

有约束复杂随动被控对象理论分析与模型建立^①

付荣荣^② 田永胜 侯培国 鲍甜恬

(燕山大学电气工程学院 秦皇岛 066004)

摘 要 本文研究缘于医疗康复领域的需求,帮助一些运动机能受损的患者部分恢复生活自理能力。针对这一问题,本文提出建立一种以神经康复为背景并符合日常场景的被控任务。分别从基于达朗伯原理的动静法和动态临界能量两个角度进行理论分析,针对日常生活中常见的移动水杯并无液体溢出这一实际过程提出了概念化的“碗-球”动态复杂系统,并依据平衡方程和动力学普遍方程(欧拉-拉格朗日方程)建立了该被控对象的数学模型,得到动态微分表达式、传递函数和状态空间方程,揭示了系统内部的运动状态,为此被控任务的实现提供理论基础。并进一步对该被控对象的能控性及能观性进行分析,结果证明了本系统的外界输入量对系统状态具有很高的控制能力以及输出量对状态具有很好的反映能力,为神经康复研究提供了一个新的研究对象。

关键词 动态复杂系统, 数学建模, 欧拉-拉格朗日方程, 能控性与能观性分析

0 引 言

随着控制过程复杂性的提高,控制理论的实际应用不能脱离被控对象的数学模型。然而在多数情况下,被控对象的数学模型是未知的,或者在正常运行期间模型的参数可能发生变化,因此利用控制理论去解决实际问题时,首先需要建立被控对象的数学模型^[1]。

计算神经科学研究中使用到的绝大多数实验范式为有约束任务,例如有些任务被设计为以最快速度将目标对象移动至目标位置^[2,3]。构建这种实验范式的基本想法是通过极限条件下的感知运动控制系统来获得运动控制的时空准确度。尽管此种范式在神经康复研究中广泛应用,但日常生活中很难碰到与此种范式场景相类似的任务^[4]。而神经康复研究的主要目的是帮助运动障碍患者恢复生活自理能力,这就需要以实际生活的场景为研究目标。生

活中很多任务需要人们动态地操纵复杂对象并保持在合适的临界能量之内,例如在一个平面上移动水杯保证水没有外溢。这类行为并不要求动作执行得很快,对于水杯的放置落点也没有严格的要求,关键就在于移动水杯到达桌子这一过程中水不能溢出。于是针对这一实际问题建立一个概念化的模型,即移动一个虚拟的盛有小球的碗到指定目标点使球不掉出碗,在临界能量范围之内实现对此被控对象的控制。此任务可以应用本文所建立的动态模型来描述,为控制理论及应用提供一个新的研究对象。

在对此“碗-球”动态系统进行建模的过程中,要求充分地了解被控对象的运动规律,即它们在一定的内外条件下所必然产生的相应的运动。以数学形式表示该系统内外条件与运动之间所存在的因果关系就是控制系统运动规律的数学描述,即数学建模。于是本文采用白盒法进行建模,即所谓的机理法建模。机理建模的优点在于其具有一定的理论依据,在多种不同状态下使用都不会引起定性的错误。建

① 国家自然科学基金(51605419),河北省自然科学基金(E2018203433),中国博士后面上项目(2016M600193)和河北省引进留学人员(CI201727)资助项目。
② 女,1985年生,博士;研究方向:脑控系统,机器学习;E-mail: fr1102@aliyun.com
(收稿日期:2018-03-30)

模时,在对系统进行分析的基础上做出合理的假设,以简化系统并为建模提供一定的理论依据建立相应的数学模型。本文分别从基于达朗伯原理的动静法分析和动态临界能量两个角度进行理论分析,针对日常生活中常见的移动水杯并无液体溢出这一实际过程提出了概念化的“碗-球”动态系统,并建立了该被控对象的数学模型。

