

带有扰动补偿的离散重复控制方法^①

胡 轶^② 翁丁恩 孙明轩^③

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要 本文提出一种基于抛物线吸引律的离散重复控制方法,用于解决离散时间系统的周期轨迹跟踪问题。该方法能有效减小系统抖振,同时通过扰动扩张状态观测技术对系统未知扰动进行有效抑制,并采用重复控制技术实现系统周期扰动的完全消除。为了刻画误差的动态性能,推导了稳态误差带、绝对吸引层、单调减区间的表达式以及跟踪误差进入稳态误差带的最小步长。通过数值仿真和永磁同步伺服电机实验,验证了所述方法的有效性。

关键词 抛物线吸引律,扩张状态观测器(ESO),重复控制,离散时间系统

0 引 言

连续型滑模控制的研究起源于上世纪 50 年代末^[1]。文献[2]在变结构控制的基础上,给出连续时间滑动模态不等式到达条件。文献[3]引入准滑动模态的概念,采用饱和函数代替切换函数,即在边界层以外采用滑模控制,进入边界层后为反馈控制,有效地抑制抖振。此后文献[4]给出改进型离散滑模到达条件,并证明离散滑模控制有界。文献[5]提出了滑模控制的等式到达条件,相比于不等式形式的到达条件,能更好地分析切换函数收敛过程,使得控制器设计更简单。切换函数一旦到达滑模面,系统在受到参数摄动和外界干扰时具有较强的鲁棒性。文献[6]提出一种带有扰动补偿的离散滑模控制,并给出了系统误差收敛至切换面的步数。如何改进传统滑模控制器,以减小控制过程中的抖振问题一直是滑模控制研究的重要课题之一。

趋近律由 Gao 等人在文献[5,7]中首先提出。文献[8]提出离散幂次趋近律,并给出准滑动模态的刻画。文献[9]介绍了基于自适应方法,如何设

计采用非切换函数的趋近律控制器。文献[10]引入绝对吸引层,并给出 d 步延迟饱和趋近律。文献[11]介绍了一种新型的切换函数,采用修正比例项,提高了控制器的鲁棒性和误差收敛速度。文献[12]介绍了一种新型指数趋近律,并分析其动态性能,采用此趋近律能有效减小跟踪误差,提高了收敛速度。

文献[13]提出吸引律控制方法,该方法无需定义切换函数,保证系统跟踪误差直接收敛至原点。文献[14]构建饱和函数的吸引律,在此基础上设计离散重复控制器,并定量分析系统的动态性能。除上述改变切换函数形式、调整系统参数等方式,对未知扰动进行补偿也是消除抖振和提高系统控制性能的有效方法^[15,16]。文献[17]引入等效扰动,利用第 k 时刻计算出的系统等效扰动,补偿第 $k + 1$ 时刻的系统干扰。文献[18]将扰动上下界的中值作为等效扰动补偿。对于影响被控输出的扰动,其作用必定反映在被控输出信息中,扩张状态观测器技术是自抗扰控制技术中关键的一部分^[19,20]。文献[21]对光伏板旋转定位系统引入了自抗扰控制器,并使用扩张状态观测器估计总和扰动进行反馈补偿。

① 国家自然科学基金(61573320),浙江省自然科学基金(LY17F030018,LQ18E070005)和浙江省教育厅科研项目(Y201636413)资助。
② 男,1972 年生,博士,讲师;研究方向:电机控制算法,重复控制;E-mail: hyn@zjut.edu.cn
③ 通信作者,E-mail: mxsun@zjut.edu.cn
(收稿日期:2018-10-26)

对于具有周期运行特性的系统,针对系统周期扰动的抑制问题,基于内模原理的重复控制是一种常见的解决方案^[22,23]。文献[24]提出基于死区吸引律的离散重复控制器。而文献[25]提出基于误差吸引律的离散重复控制器。

本文提出一种能有效抑制抖振的抛物线吸引律,并将干扰抑制措施嵌入到吸引律中,构造等效扰动。同时采用扩张状态观测技术对等效扰动进行估计,与文献[21]不同,本文是对电机系统的未知扰动进行估计,并由此进行系统补偿,其中系统中的未知扰动包括建模误差和未知干扰。对未能完全抑制的周期扰动设计离散时间重复控制器,实现周期扰动的完全抑制。为了刻画系统的收敛性能和稳态性能,本文推导了误差收敛最小步数和几个界值的具体表达式,为控制器参数整定提供了参考方案。

1 问题描述

对于一类不确定单输入单输出离散时间系统

$$y_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{j=1}^m b_j u_{k-j} + \omega_k \tag{1}$$

其中, u_k 和 y_k 分别为 k 时刻的系统输入信号和输出信号; $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ 为系统参数,且 $b_1 \neq 0$; 满足 $1 \leq m \leq n$; ω_k 表示 k 时刻的扰动信号。

定义跟踪误差

$$e_k = r_k - y_k \tag{2}$$

其中, r_k 为 k 时刻给定参考信号。

本文的控制目标是针对系统式(1),设计控制器 u_k 使得系统输出 y_k 能跟踪上给定参考信号 r_k ,即跟踪误差 e_k 收敛至原点的误差带内;研究抛物线型吸引律,详细介绍采用此吸引律设计离散时间控制器的流程。

2 吸引律

通常离散时间吸引律可保证系统跟踪误差直接收敛至零点。其一般形式如下

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon f(e_k) \tag{3}$$

其中, $0 < \rho < 1, \varepsilon > 0$ 。若 $f(e_k) = \text{sgn}(e_k)$, 且

$$\text{sgn}(e_k) = \begin{cases} 1 & e_k > 0 \\ 0 & e_k = 0 \\ -1 & e_k < 0 \end{cases} \tag{4}$$

