700}{s^4 + 219.8s^3 + 10220s^2 + 86670s + 7952}$$

继续采用 Padé 逼近法进行系统降阶处理,可得典型结构的二阶系统形式:

$$G(s) = \frac{-2.883s + 76.01}{s^2 + 9.774s + 0.8981}$$

将该伺服电机置入网络控制系统中,设传感器采样周期 $h = 50 \text{ ms}$, $20 \text{ ms} \leq \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} < h$, 且连续丢包最多为 2 个,则 $\tau(t) \in [20, 200) \text{ ms}$, 同时 PID 控制器采用传感器采样周期时间进行离散化。根据定理 2, 选择参数 $\hat{Q} = \text{diag}(1 \times 10^4, 1, 2 \times 10^{-2})$, $\hat{R} = 100$, 可得相应的 PID 控制器参数 $k_p = 0.1295$, $k_i = 0.0136$, $k_d = 0.0124$ 。针对网络中的时变时延,以及假设数据传输序列...1101111001... (丢包率达到了 30%), 给出了在该 PID 控制器下的高阶系统模型和等效的低阶二阶系统模型的网络化 PID 阶跃响应仿真曲线,如图 5 所示。从图中可以看出,两者有着几乎相同的运行轨迹,且同样展现出了较好的阶跃响应性能。

4.2 实验

根据数值仿真中的第一个示例,采用 Quanser

公司提供的基于 Matlab/Simulink 通信模块构建了真实的网络化直流伺服电机控制系统。如图 6 所示,台式计算机(PC1)通过网线接入实验室所在楼层的局域网,笔记本电脑(PC2)作为控制器通过无线 Wi-Fi 接入。通过 ping 命令获取 PC1 到 PC2 的网络时延值大小,如图 7 所示,其时延值绝大部分分布在 20 ms 以下,基本符合仿真中给出的假设条件。