1 任务模型与运动方程推导

1.1 动态任务模型

移动水杯任务如图 1(a),概念化之后的模型如

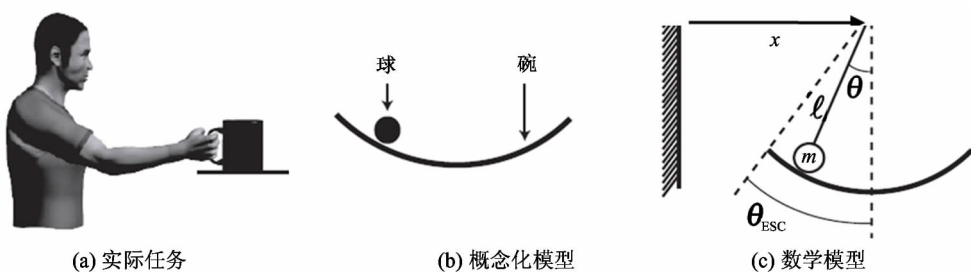


图 1 动态任务模型图

1.2 碗-球系统的微分方程动态表达

1.2.1 基于达朗伯原理的动静法分析

达朗伯原理从静力学中研究平衡的方法研究动力学问题,又称为动静法分析。根据物理准则对过程进行分析,借助于图 2 所示的系统的受力分析图,图中可以看到当碗-球系统受到外力 F 的作用时,碗和球共同运动并且球相对于碗会产生一个偏角 θ ,

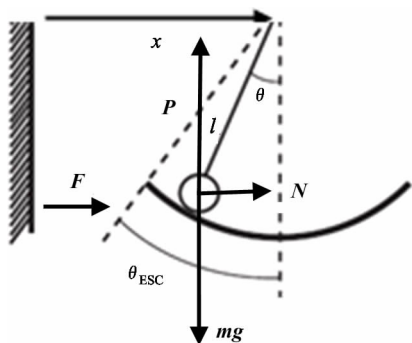


图 2 受力分析图

图 1(b)所示,可以看到将实际的移动水杯任务中的咖啡杯简化为了一段弧同时将杯中的液体简化为弧中的小球,小球与碗形成了动态复杂系统,并以此概念化模型来模拟实际移动水杯的任务。其中碗被限定沿着水平维度移动,当碗水平受力时,球和碗共同运动,球在碗中振荡。对应的数学模型如图 1(c)所示,其中 x 代表了碗的水平位置, M 和 m 分别是碗和球的质量, θ 是球的瞬时角度, θ_{ESC} 则代表了球的逃逸角度, l 是碗的半径。

以下将从物理准则和动态临界能量两个角度分析系统的运动方程,得到系统的微分方程表达式。

分析小球受力情况,于是除了其自身重力以外,碗对球有一个径向的支撑力,将其分解为水平分力 N 和竖直分力 P 。

于是以碗为研究对象其水平方向受力情况根据牛顿第二定律可以得到:

$$F = M\ddot{x} + N \quad (1)$$

小球在水平方向受力分析如式(2)所示。

$$N = m \frac{d^2}{dt^2}(x - l\sin\theta) \\ = m\ddot{x} + ml\sin\theta \cdot \ddot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中,可得:

$$F = (M + m)\ddot{x} + ml\sin\theta \cdot \ddot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \quad (3)$$

根据碗的切向方向球的受力可以得到:

$$mg\sin\theta - P\sin\theta + N\cos\theta = -ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta \quad (4)$$

其中 P 和 N 为碗对球支撑力在水平和竖直方向上的分力,于是有 $-P\sin\theta + N\cos\theta = 0$, 式(4)变为 $mg\sin\theta = -ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta$, 整理得到式(5):

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{l} \cos\theta - \frac{g}{l} \sin\theta \tag{5}$$

1.2.2 动态临界能量角度

从动态临界能量角度,碗球动态系统能量分布示意图如图 3 所示,其中 $KE_{球}$ 表示球的动能, $PE_{球}$ 表示球的势能并且与球的质量和高度有关, $KE_{碗}$ 代表碗的动能。则有:

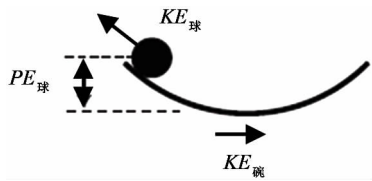


图 3 动态系统能量分析图

$$KE_{球} = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2] \tag{6}$$

$$PE_{球} = mgl(1 - \cos\theta) \tag{7}$$

$$KE_{碗} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{8}$$

根据保守力学系中的拉格朗日量定义,得到本文动态系统的拉格朗日量^[5,6]为 $L = KE_{总} - PE_{总}$, 选取广义坐标 x 和 θ , 于是:

$$L(x, \theta) = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2] + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{9}$$

进一步根据欧拉-拉格朗日方程^[7,8],有:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{11}$$

首先分析欧拉-拉格朗日方程(10),将拉格朗日量分别对 x 和 $\dot{x}$ 进行求一阶偏导有:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m + M)\dot{x} - ml\dot{\theta}\cos\theta$$

进一步将 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ 对时间 t 求导,得到:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} + m\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta}$$

于是对欧拉-拉格朗日方程(10)整理可得:

$$F = (M + m)\ddot{x} + m\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \tag{12}$$

然后分析欧拉-拉格朗日方程(11),将拉格朗日量分别对 θ 和 $\dot{\theta}$ 进行求一阶偏导有:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta}$$

进一步将 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ 对时间 t 求导,得到:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -ml\ddot{x}\cos\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta}$$

于是对欧拉-拉格朗日方程(11)整理可得到:

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{l} \cos\theta - \frac{g}{l} \sin\theta \tag{13}$$

1.2.3 微分方程动态表达式化简

前文从基本物理准则角度和动态临界能量角度对碗-球系统进行了分析,首先从基本物理准则出发得到系统的微分表达式如式(3)和(5)所示,然后从动态临界能量角度出发推导得到系统的微分表达式如式(12)和(13)所示。从中可以看出这两个角度对于碗球系统给出了一致的分析结果,于是对系统的微分方程表达式进行如下化简。

对式(3)和(5)在平衡点附近按照 $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$, $\ddot{\theta} = 0$ 规则进行简化得到:

$$F = (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \tag{14}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{l} - \frac{g}{l} \tag{15}$$

把式(15)代入式(14)中得到:

$$M\ddot{x} + mg\theta - F = 0 \tag{16}$$

由式(16)得 $\ddot{x} = \frac{F - mg\theta}{M}$ 代入式(15),得到 $\ddot{\theta} = \frac{F - mg\theta}{Ml} - \frac{g}{l}\theta$, 进一步整理得到:

$$Ml\ddot{\theta} + (M + m)g\theta - F = 0 \tag{17}$$

于是模型化简后的微分方程表达式如下。

$$\begin{cases} M\ddot{x} + mg\theta - F = 0 \\ Ml\ddot{\theta} + (M + m)g\theta - F = 0 \end{cases} \tag{18}$$

1.3 碗-球系统的传递函数模型

设输入 $F = u$, 输出速度 $v = \dot{x}$, 对式(17)进行拉普拉斯变换得:

$$Ml\varphi(s)s^2 + (M + m)g \cdot \varphi(s) - U(s) = 0 \tag{19}$$

整理得到球的输出输入之间的传递函数为:

$$\frac{\varphi(s)}{U(s)} = \frac{1}{Mls^2 + (M+m)g} \quad (20)$$

对(16)式进行拉普拉斯变换得:

$$M \cdot V(s) \cdot s + mg\varphi(s) - U(s) = 0 \quad (21)$$

将式(20)代入式(21)得:

$$M \cdot V(s) \cdot s + mg \frac{U(s)}{Mls^2 + (M+m)g} - U(s) = 0 \quad (22)$$

整理得到碗的输出输入之间的传递函数为

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{Mls^2 + Mg}{Mls^2 + (M+m)g} \quad (23)$$