由于符号函数在原点不连续,当 e_k 收敛至零点附近时,符号函数的值会产生正负跳变,其危害主要表现为:(i) 降低系统的控制精度;(ii) 激发系统中存在的未建模特性,造成系统不可控。针对此问题,本文提出抛物线吸引律,能有效减小系统抖振,具体形式如下

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{fal}(e_k, \delta) \tag{5}$$

其中,

$$\text{fal}(e_k, \delta) = \begin{cases} \text{sgn}(e_k) & |e_k| \geq \delta \\ \sqrt{e_k/\delta} & 0 \leq e_k \leq \delta \\ -\sqrt{|e_k|/\delta} & -\delta < e_k < 0 \end{cases} \tag{6}$$

图1为抛物线函数 $\text{fal}(e_k, \delta)$ 当 $\delta = 0.5$ 时的图像,由图可知,抛物线函数在过原点时是连续的,故 e_k 不会产生正负跳变,从而减小由符号函数带来的抖振影响。

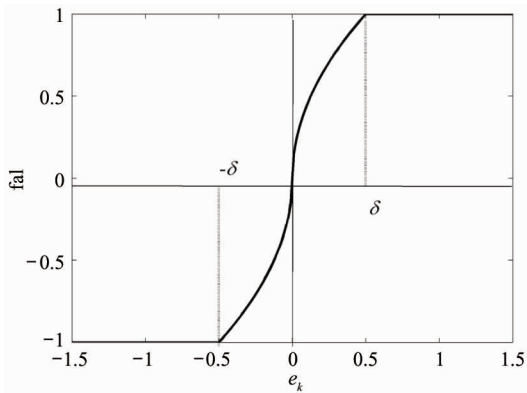


图1 fal(e_k, δ) 函数

为了有效抑制干扰信号 ω_k , 引入等效扰动 d_k , 即 $d_k = \omega_k - \omega_{k-1}$ 。在吸引律式(5)中“嵌入”扰动抑制模块,构建具有扰动抑制功能的吸引律

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{fal}(e_k, \delta) + d_{k+1}^* - d_{k+1} \tag{7}$$

其中, d_{k+1}^* 为 d_{k+1} 的补偿值,若 d_u, d_l 分别为 d_k 的上下界,满足 $\Delta = (d_u - d_l)/2, |d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 对

于扰动补偿值可取 $d_{k+1}^* = d_k$ 。

由式(1)和式(2)得跟踪误差:

$$e_{k+1} = r_{k+1} - y_k + \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) - d_{k+1} \quad (8)$$

将式(8)代入吸引律式(7),并将 d_{k+1} 用其补偿值 d_{k+1}^* 替代,则:

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{b_1} \left[\sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) + r_{k+1} - r_k + \rho e_k + \varepsilon fal(e_k, \delta) - d_{k+1}^* \right] \quad (9)$$

为了表征系统的动态性能,引入下述概念。

1) 稳态误差带 (Δ_{SSE}), 系统跟踪误差一旦收敛进入 Δ_{SSE} 便会稳定在此邻域内, 体现系统的稳态性能, 即满足:

$$|e_k| \leq \Delta_{SSE} \Rightarrow |e_{k+1}| \leq \Delta_{SSE}, \forall k > k^* \quad (10)$$

其中 k^* 为最小收敛步数。

2) 绝对吸引层 (Δ_{AAL}), 系统跟踪误差的绝对值 $|e_k|$ 大于此界时, 其 $|e_k|$ 单调递减, 即满足:

$$|e_k| > \Delta_{SSE} \Rightarrow |e_{k+1}| \leq |e_k| \quad (11)$$

3) 单调递减区域 (Δ_{MDR}), 当 e_k 在此区域外时, e_k 同号单调递减, 满足:

$$\begin{cases} 0 < e_{k+1} < e_k, e_k > \Delta_{MDR} \\ e_k < e_{k+1} < 0, e_k < -\Delta_{MDR} \end{cases} \quad (12)$$

式(10)、(11)、(12)给出具体界值定义, 与控制器参数设计紧密相关, 故系统参数可通过此界值的表达式加以整定。

3 扩张状态观测器

采用等效扰动补偿值 d_{k+1}^* , 满足 $d_{k+1}^* = d_k$, 这种估计带来较大的系统跟踪误差。为有效估计等效扰动 d_{k+1} , 本节构建以跟踪误差作为系统变量的扩张状态观测器 (extended state observer, ESO)。

定义:

$$h_k = d_{k+1} - d_k \quad (13)$$

针对离散系统式(1)的轨迹跟踪误差 e_k , 有:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= r_{k+1} - y_k + \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) - d_{k+1} \\ d_{k+1} &= d_k + h_k \end{aligned} \quad (14)$$

设计离散扩张状态观测器对等效扰动 d_{k+1} 进行观测, 用观测到的估计值作为等效扰动补偿 d_{k+1}^* 。观测器的两个观测状态为 $z_{1,k}$ 和 $z_{2,k}$, 分别用来估计 e_k 和 d_{k+1} 。定义观测误差 $\xi_k = z_{1,k} - e_k$, $\eta_k = z_{2,k} - d_{k+1}$, 离散扩张状态观测器的具体形式为

$$\begin{cases} z_{1,k+1} = r_{k+1} - y_k + \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) \\ \quad - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) - z_{2,k} - \beta_1 \xi_k \\ z_{2,k+1} = z_{2,k} - \beta_2 \xi_k \end{cases} \quad (15)$$

其中, β_1, β_2 为观测增益。

定理 1 考虑离散时间系统式(1), 设计观测器增益

系数 β_1, β_2 , 矩阵 $A = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$ 为 Schur 稳定