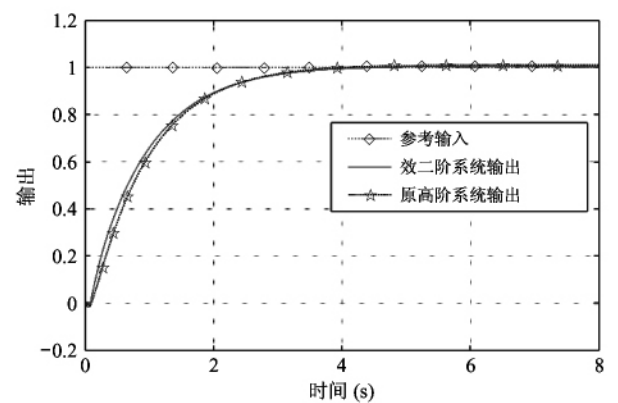


图 5 直流电机不同系统模型下的阶跃响应曲线

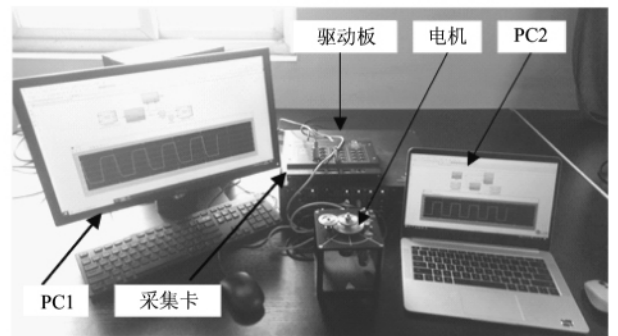


图 6 网络化直流伺服电机控制系统

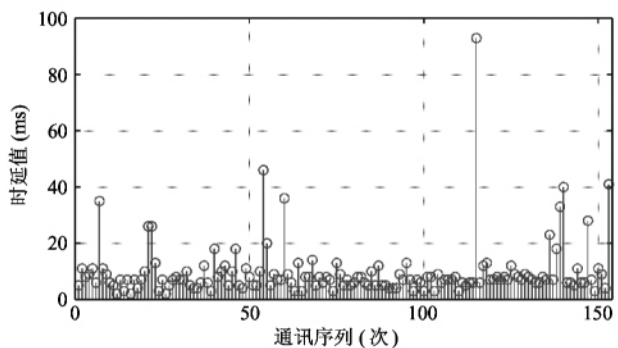


图 7 本地局域网中的网络时延

在图 6 中,PC1 与驱动板构成执行器模块驱动直流伺服电机转动,并且与数据采集卡构成传感器

模块获取电机的位置信息。采用 UDP 网络通信协议,PC1 通过网络向控制器(PC2)发送和接收信号,并将信号发送给伺服系统。考虑电机在转动过程中存在一定的机械摩擦等因素,因此在实验中选取了表 1 中的第 3 个 PID 控制器参数。实验结果图 8 给出了在控制器 PC2 端得到的直流伺服电机角度位置跟踪响应曲线。

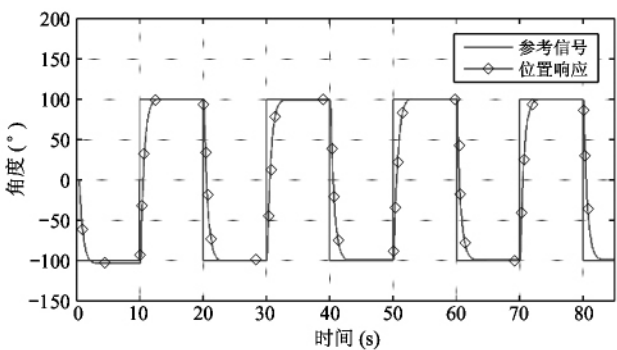


图 8 直流伺服电机位置跟踪响应曲线

5 结 论

本文针对实际工程和工业过程具有二阶传递函数的对象,将 PID 跟踪控制器参数选择归结为 LMI 求解凸优化的系统稳定性问题,实现了网络化 PID 跟踪控制。针对高阶系统对象,可事先对系统对象模型进行降阶,进而采用本文所提的方法进行处理。文章最后通过数值仿真,证明了本文所提方法的有效性。并在伺服电机系统上进行验证,达到了对给定的参考方波信号快速平稳跟踪的效果。

参考文献

[1] 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述[J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 101-118

[2] Gupta R A, Chow M Y. Networked control system: overview and research trends[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2010, 57(7): 2527-2535

[3] Zhang D, Shi P, Wang Q G, et al. Analysis and synthesis of networked control systems: a survey of recent advances and challenges[J]. ISA Transactions, 2017, 66: 376-392