也可以其他的被控参数来计算传递函数。

1.4 碗-球系统的状态空间模型

在状态空间分析中,涉及3种变量类型,即状态变量、输入变量和输出变量。取球碗系统的状态变量如下,碗当前在水平方向上的位移 x ,碗的水平方向运动速度 $\dot{x}$,球偏离垂直方向的角位移 φ ,以及小球振荡的角速度 $\dot{\varphi}$ 。于是系统的状态变量 $\mathbf{X} = [x \ \dot{x} \ \varphi \ \dot{\varphi}]^T$,输入变量为施加在碗上的水平作用力 $u = F$,输出变量可以为 $\mathbf{Y} = [\dot{x} \ \ddot{x} \ \dot{\varphi} \ \ddot{\varphi}]^T$ 或其中的某一个或某几个。

由系统的微分方程表达式(18)可以得到:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{F}{M} \\ \ddot{\theta} = -\frac{(M+m)g\theta}{Ml} + \frac{F}{Ml} \end{cases} \quad (24)$$

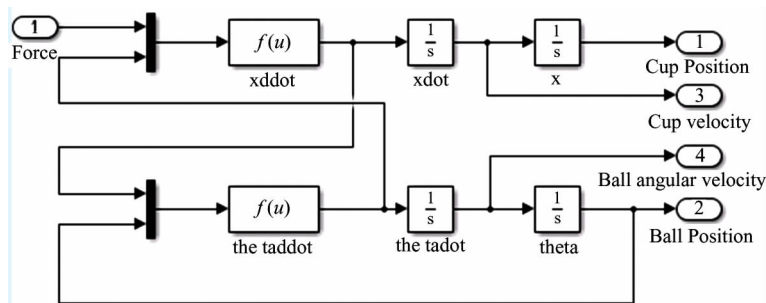


图4 碗球系统结构图

在输出量中以球的位置为例,仿真结果如图5所示。初始状态 $\theta = 0$ 为小球相对小碗摆动的角度下限值,而在恒力作用下,小球随小碗运动将会有一

根据系统的输入变量、状态变量和输出变量,建立碗球系统的状态空间方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (25)$$

由系统的状态方程的标准形式 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$ 可以对应得到本系统的系统矩阵 $\mathbf{A}$ 和输入矩阵(控制矩阵) $\mathbf{B}$,找到系统内部状态之间的联系以及输入量对状态的作用。它能反映系统的全部独立变量的变化,从而能同时确定系统的全部内部运动状态^[9],可以适应同时控制多个对象的要求。在本系统中,多个被控对象可以是碗的位置、碗的速度、球的角速度和球的位置中的一个或几个状态量。

2 系统结构图及模型验证

由式(24)定义了 $\ddot{x}$ 和 $\ddot{\theta}$ 的函数,据此可以构建碗球系统的结构如图4所示。图4中输入为力 F ,输出量为碗的位移(cup position),碗的速度(cup velocity),球的位置(ball position)和球的角速度(ball angular velocity)。

个上限摆动角 θ' ,所以,整个摆动运动就是碗中小球在 $0 \leq \theta \leq \theta'$ 区间内往复摆动, θ' 的取值与初始力 F 的大小有关。

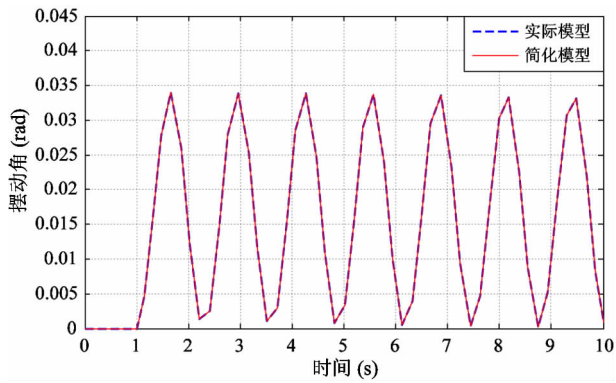


图 5 小球摆角 θ 仿真图

3 系统的能控性及可观性分析

在状态空间描述的基础上,分析系统的能控性和可观性,两者具有对偶关系^[10]。状态方程描述了输入量引起各个状态的变化过程;输出方程则描述了由状态变化引起的输出的变化。能控性和可观性分别分析输入量对状态的控制能力以及输出对状态的反映能力^[11]。