矩阵, 则系统式(15)渐近稳定, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0$ 。

证明: 由式(1)和式(15)得:

$$\xi_{k+1} = -\eta_k - \beta_1 \xi_k \quad (16)$$

由式(15)得:

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= -\beta_2 \xi_k + z_{2,k} - d_{k+2} \\ &= -\beta_2 \xi_k + z_{2,k} - d_{k+1} + d_{k+1} - d_{k+2} \\ &= -\beta_2 \xi_k + \eta_k - h_{k+1} \end{aligned} \quad (17)$$

定义 $E_k = \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix}$, 可得观测器的误差方程为

$$E_{k+1} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix} E_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -h_{k+1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

令 $A = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}$, 则矩阵 A 的特征根:

$$\lambda = 0.5(1 - \beta_1) \pm \sqrt{0.25(1 - \beta_1)^2 + \beta_1 + \beta_2}$$

通过对参数 β_1, β_2 进行配置, 使得矩阵 A 的所有特征根都在单位开圆内, 则 A 为 Schur 稳定矩阵, 则系

统式(15)渐近稳定,即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0$ 。证毕。

由式(1)和 d_k 的定义得:

$$\begin{aligned} d_{k+1} = & y_{k+1} - y_k + \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) \\ & - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) \end{aligned} \tag{19}$$

将式(19)代入到式(7)中,可得基于 ESO 的反馈控制器:

$$\begin{aligned} u_k = & u_{k-1} + \frac{1}{b_1} \left[\sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) \right. \\ & - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) + r_{k+1} \\ & \left. - r_k + \rho e_k + \varepsilon \operatorname{fal}(e_k, \delta) - z_{2,k} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

具体的控制器参数 $\rho, \varepsilon, \delta$ 可依据表征系统收敛性能的指标来整定。

4 离散重复控制器设计

基于 ESO 的反馈控制器式(20)对系统未知扰动进行了补偿,但系统中仍存在周期扰动。为了实现周期扰动的完全抑制,本文给出一种重复控制策略。

给定周期参考信号 r_k , 满足:

$$r_k = \pm r_{k-N} \tag{21}$$

其中, N 为参考信号的周期。设计基于扩张状态观测的重复控制器,其表达式为

$$\begin{aligned} u_k = & u_{k-N} + \frac{1}{b_1} \left[\sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k+1-i-N}) \right. \\ & - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k+1-j-N}) + r_{k+1} \\ & \left. - r_{k+1-N} + \rho e_k + \varepsilon \operatorname{fal}(e_k, \delta) - z_{2,k} \right] \end{aligned} \tag{22}$$

其中,

$$\begin{cases} z_{1,k+1} = r_{k+1} - y_k + \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) \\ \quad - \sum_{j=1}^m b_j (u_{k+1-j} - u_{k-j}) - z_{2,k+1-N} - \beta_1 \xi_k \\ z_{2,k+1} = z_{2,k+1-N} - \beta_2 \xi_k \end{cases} \tag{23}$$

由式(22)的形式可以看出,反馈控制器式(20)为重复控制器当 $N = 1$ 时的特例。重复控制器

式(22)采用扩张观测器对系统的未知扰动进行了有效抑制,并结合重复控制对周期扰动进行了完全抑制,进一步改善了系统控制性能。

5 收敛性和稳态性能分析

本节对系统式(1)的收敛性能和稳态性能进行分析,给出表征系统收敛性能和稳态性能的具体界值表达式,同时给出 e_k 进入稳态误差带的步数。

定理 2 针对离散时间系统式(1),对于控制器式(20),系统的稳态误差带(Δ_{SSE})、绝对吸引层(Δ_{AAL})、单调递减区域(Δ_{MDR})分别表示如下:

(1) 稳态误差带

1) 当 $|\Delta_{SSE}| > \delta$ 时

(i) $|\Delta_{SSE}| \geq |e_k| \geq \delta$

$$\Delta_{SSE} = \max \left\{ \Delta + \varepsilon - (1 - \rho)\delta, \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho} \right\} \tag{24}$$

(ii) $|\Delta_{SSE}| \geq \delta \geq |e_k|$

$$\Delta_{SSE} = \max \{ \Delta - \varepsilon + (1 - \rho)\delta, \Delta \} \tag{25}$$

2) 当 $|\Delta_{SSE}| \leq \delta$ 时

(i) $\delta \geq |\Delta_{SSE}| \geq |e_k|$

$$\Delta_{SSE} = \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \pm \sqrt{4\Delta\rho \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2} \tag{26}$$

(2) 绝对吸引层

$$\Delta_{AAL} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & \varepsilon \leq (1 - \rho)\Delta, |e_k| \geq \delta \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{2 - \rho}, & \varepsilon > (1 - \rho)\Delta, |e_k| \geq \delta \\ \Delta_{AAL1}, & |e_k| < \delta \end{cases} \tag{27}$$

其中,

$$\Delta_{AAL1} = \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta\rho \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2} \tag{28}$$

(3) 单调递减区域

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta + \varepsilon}{1 - \rho} \right\}, & |e_k| \geq \delta \\ \max \{ \Delta_{MDR1}, \Delta_{MDR2} \}, & |e_k| < \delta \end{cases} \tag{29}$$

其中,

$$\Delta_{\text{MDR1}} = \frac{2\Delta(1-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta(1-\rho)\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(1-\rho)^2} \quad (30)$$

$$\Delta_{\text{MDR2}} = \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta\rho\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2} \quad (31)$$

证明 根据界值定义可证。

(1) 稳态误差带

根据式(10)和式(6)得:

$$\begin{cases} \Delta_{\text{SSE}} > (1-\rho)e_k - \varepsilon\text{fal}(e_k, \delta) + \Delta \\ -\Delta_{\text{SSE}} \leq (1-\rho)e_k - \varepsilon\text{fal}(e_k, \delta) - \Delta \end{cases} \quad (32)$$

