

超市收银台排队问题的分析与优化^①

熊君星^{②*} 赵金萍^{③**} 张卿* 刘建胜*

(* 南昌大学机电工程学院 南昌 330031)

(** 南昌大学科学技术学院 南昌 330029)

摘要 对某超市的收银台排队系统进行了优化。以顾客能接受的最长排队队长及最长等待时间为约束,建立了多服务台负指数分布排队系统模型。通过对顾客一段时间内的到达数量、收银员对单个顾客的服务时间进行数据采集、以及对顾客进行相关问卷调查,得出计算机仿真所需的变量与参数,同时代入排队系统模型中进行数据分析与最优解确定,最终确定该超市最优的收银台数量。

关键词 超市, 收银台, 排队系统

0 引言

在我国社会经济迅速发展的趋势下,超市成为人们生活中购物常去的场所,大型超市的数量如雨后春笋般出现在各大城市中。超市的服务水平和便捷程度就成为人们的权衡标准,也是各超市提高竞争力的主要手段。目前,大多数超市面临两种情况,一是顾客量很大,各收银台都有顾客在等待服务,顾客不愿意等待太长时间而选择离开导致超市顾客流量的损失;另一种情况是顾客很少,收银台大部分时间处在空闲状态,尽管可以增加顾客的满意度,但是对超市管理者来说成本就会增加而且导致超市的资源浪费。

因此,超市的收银台数量过多或者过少对超市来说都是损失,所以要找到其中的平衡点,根据客流量合理地开放超市收银台的台数,既能够保证顾客的满意度,又能够最大限度地节省超市的不必要的开支。超市收银台的服务体系优化问题已成为超市管理者迫切要解决的问题。

国内外许多学者对该问题进行了研究, Bor-

is^[1]、So^[2]、Kim^[3]通过使用动态规划方法,在得到了明确形式的最优控制的情况下,最大限度地降低了成本,但其没有考虑顾客满意度问题,如果一味的以开放较少的收银台来降低成本的话,必然会致使顾客满意度下降。王婷婷等^[4,5]运用模拟植物生长算法来动态地调整收银口的数量和种类,使顾客满意度达到一定水平,同时控制企业的运营成本,但没有针对不同人群、不同时间段对收银系统合理有效地调度。王冠一等^[6]利用 Witness 建立的超市收银系统仿真模型,分析了各个时段的数据,通过合理设置收银台数量和快速通道以及优化收银流程来达到综合优化目的,但是没有考虑为高购买量顾客开设专属通道的情况。针对以上研究的不足,本文以顾客能接受的最长排队队长及最长等待时间为约束,建立了多服务台负指数分布排队系统模型。

1 建立超市收银台服务系统排队模型

1.1 超市收银台服务系统的组成与特征

超市收银台服务系统的排队模型是一个 $M/M/c/\infty/\infty$ 模型^[7-18],即多服务台负指数分布模型。在

① 国家自然科学基金(51565036)和江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ150069)资助。

② 男,1981年生,硕士,副教授;研究方向:制造过程管理与控制,物流管理与优化技术,设施布局与优化等;E-mail: jx811217@126.com

③ 通信作者,E-mail: 350181911@qq.com

(收稿日期:2018-03-18)

并列多个收银台的条件下,服务系统的服务方式可能有以下两种:一是单队多收银台并列,二是多队多收银台并列。本文使用的是多队多收银台并列服务方式。

1.2 超市收银台服务系统的模型假设

为了将超市的收银台服务系统转化为理论排队系统模型,本文根据排队论的三要素做出合理的假设。

(1) 输入过程

顾客源:进入排队系统的顾客是到达超市并且选购好商品的顾客,而顾客到达超市是随机和独立的,并且是源源不断地进入超市,所以可以看作是进入排队系统中的顾客来源是无限的,并且顾客到达收银台是随机和独立的。假设顾客的到达间隔时间服从负指数分布,在一天内的一个时间段内(下午五点到六点)服从泊松分布,其参数为 λ (单位时间内平均到达顾客数)。

(2) 排队规则

超市内的顾客准备结账时,如果有空闲的收银台,则前往收银台结账;如果所有的收银台都在服务中,则顾客选择排队较短的队列进行等待结账,即该收银台服务系统是先到先服务的等待制服务系统。