[4] 吴祥, 王军晓, 王瑶为, 等. 基于 ADRC 的网络化运动控制系统高精度轮廓跟踪控制[J]. 高技术通讯,

- 2018, 28(9-10):835-842
- [5] Tan C, Li L, Zhang H. Stabilization of networked control systems with both network-induced delay and packet dropout[J]. *Automatica*, 2015, 59:194-199
- [6] 金澄, 刘斌. 时变时延网络系统的滑模控制器研究[J]. *高技术通讯*, 2018, 28(11-12):964-971
- [7] Peng C, Yang T C. Event-triggered communication and H_∞ control co-design for networked control systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(5):1326-1332
- [8] Bu X H, Hou Z S. Stability of iterative learning control with data dropouts via asynchronous dynamical system [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2011, 8(1):29-36
- [9] Halder K, Das S, Dasgupta S, et al. Controller design for networked control systems—an approach based on L_2 induced norm [J]. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2016, 19:134-145
- [10] 刘义才, 刘斌, 张永, 等. 具有双边随机时延和丢包的网路控制系统稳定性分析[J]. *控制与决策*, 2017, 32(9):1565-1573
- [11] Wang J H, Zhang Q L, BAI F. Robust control of discrete-time singular Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities by static output feedback [J]. *International Journal of Control Automation & Systems*, 2015, 13(6):1313-1325
- [12] Tian G S, Xia F, Tian Y C. Predictive compensation for variable network delays and packet losses in networked control systems[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2012, 39(10):152-162
- [13] Xia Y, Xie W, Liu B, et al. Data-driven predictive control for networked control systems[J]. *Information Sciences*, 2013, 235(6):45-54
- [14] Yu M, Yuan X, Xiao W. A switched system approach to robust stabilization of networked control systems with multiple packet transmission[J]. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(4):1415-1423
- [15] 刘斌, 刘义才. 区间化时变时延的网络化切换系统建模与控制[J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(7):912-920
- [16] Pang Z H, Liu G P, Zhou D, et al. Output tracking control for networked systems: a model-based prediction approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(9):4867-4877
- [17] Zhang J, Lin Y, Shi P. Output tracking control of networked control systems via delay compensation controllers [J]. *Automatica*, 2015, 57:85-92
- [18] Peng J M, Wang J N, Ye X D. Distributed adaptive tracking control for unknown nonlinear networked systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(10):1729-1735
- [19] Wu Y, Liu T, Wu Y, et al. H_∞ output tracking control for uncertain networked control systems via a switch time delays[J]. *ISA Transactions*, 2013, 52(5):592-599
- [20] Zhang D, Han Q, Jia X. Observer-based H_∞ output tracking control for networked control systems[J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2015, 24(17):2741-2760
- [21] Tran H D, Guan Z H, Dang X K, et al. A normalized PID controller in networked control systems with varying time delays. [J]. *ISA Transactions*, 2013, 52(5):592-599
- [22] Ahmadi A A, Salmasi F R, Noori-Manzar M, et al. Speed sensorless and sensor-fault tolerant optimal PI regulator for networked DC motor system with unknown time-delay and packet dropout[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 61(2):708-717
- [23] Zhang H, Shi Y, Mehr A S. Robust static output feedback control and remote PID design for networked motor systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(12):5396-5405
- [24] Zhang H, Shi Y, Mehr A S. Robust H_∞ PID control for multivariable networked control systems with disturbance/noise attenuation[J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2012, 22(2):183-204
- [25] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays [J]. *Automatica*, 2011, 47(1):235-238
- [26] Tian E, Yue D, Zhang Y. Delay-dependent robust H_∞ control for T-S fuzzy system with interval time-varying delay[J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 2009, 160(12):1708-1719
- [27] He Y, Wu M, Liu G P, et al. Output feedback stabilization for a discrete-time system with a time-varying delay [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10):2372-2377
- [28] Liu G P, Xia Y Q, Chen J, et al. Networked predictive control of systems with random network delays in both for-

ward and feedback channels [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, 54(3):1282-1297

networked control systems with delay compensations [J]. *Automatica*, 2015, 57:85-92

[29] Zhang J H, Lin Y, And Shi P. Output tracking control of

Networked guaranteed cost PID control via LMI approach

Liu Yicai * **, Liu Bin * , Gao Jun **

(* Engineering Research Center for Metallurgical Automation and Detecting Technology of Ministry of Education, Institute of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081)

(** Department of Mechatronics Engineering and Automotive Services, Wuhan Business University, Wuhan 430056)

Abstract

Aiming at the networked control systems (NCSs) with bilateral time-varying delay and packet dropouts, this work investigates networked guaranteed cost proportional integral derivative (PID) control via linear matrix inequality (LMI) approach for second-order processes. By using the augmented state space form to rewrite a controller with typical second-order process transfer function and the time-delay system approach, the selection of PID tracking controller parameters is reduced to the solution of linear matrix inequalities. Based on the free weight matrix, the reciprocal convex combination and the cone complementarity linearization method, the controller parameters which satisfy the tracking performance are obtained, and the traditional PID control method is adopted to realize networked trajectory tracking control. Finally, the examples of numerical simulation and experiment are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: networked control system (NCS), linear matrix inequality (LMI), proportional integral derivative (PID), tracking control