1) 当 $\Delta_{\text{SSE}} \geq e_k \geq \delta$ 时

式(32)可等价于如下不等式:

$$\begin{cases} \Delta_{\text{SSE}} > (1-\rho)e_k - \varepsilon + \Delta \\ -\Delta_{\text{SSE}} \leq (1-\rho)e_k - \varepsilon - \Delta \end{cases} \quad (33)$$

求解式(33)可得:

$$\Delta_{\text{SSE}} = \max\left\{\Delta + \varepsilon - (1-\rho)\delta, \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}\right\}$$

同理当 $-\Delta_{\text{SSE}} \leq e_k \leq -\delta$ 时可得相同结果。

2) 当 $\Delta_{\text{SSE}} \geq \delta \geq e_k \geq 0$ 时

式(32)可等价于如下不等式:

$$\begin{cases} \Delta_{\text{SSE}} > (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{\frac{\delta}{\delta}} + \Delta \\ -\Delta_{\text{SSE}} \leq (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{\frac{0}{\delta}} - \Delta \end{cases} \quad (34)$$

求解式(34)可得:

$$\Delta_{\text{SSE}} = \max\{\Delta - \varepsilon + (1-\rho)\delta, \Delta\}$$

同理当 $-\Delta_{\text{SSE}} \leq -\delta \leq e_k \leq 0$ 时可得相同结果。

(3) 当 $\delta \geq \Delta_{\text{SSE}} \geq e_k > 0$ 时

式(32)可等价于如下不等式:

$$\begin{cases} \Delta_{\text{SSE}} > (1-\rho)\Delta_{\text{SSE}} - \varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{\text{SSE}}}{\delta}} + \Delta \\ -\Delta_{\text{SSE}} \leq (1-\rho)0 - \varepsilon \sqrt{\frac{0}{\delta}} - \Delta \end{cases} \quad (35)$$

求解式(35)可得:

$$\frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta\rho\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2} < \Delta_{\text{SSE}} < \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \sqrt{4\Delta\rho\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2}$$

取该区间里的最值为稳态误差带边界。

同理当 $-\delta \leq -\Delta_{\text{SSE}} \leq e_k \leq 0$ 时可得相同结果。

(2) 绝对吸引层

当 $e_k > 0$ 时, 由 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| < \Delta$, 可得:

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq (1-\rho)e_k - \varepsilon\text{fal}(e_k, \delta) + \Delta \\ e_{k+1} \geq (1-\rho)e_k - \varepsilon\text{fal}(e_k, \delta) - \Delta \end{cases} \quad (36)$$

为使 $|e_k|$ 满足单调递减, 即 $-e_k < e_{k+1} < e_k$,

则需满足:

$$\begin{cases} e_k > (1-\rho)e_k - \varepsilon\text{fal}(e_k, \delta) + \Delta \\ -e_k < (1-\rho)e_k - \varepsilon\text{fal}(e_k, \delta) - \Delta \end{cases} \quad (37)$$

1) 当 $e_k > \delta$ 时

根据式(7)的形式, 式(37)可表示如下:

$$\begin{cases} e_k > (1-\rho)e_k - \varepsilon + \Delta \\ -e_k < (1-\rho)e_k - \varepsilon - \Delta \end{cases} \quad (38)$$

求解式(38)可得:

$$\Delta_{\text{AAL}} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon \leq (1-\rho)\Delta, |e_k| \geq \delta \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{2 - \rho}, \varepsilon > (1-\rho)\Delta, |e_k| \geq \delta \end{cases}$$

当 $e_k < -\delta$ 时, 可得同样结果。

2) 当 $0 < e_k < \delta$ 时

根据式(7), 式(37)可表示如下:

$$\begin{cases} e_k > (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{\frac{e_k}{\delta}} + \Delta \\ -e_k < (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{\frac{e_k}{\delta}} - \Delta \end{cases} \quad (39)$$

求解式(39)即可得不等式解:

$$e_k < \frac{2\Delta(2-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta(2-\rho)\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(2-\rho)^2},$$

$$e_k > \frac{2\Delta(2-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \sqrt{4\Delta(2-\rho)\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(2-\rho)^2}$$

$$\text{且, } \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta\rho\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2} < e_k <$$

$$\frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \sqrt{4\Delta\rho\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2}, \text{ 取解区间上的最大值作}$$

为单调减区间的边界。令:

$$f(x) = \frac{2\Delta x + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \pm \sqrt{4\Delta x \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2x^2} \quad (40)$$

因为 $f(x)$ 单调递减,所以得:

$$\Delta_{\text{AAL}} = \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta\rho \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2}$$

当 $0 \geq e_k \geq -\delta$ 时,可得同样结果。

(3) 单调减区间

为使 e_k 满足单调递减,即 $0 < e_{k+1} < e_k$, 则需满足:

$$e_{k+1} > (1-\rho)e_k - \varepsilon \text{fal}(e_k, \delta) + d_{k+1}^* - d_{k+1} \quad (41)$$

又因为 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| < \Delta$, 所以得:

$$\begin{cases} e_k > (1-\rho)e_k - \varepsilon \text{fal}(e_k, \delta) + \Delta \\ 0 < (1-\rho)e_k - \varepsilon \text{fal}(e_k, \delta) - \Delta \end{cases} \quad (42)$$

1) 当 $e_k \geq \delta$ 时

根据式(7)的形式,式(42)可表示如下:

$$\begin{cases} e_k > (1-\rho)e_k - \varepsilon + \Delta \\ 0 < (1-\rho)e_k - \varepsilon - \Delta \end{cases} \quad (43)$$

求解式(43)得:

$$\Delta_{\text{MDR}} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon \leq (1-2\rho)\Delta \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{1-\rho}, \varepsilon > (1-2\rho)\Delta \end{cases}$$