(3) 服务机构

假设超市收银台服务系统中有 c 台相互独立的收银台,假设每台收银台的服务能力都是相同的,而且每次只能服务一个顾客。收银台对顾客的服务时间服从某种分布。

1.3 超市收银台服务系统的模型建立

由以上的假设,我们可以得到超市收银台服务系统是顾客按参数为 λ 的泊松流、服务时间独立、服务时间服从参数为 μ 的负指数分布,即M/M/c/ ∞/∞ 的模型。

本文是以顾客能容忍的最长等待时间及最长队长为约束,从而求出超市排队系统的最优收银台数,可以建立如下约束:

$$\begin{cases} \rho = \frac{\lambda}{c\mu} \\ P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \right]^{-1} \\ L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)P_n = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0 \leq L \\ W_q = \frac{L_q}{\lambda} \leq T \end{cases} \quad (1)$$

其中, c 为当前排队系统中正在服务的收银台数, L 为顾客能容忍的最长排队队长, T 为顾客能容忍的最长等待时间。

2 超市收银台服务系统的优化分析

2.1 某超市的周边环境描述

某超市位于南昌市红谷滩新区的一家中型超市,周边有多所高校、住宅区、写字楼等,学生、上班族和周边的居民是这家超市的主要消费群体。

2.2 实际数据的收集与处理

本文的数据主要是在两个双休日共4天的17:00-18:00的时间,对该超市的收银台排队系统进行采集。主要采集的数据为顾客到达率、收银台对顾客的服务时间、以及顾客能容忍的最长排队队长和等待时间。为获得详细准确的数据,在17:00-18:00时间段内,本文以每分钟为单位时间记录单位时间内顾客的到达数量,然后随机记录100个顾客被服务的时间。顾客的能容忍的最长排队队长和等待时间采用问卷调查的方式随机调查了1000位顾客。

2.2.1 顾客到达服从分布的研究

以每分钟为一个单位记录了2个周末(共4天)17:00-18:00的顾客到达数量,将原始数据整理如表1所示。

通过对原始数据的处理,我们得到顾客单位时间内的平均到达率为6.9167人/min,平均到达间隔时间为0.1446 min/人。单位时间内顾客的到达数如图1所示。

由图 1 中的直方图可以看出,顾客到达数量的趋势与泊松分布曲线相似,所以建立原假设和备选假设如下:

H_0 为单位时间内顾客到达服从泊松分布;

H_1 为单位时间内顾客到达不服从泊松分布。

下面对周末 17:00 - 18:00 时段内的顾客到达分布进行研究,利用统计检验方法进行验证顾客到达的分布是否符合泊松流分布。因为泊松分布中的 λ 是未知数,所以首先用极大似然估计法来获取。

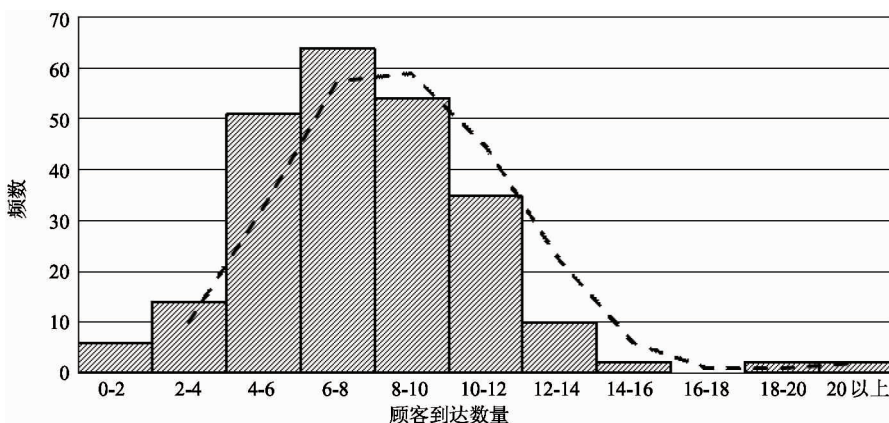


图 1 单位时间内顾客到达数量的直方图

假设总体 X 的分布函数 $F(X; \theta)$ 是服从参数为 $\lambda(\theta)$ 的泊松分布,即

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

X_1, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为样本观察值,则样本的极大似然函数是:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^n P(X = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdots x_n!} e^{-n\lambda} \end{aligned} \quad (3)$$