当 $e_k \leq -\delta$ 时,可得同样结果。

2) 当 $0 < e_k \leq \delta$ 时

根据式(7)的形式,式(42)可表示如下:

$$\begin{cases} e_k > (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{e_k/\delta} + \Delta \\ 0 < (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{e_k/\delta} - \Delta \end{cases} \quad (44)$$

求解式(44)可得不等式解:

$$\frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta\rho \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2} < e_k < \frac{2\Delta\rho + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \sqrt{4\Delta\rho \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2\rho^2}$$

且
$$\frac{2\Delta(1-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \sqrt{4\Delta(1-\rho) \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(1-\rho)^2} < e_k <$$

$$\frac{2\Delta(1-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta(1-\rho) \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(1-\rho)^2}$$

取解区间上的最大值作为单调递减区间的边界,由于式(40)的单调递减性,且 $0 < \rho < 1$, 所以得:

当 $\rho \geq 0.5$ 时

$$\Delta_{\text{MDR}} = \frac{2\Delta(1-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \sqrt{4\Delta(1-\rho) \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(1-\rho)^2}$$

当 $\rho < 0.5$ 时

$$\Delta_{\text{MDR}} = \frac{2\Delta(1-\rho) + \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \sqrt{4\Delta(1-\rho) \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}}}{2(1-\rho)^2}$$

当 $0 \geq e_k \geq -\delta$ 时可得同样结果。

由表达式(24)至(31)可知,3 个边界的大小取决于控制器中可调参数 $\rho, \varepsilon, \delta$ 的具体取值和扰动的界 Δ 。在具体实施过程中,可根据实际控制要求,依据上述3 个界值结论,调整控制器参数。

定理3 在控制器式(22)作用下,系统式(1)的跟踪误差最多经过 $\lceil k^* \rceil$ 步进入稳态误差带,其中:

$$k^* = k_1^* + k_2^* \quad (45)$$

$\lceil \cdot \rceil$ 为不小于 $\cdot$ 的最小整数。且:

$$k_1^* = \log_{(1-\rho)} \left(\frac{\rho\delta + \varepsilon - \Delta}{\rho|e_0| + \varepsilon - \Delta} \right) \quad (46)$$

$$k_2^* = \log_{(1-\rho)} \left(\frac{\rho\Delta_{\text{SSE}} + \varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{\text{SSE}}}{\delta}} - \Delta}{\rho|e_0| + \varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{\text{SSE}}}{\delta}} - \Delta} \right) \quad (47)$$

证明 记 e_0 为跟踪误差初值,当 $|e_0| \geq \delta > \Delta_{\text{SSE}}$ 时, e_0 首次进入 Δ_{SSE} 的步数可分两次证明,第一步, $|e_k|$ 从 e_0 收敛至 δ ; 第二步, $|e_k|$ 从 δ 收敛至 Δ_{SSE} 。

(1) 第一步 e_k 从 e_0 收敛至 δ

当 $e_0 \geq \delta$ 时, $e_{k+1} = (1-\rho)e_k - \varepsilon + d_{k+1}^* - d_{k+1}$, 则有:

$$\begin{cases} e_1 = (1-\rho)e_0 - \varepsilon + h_0 \\ e_2 = (1-\rho)^2 e_0 - (1-\rho)(\varepsilon - h_0) - (\varepsilon - h_1) \\ \vdots \\ e_{k^*} = (1-\rho)^{k^*} e_0 - \sum_{i=0}^{k^*-1} [(1-\rho)^{k^*-i-1} (\varepsilon - h_i)] \end{cases} \quad (48)$$

由式(48)的递归形式可得:

$$e_{k^*} \leq (1-\rho)^{k^*} |e_0| - \sum_{i=0}^{k^*-1} [(1-\rho)^{k^*-i-1} (\varepsilon - \Delta)]$$

$$= (1-\rho)^{k^*} |e_0| - (\varepsilon - \Delta) \frac{1 - (1-\rho)^{k^*}}{\rho}$$

e_k 经过 k_1^* 步收敛到 δ , 则:

$$(1-\rho)^{k_1^*} |e_0| - (\varepsilon - \Delta) \frac{1 - (1-\rho)^{k^*}}{\rho} = \delta$$

解得:

$$k_1^* = \log_{(1-\rho)} \left(\frac{\rho\delta + \varepsilon - \Delta}{\rho |e_0| + \varepsilon - \Delta} \right)$$

(2) 第二步 e_k 从 δ 收敛至 Δ_{SSE} , 其中 $e_0 = \delta$

$$\text{当 } \Delta_{SSE} < e_0 < \delta \text{ 时, } e_{k+1} = (1-\rho)e_k - \varepsilon \sqrt{\frac{e_k}{\delta}}$$

$$+ d_{k+1}^* - d_{k+1}, \text{ 同理有:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1-\rho)e_0 - \varepsilon \sqrt{\frac{e_0}{\delta}} + h_0 \\ e_2 = (1-\rho)^2 e_0 - \varepsilon(1-\rho) \sqrt{\frac{e_0}{\delta}} \\ \quad - \varepsilon \sqrt{\frac{e_1}{\delta}} + (1-\rho)h_0 + h_1 \\ \quad \vdots \\ e_{k^*} = (1-\rho)^{k^*} e_0 - \varepsilon \sum_{i=0}^{k^*-1} [(1-\rho)^{k^*-i-1} \sqrt{\frac{e_i}{\delta}}] \\ \quad + \sum_{i=0}^{k^*-1} [(1-\rho)^{k^*-i-1} h_i] \end{array} \right. \quad (49)$$

由式(49)得:

$$e_{k^*} \leq (1-\rho)^{k^*} |e_0| - \sum_{i=0}^{k^*-1} [(1-\rho)^{k^*-i-1} \sqrt{\frac{\Delta_{SSE}}{\delta}}]$$

$$+ \sum_{i=0}^{k^*-1} [(1-\rho)^{k^*-i-1} \Delta]$$

$$= (1-\rho)^{k^*} |e_0| - (\varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{SSE}}{\delta}} - \Delta) \frac{1 - (1-\rho)^{k^*}}{\rho} \quad (50)$$

e_k 经过 k_2^* 步收敛到 Δ_{SSE} , 由式(50)得:

$$(1-\rho)^{k^*} |e_0| - (\varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{SSE}}{\delta}} - \Delta) \frac{1 - (1-\rho)^{k^*}}{\rho} = \Delta_{SSE}$$

$$k_2^* = \log_{(1-\rho)} \left(\frac{\rho\Delta_{SSE} + \varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{SSE}}{\delta}} - \Delta}{\rho |e_0| + \varepsilon \sqrt{\frac{\Delta_{SSE}}{\delta}} - \Delta} \right)$$

同理当 $e_k \leq 0$ 时可得同样结果。综上, $k^* = k_1^* + k_2^*$ 。证毕。

通过证明可知,当初始误差大于 δ 时, $k^* = k_1^* + k_2^*$; 当初始误差小于 δ 时, $k^* = k_2^*$ 。

6 数值仿真与实验结果

本实验在电机实验装置上进行电机位置跟踪控制。实验装置由 TMS320F2812DSP、交流伺服电机、Elmo 驱动器、上位机等设备组成,实物图见图2。本节将永磁同步电机模型转换为二阶离散动态特性:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \omega_k \quad (51)$$

由于电机模型参数辨识的复杂和不精确,将系统未建模误差视作未知扰动的一部分。为验证扩张状态观测技术对扰动补偿后控制器的有效性,在未进行模型参数辨识的情况下对式(51)所表示系统任意给定4组模型参数,且满足零极点在单位圆内。对每组参数下的系统进行抛物线吸引律的反馈控制实验,表1为使用ESO补偿技术和不使用ESO补偿技术电机跟踪误差的对比。

表1 有ESO与无ESO跟踪误差实验结果对比

跟踪误差(deg)	G1	G2	G3	G4
使用ESO	0.1	0.1	0.1	0.1
无ESO	0.2	0.3	0.4	0.6

其中,

$$G1: a_1 = -1.6, a_2 = 0.6, b_1 = 1.5, b_2 = -0.6$$

$$G2: a_1 = -1.3, a_2 = 0.3, b_1 = 2, b_2 = -0.6$$

$$G3: a_1 = -1.4, a_2 = 0.4, b_1 = 2.5, b_2 = -0.5$$

$$G4: a_1 = -1.5, a_2 = 0.5, b_1 = 2.6, b_2 = -0.5$$



图 2 电机实验装置

从表中可以看出,未使用 ESO 对未知扰动及误差进行估计时,跟踪误差会受到建模误差的影响。当使用 ESO 对未知扰动包括未建模误差进行估计并反馈到控制器中时,跟踪误差将稳定在 0.1° 。验证了 ESO 技术对扰动估计和未建模误差估计的有效性。

6.1 数值仿真

本节通过数值仿真,主要验证表征系统动态特性的 3 个边界值表达式及有限收敛步数,即 Δ_{MDR} 、 Δ_{AAL} 、 Δ_{SSE} 和 k^* 。反馈控制器见式(9)。

本仿真参考轨迹取 $R_k = 2\cos(2\pi kT) + 2$, $T = 5\text{ ms}$;未知扰动 $\omega_k = 2\sin(4\pi kT)$;在用常值进行扰动补偿时 d_{k+1}^* 取 0.1。系统模型参数取 G4 时的情况。仿真结果如下所示。

图 3 为 ρ 、 ε 、 δ 分别为 0.7、0.7、0.5 时的情况,根据定理 2 的公式可得 Δ_{SSE} 、 Δ_{AAL} 、 Δ_{MDR} 分别为 0.68、0.64、2.77;由定理 3 可得 $\lceil k^* \rceil = \lceil 1.99 \rceil = 2$ 。此时 3 个界值的大小互不相等,其误差在第二步收敛进入稳态误差带后一直稳定在其内部。图 4 为 ρ 、 ε 、 δ 分别为 0.1、0.2、1 时的情况,根据定理 2 的公式可得 Δ_{SSE} 、 Δ_{AAL} 、 Δ_{MDR} 分别为 0.35、1.2、1.2;由定理 3 可得 $\lceil k^* \rceil = \lceil 6.7 \rceil = 7$ 。此时误差在第 7 步收敛进入稳态误差带后并一直稳定在内部。图 5 为 ρ 、 ε 、 δ 分别为 0.1、0.8、1.5 时的情况,计算可得 Δ_{SSE} 、 Δ_{AAL} 、 Δ_{MDR} 均为 0.21;由定理 3 可得 $\lceil k^* \rceil = \lceil 2.92 \rceil = 3$ 。此时误差在第 3 步收敛进入稳态误差带后一直稳定在内部。