经推导得到 λ 的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{x} \quad (4)$$

所以 λ 的最大似然估计量为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \quad (5)$$

所以单位时间内的顾客平均到达率:

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = 6.9167 \text{ 人/min.}$$

表 1 单位时间内顾客到达数量情况

时间 \ 人数	频数					
	0~4	4~8	8~12	12~16	16~20	20以上
周六	7	32	18	2	1	0
周日	5	27	23	3	1	1
周六	5	31	19	4	0	1
周日	3	25	29	3	0	0

根据上文的卡方拟合检验知识,将 X 取值的全部分为 6 组,记为

$$\begin{aligned} A_1 &= [0, 4), A_2 = [4, 8), A_3 = [8, 12), \\ A_4 &= [12, 16), A_5 = [16, 20), A_6 = [20, +\infty), \end{aligned}$$

则概率 $p_i = P_n = \sum_{k=a_{i-1}}^{a_i} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, 其中 a_i 和 a_{i-1} 为第 A_i 组的上限和下限,理论频数为 nP_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, $n = 240$ 。对于理论频数小于 5 的进行合并,详见表 2。

由表 2 可知, $\chi^2 = 3.0838$ 。取 $\alpha = 0.05$, 分组合并后, $k = 4$, 计算概率时,估计了一个参数,所以 $r = 1$, 即 χ^2 的自由度 $k - r - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ 。查表知 $\chi_{0.05}^2 = 5.991$, 因此 $\chi^2 = 3.0838 < \chi_{0.05}^2$, 即在显著性水平为 0.05 的情况下不拒绝原假设 H_0 : 在该时段内到达的顾客数服从参数为 $\lambda = 6.9167$ 人/min 的泊松分布。

表2 χ^2 检验计算表

顾客到达数 (A_i)	实际频数 (f_i)	概率(P_i)	理论频数 (nP_i)	$\frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$
A_1	20	0.08622	20.6928	0.02320
A_2	115	0.52491	125.9784	0.95671
A_3	89	0.33920	81.408	0.70802
A_4	12			
A_5	2	0.049567	11.9208	1.39587
A_6	2			
总计	240	1	240	3.0838

2.2.2 顾客服务时间服从分布的研究

为了研究收银台服务时间的概率分布问题,我们在该超市随机调查了100个顾客的服务时间,整理如表3所示。

表3 顾客服务时间统计情况

序号	服务时间(s)	频数
1	[0,15)	4
2	[15,30)	6
3	[30,45)	15
4	[45,60)	23
5	[60,75)	22
6	[75,90)	19
7	[90,105)	7
8	[105,120)	2
9	[120, +∞)	2

根据原始数据可以得出顾客的平均服务时间为61.36 s,也即平均服务率为0.0163 人/s。

下面,首先用极大似然估计法来获取理论分布(负指数分布)中的未知参数。

假设总体 X 的分布函数 $F(X;\theta)$ 是服从参数为 $\mu(\theta)$ 的负指数分布,即

$$\varphi(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

则参数 μ 的极大似然函数为

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \varphi(t_i) = \prod_{i=1}^n \mu e^{-\mu t_i} = \mu^n e^{-\mu \sum_{i=1}^n t_i} \quad (7)$$

经过推导得到 μ 的最大似然估计值为

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{1}{\bar{t}} \quad (8)$$

所以 μ 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n T_i} = \frac{1}{\hat{T}} \quad (9)$$

因为 $\bar{t} = 61.36$, 所以 $\hat{\mu} = 0.0163$ 人/s。

建立原假设与备选假设:

H_0 是顾客服务时间服从负指数分布

H_1 是顾客服务时间不服从负指数分布

根据表3中的数据,利用SPSS软件中的单样本K-S检验,验证其是否服从负指数分布,并绘出P-P概率图,具体验证结果如表4和图2所示。

由表4单样本K-S检验表可知,在给定的显著性水平 $\alpha=0.05$ 的情况下,双侧渐进显著性水平为 $0.917 > 0.05$,所以接受原假设,并且数据在P-P概率图中呈现一条直线的趋势,表明顾客的服务时间服从参数为 $\mu=0.0163$ 人/s的负指数分布。