6.2 实验结果

本实验对比验证基于 ESO 扰动估计的吸引律

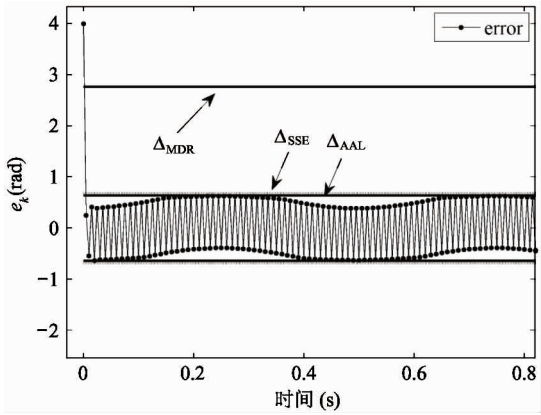


图 3 界值验证 1

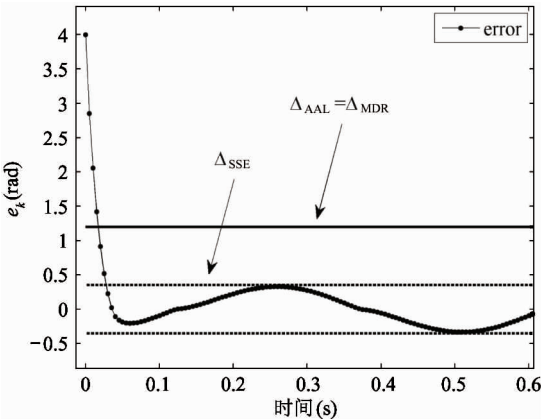


图 4 界值验证 2

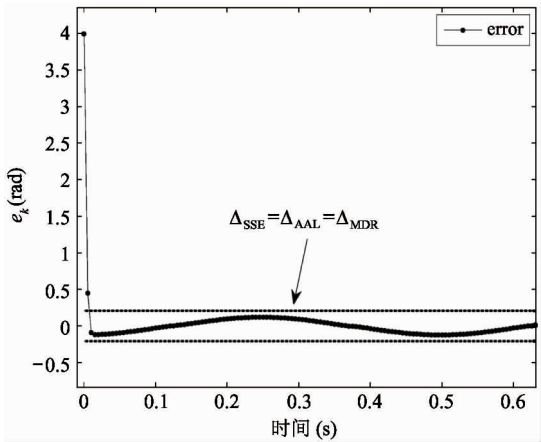


图 5 界值验证 3

对非周期扰动的有效抑制,再结合重复控制器,实现对周期扰动的抑制。其中反馈控制器为式(9);式(20)为基于 ESO 观测扰动的反馈控制器;式(22)为基于 ESO 观测扰动的重复控制器,去掉式(22)中

的 ESO 扰动补偿项,控制器退化为重复控制器。跟踪轨迹 $r_k = 2\pi(\sin(\pi(k-200)/100) + 1)/3 \text{ rad}$, 采样时间 $T = 5 \text{ ms}$, N 为周期的采样点数,其中 $N = 200$; 控制器参数 $\rho = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$, $\delta = 2$ 状态观测器参数 $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.5$ 。实验结果如下。

图 6 为采用常值补偿轨迹跟踪误差控制结果,跟踪误差的界为 0.2° ; 图 7 为采用 ESO 扰动估计补偿控制器的轨迹跟踪误差控制结果,跟踪误差的界为 0.1° ,结果表明采用扩张状态观测器估计的扰动补偿比采用常值等效扰动补偿的控制结果更优,提高了系统的轨迹跟踪性能。

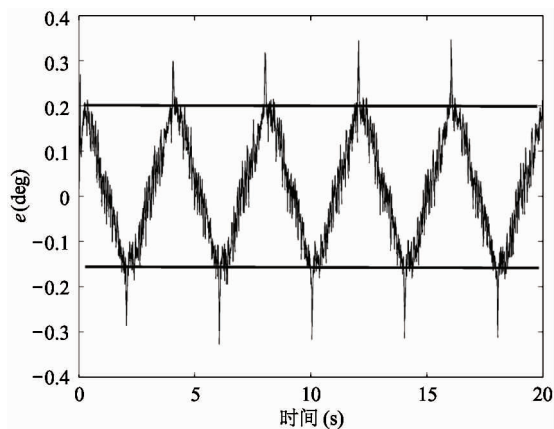


图 6 反馈控制器式(9)的跟踪误差

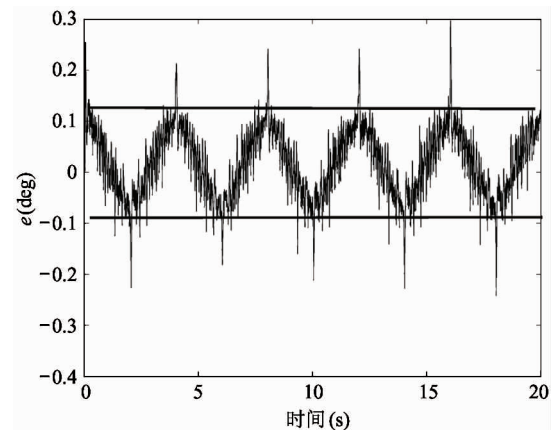


图 7 基于 ESO 的反馈控制器式(20)的跟踪误差

从图 8 可知,采用抛物线吸引律的离散重复控制跟踪误差的界为 0.07° ,与图 7 相比,表明重复控制器能有效抑制周期扰动。图 9 是采用重复控制结合扩张状态观测补偿的跟踪误差,在第一学习周期