表4 单样本 K-S 检验

样本数(N)		9
指数参数 ^{a,b}	平均数	11.1111
	绝对值	0.185
最大差异列表	正	0.126
	负	-0.185
Kolmogorov-Smirnov Z		0.556
渐进显著性水平(双侧)		0.917

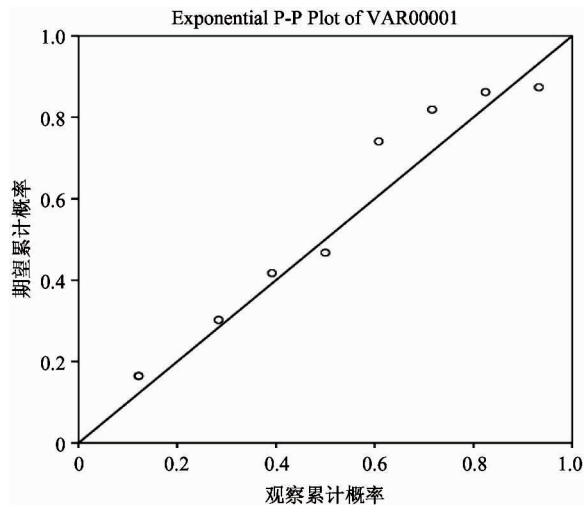


图2 服务时间的 P-P 概率图

综上所述,顾客的到达时间服从泊松分布、顾客的服务时间服从负指数分布,所以,该超市的收银台排队系统在下午 17:00-18:00 时间段内是一个 $M/M/c/\infty/\infty/FCFS$ 模型。

2.2.3 顾客能忍受的最长排队队长和等待时间的问卷处理

本文作者对该超市内部正在购物的顾客进行问卷调查,随机采访了 100 位顾客,主要是对顾客能忍受的最长等待时间和最长等待队长进行问卷,最终数据如表 5、表 6 所示。

表 5 顾客能忍受的最长等待时间

最长等待时间(min)	3 以下	3 ~ 6	6 ~ 9	9 以上
频数	17	47	26	10

表 6 顾客能忍受的最长排队队长

最长排队队长(人)	5 以下	5 ~ 10	10 以上
频数	38	56	6

由表 5 可以得到顾客能忍受的平均最长等待时间为

$$T = \frac{1.5 \times 17 + 4.5 \times 47 + 7.5 \times 26 + 10.5 \times 10}{100} = 5.37 \text{ s}$$

由表 6 可以得到顾客能忍受的平均最长排队队

长为

$$L = \frac{2.5 \times 38 + 7.5 \times 56 + 12.5 \times 6}{100} = 5.9 \text{ 人}$$

2.3 超市服务系统指标的计算与优化

由表 2 的数据处理分析可以得知,该超市在下午 17:00-18:00 时间段内的收银台开放台数、顾客到达率、平均服务时间分别为 $c = 5, \lambda = 6.9167 \text{ 人}/\text{min} = 415.002 \text{ 人}/\text{h}, \mu = 0.0163 \text{ 人}/\text{s} = 58.68 \text{ 人}/\text{h}$ 。

因此,该时段系统的服务强度 $\rho_c = 1.76807 > 1$, 这表明顾客在源源不断地到来,而结账完成离开超市的顾客又比较少,导致排队系统中的队长会越来越长,造成系统拥挤。只有当 $\rho_c < 1$ 时,系统才能够达到平衡状态,也即 $c > 7.07229$ 台时,系统才不会造成拥挤。

本文排队系统的数学模型由前文可知,故最优收银台数:

$c^* =$

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \rho_c = \frac{\lambda}{c\mu} \\ P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \right]^{-1} \\ L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)P_n = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0 \leq L \\ W_q = \frac{L_q}{\lambda} \leq T \end{array} \right.$$

由 LINGO 编程求出具体的数据如表 7 所示。

由表 7 可知,当 $c = 8$ 台时, $\rho_c = 0.884, L_q = 5.023 < 5.90 \text{ 人}, W_q = 0.012 \text{ h} = 0.72 \text{ min} < 5.37 \text{ min}$, 系统不会拥挤,同时也不会造成服务强度过低导致系统资源的浪费,而且队长和等待时间都低于顾客的忍受能力,所以开放 8 个收银台比较适合。这样既不会造成资源的浪费,同时也能较好地保证顾客的满意度。