的误差达到了 0.15° ,与图 8 的第一种学习周期的误差相比,表明控制器式(22) 不仅对周期扰动进行了有效抑制,同时进一步改善了重复控制周期的跟踪性能。

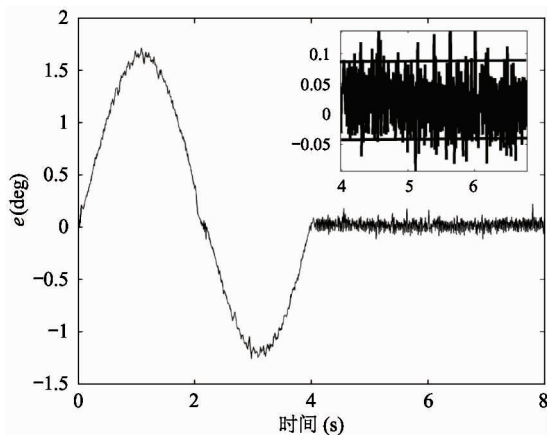


图 8 重复控制器的跟踪误差

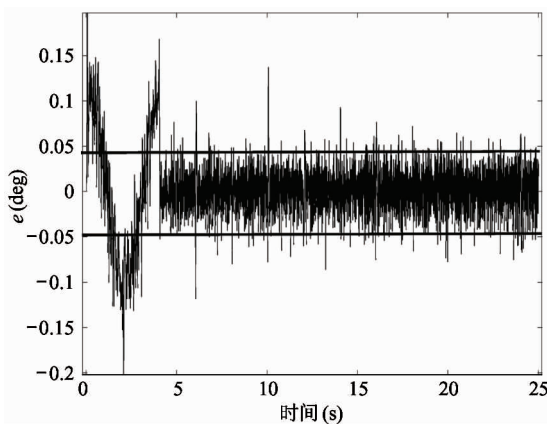


图 9 基于 ESO 的重复控制器式(22)的跟踪误差

7 结 论

本文设计了基于抛物线型吸引律的离散控制器,此方法能有效抑制系统轨迹跟踪时的抖振现象。在此基础上,引入等效扰动,利用扩张状态观测器对系统未知等效扰动进行估计,有效抑制系统未知扰动;采用离散重复控制实现系统周期扰动的完全消除,进一步提高系统控制性能。本文推导出可用于控制器参数整定和表征系统稳态性能的稳态误差带、绝对吸引层、单调减区域的表达式以及系统跟踪

误差进入稳态误差带的最小步长。本文提出的方法能有效减小系统抖振、抑制未知扰动,并完全消除周期扰动。通过数值仿真与伺服电机实验,验证了本文所提控制方法的有效性。

参考文献

- [1] Emelyanov S V. Variable Structure Control Systems[M]. Moscow, Russia: Nauka Publishers,1967
- [2] Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22 (2): 212-222
- [3] Slotine J J, Sastry S S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator[J]. *International Journal of Control*, 1983, 38 (2): 465-492
- [4] Sarpturk S, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(10): 930-932
- [5] Gao W B, Wang Y, Homaifa A. Discret-time variable structure control systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117-122
- [6] Qu S C, Xia X H, Zhang J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(7): 3502-3510
- [7] Gao W B, Hung J C. Variable structure control of nonlinear systems: a new approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 45-55
- [8] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社,1996
- [9] Bertolini G, Ferrara A, Utkin V. Adaptive sliding mode control in discret-time systems[J]. *Automatica*, 1995, 31(5): 769-773
- [10] Sun M X, Wang Y Y, Wang D. Variable-structure repetitive control: a discrete-time strategy[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2005, 52(2): 610-616
- [11] Bartoszewicz A, Lesniewski P, Xiong Z H. New switching and nonswitching type reaching laws for SMC of discrete time systems [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 24(2): 670-677
- [12] Andrzej B, Pawel L. Reaching law based discrete time sliding mode inventory management strategy [J]. *IEEE Access*, 2016, 64(4): 10051-10058
- [13] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(12): 1771-1778
- [14] Sun M X, Wu L W, Hu Y, et al. Digital control strategies with attractiveness and invariance specifications[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 26(4): 1272-1284
- [15] Kawamura A, Itoh H, Sakamoto K. Chattering reduction of disturbance observer based sliding mode control [J]. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 1994, 30 (2): 456-461
- [16] Eun Y, Kim J H, Kim K. Discrete time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Techonlogy*, 1999, 7 (4): 414-422
- [17] 邬玲伟, 孙明轩. 一种自适应吸引律离散时间控制方法[J]. *控制与决策*, 2016, 31(9): 1546-1552
- [18] 周文委, 孙明轩, 张有兵. 基于约束输入变速吸引律的离散重复控制器设计[J]. *控制与决策*, 2016, 31 (10): 1742-1748
- [19] 韩京清. 非线性状态误差反馈控制律-NLSEF[J]. *控制与决策*, 1995, 10(3): 221-231
- [20] 韩京清. 自抗扰控制技术: 估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008. 183-243
- [21] 王林青, 李大虎, 孙建波, 等. 基于线性自抗扰控制器的光伏板旋转定位控制[J]. *高技术通讯*, 2018, 28 (7): 663-667
- [22] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, et al. Repetitive control systems: a new type servo system for periodical exogenous signals [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659-668
- [23] Zhang B, Zhou K L, Wang D W. Multirate repetitive controller for PWM DC/AC converters[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61 (6): 2883-2890
- [24] 邬玲伟, 孙明轩. 基于死区吸引律的离散重复控制 [J]. *控制与决策*, 2015, 30(6): 977-984
- [25] 邬玲伟, 孙明轩. 无抖振离散重复控制器设计与实现 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(4): 554-560

A new discrete repetitive control method combined with disturbance compensation

Hu Yi, Weng Dingen, Sun Mingxuan

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

In this paper, a discrete repetitive control method based on parabolic attraction law for solving the periodic trajectory tracking problem of discrete-time system is proposed. The method can reduce the chattering of the system effectively. It also suppresses the unknown disturbance effectively by the disturbance expansion state observation technology, and eliminates the periodic disturbance completely by the repetitive control technology. In order to characterize the error dynamics, the expression for the range of the steady state error, the absolute attractive layer, the boundary of the monotonically decreasing region and the maximum steps of system error entering the range of the steady state error are derived in this paper. The effectiveness of the proposed method is verified by numerical simulation and experiment of permanent magnet synchronous servo motor.

Key words: parabolic attracting law, extended state observer (ESO), repetitive control, discrete-time system