3 结论

本文主要是通过排队论的知识对超市收银台服务系统建立数学模型,然后通过排队系统的性能指标对超市收银台排队系统进行优化,得出最佳的收

表7 优化后系统各指标

收银台数 c (台)	服务强度 ρ_c	空闲概率 P_c	平均等待 队长 L_q (人)	平均人数 L_s (人)	平均等待 时间 W_q (h)	平均逗留 时间 W_s (h)
8	0.884	0.341	5.023	12.095	0.012	0.029
9	0.786	0.598	1.474	8.546	0.004	0.021

银台开放数量。本文运用排队论中的多服务台负指数分布排队模型的知识来研究生活中的超市排队问题,对排队论有了更深入的研究,但是由于时间和水平的限制,所做的研究工作只能是初步的,本文在实际调查中采集了2个周末共4天的数据,但在调查过程中存在一定的主观因素,而且在调查收银台的服务时间时有一定的误差存在。在本文中,顾客能忍受的最大排队队长和最大等待时间设定为5.90人和5.37 min,而在实际生活中,排队等待的顾客在不同时间段的耐心可能不同,需要进一步研究。

参考文献

[1] Boris M. Optimization of queuing system via stochastic control[J]. *Automatica*, 2009,45(6):1423-1430
 [2] So K C, Tang C S. On managing operating capacity to reduce congestion in service systems[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 92:83-98
 [3] Kim J, Bae J, Lee E Y. An optimal P_X^M -service policy for an M/G/1 queuing system [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2006, 31(1): 38-48
 [4] 王婷婷,杨琴,黄琳,等. 基于顾客行为特征的超市收银口优化调度方案[J]. *计算机工程与应用*,2016,52(3):266-270
 [5] 王婷婷,杨琴. 基于模拟植物生长算法的超市收银口

优化调度. *计算机应用*,2014,34(5): 1516-1520
 [6] 王冠一,邓华. 基于 Witness 的超市收银排队系统仿真与优化[J]. *东南大学学报*,2015,17(增刊):86-88
 [7] 曲巍. 基于排队论的超市收银管理排队服务系统应用研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学理学院, 2012. 1-30
 [8] 徐国志,桂湘云. 运筹学[M]. 第三版. 北京:清华大学出版社,2004. 301-329
 [9] 陆凤山. 排队论及其应用[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1984. 142-148
 [10] 袁卫,庞皓. 统计学[M]. 北京:高等教育出版社, 2009. 149-176
 [11] 卢纹岱. SPSS 统计分析[M]. 北京:电子工业出版社, 2003. 382-383
 [12] 唐应辉,唐小我. 排队论[M]. 北京:科学出版社, 2006. 50-54
 [13] 秦天保,周向阳. 实用系统仿真建模与分析[M]. 北京:清华大学出版社,2012
 [14] 奚卫宇. 基于顾客满意的大型超市收银系统仿真研究 [D]. 沈阳:东北大学工商管理学院,2008. 1-60
 [15] 蔡金凤. 基于排队论的大型超市服务台数的最优设计 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学理学院,2009. 10-46
 [16] 张雅清. 排队论在超市收银服务系统中的应用研究 [D]. 重庆:重庆师范大学理学院,2007. 1-42
 [17] 王宝府. 大型超市收银服务系统优化分析[D]. 长春:吉林大学商学院,2010. 1-67
 [18] 范泽超,吴金卓. 排队论在某家乐福超市服务台优化设计中的应用[J]. *森林工程*,2014,30(2):143-148

Analysis and optimization on checkout queuing system of supermarket

Xiong Junxing*, Zhao Jinping**, Zhang Qing*, Liu Jiansheng*

(* School of Mechanical and Electronic Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031)

(** College of Science and Technology, Nanchang University, Nanchang 330029)

Abstract

The cash register system of a supermarket is optimized. Depending on the largest queue length and the longest waiting time the customer can accept for constraints, a model of negative exponential distribution queuing system of multiple service checkouts is established. According to the collected data including the quantity of customers over a period of time, the service time of single customer and the related questionnaire survey, the variables and parameters for simulations are obtained. Then taking the processed data into the queue system model, the optimal solution can be determined. Ultimately, the optimal number of checkout can be determined in the vanguard supermarket.

Key words: supermarket, checkout, queuing system