能控性分析由系统矩阵 A 和输入矩阵(控制矩阵) B 按照式(26)构造能控性矩阵 CM ,其中系统状态变量个数 $n=4$ 。

$$CM = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \\ = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \tag{26}$$

由式(25)所确定的“碗球系统”的系统矩阵 A 和输入矩阵 B 计算得到本系统的能控性矩阵 CM ,能控性矩阵为满秩时,系统可控。使用 Matlab 中 rank 函数可以得到矩阵的秩,rank(CM)=4,证明了能控性矩阵为满秩,该系统可控^[12]。

可观性分析由系统矩阵 A 和输出矩阵 C 按照式(27)构造能控性矩阵 OM 。

$$OM = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \tag{27}$$

根据输出变量的不同可以构造不同的输出矩阵 C ,对于系统的状态变量 $X = [x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]^T$,如果指定输出为 $\dot{x}$ 和 φ ,则输出矩阵 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,据此构造能控性矩阵 OM ,并计算

该矩阵的秩得到 rank(OM)=4,证明了可观性矩阵为满秩,该系统变量可观。若指定所有状态变量均

作为输出变量,则输出矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,得

到的能控性矩阵仍为满秩,该系统的变量均可观。

4 结 论

以符合日常场景为出发点,提出了一种模拟移动水杯而没有水外溅的控制任务,并建立了概念化“碗-球”动态复杂系统。拓宽了神经康复的实验范式,提供了新的被控对象。分别从达朗伯原理和临界能量的角度分析并推导得到了“碗球系统”的运动方程。基于欧拉-拉格朗日方程建立的碗球系统的微分方程与基于动静法得到的微分方程得到了一致的结果。并且通过近似得到了系统简化后的微分方程。分别推导了碗球系统的传递函数和状态空间方程,得到系统的数学模型,反映了系统的全部独立变量变化,同时揭示了系统全部内部运动状态,为基于此模型的实验范式的实现提供了理论基础。根据系统的数学模型建立了“碗球系统”的结构图,直观地给出了系统内部各种状态间的关系及各个环节的连接。对该被控对象的能控性及能观性进行分析,验证了本文提出系统是可控的同时系统中各个状态是可观的,证明了本系统的外界输入量对系统状态具有很高的控制能力以及输出量对状态具有很好的反映能力。

参考文献

[1] 韩璞,董泽. 智能控制理论及应用[M]. 北京:中国电力出版社, 2013

[2] Allison B Z, Brunner C, Altstätter C, et al. A hybrid ERD/SSVEP BCI for continuous simultaneous two dimensional cursor control[J]. *Journal of Neuroscience Methods*, 2012, 209(2): 299-307

[3] El Falou W, Duchêne J, Grabisch M, et al. Evaluation of driver discomfort during long-duration car driving[J]. *Applied Ergonomics*, 2003, 34(3): 249-255

- [4] Hasson C J, Shen T, Sternad D. Energy margins in dynamic object manipulation[J]. *Journal of Neurophysiology*, 2012, 108(5): 1349-1365
- [5] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics I [M]. New York: Springer-Verlag, 1978
- [6] 陶为俊, 浣石. 沿时间逐步求解应力的拉格朗日分析方法研究[J]. *物理学报*, 2012, 61(20): 200703
- [7] 丁光涛. 状态空间 Lagrange 函数和运动方程[J]. *中国科学 G 辑:物理学力学天文学*, 2009, 39(6): 813-820
- [8] Gao S. General maximum entropy principle for self-gravitating perfect fluid[J]. *Physical Review D*, 2011, 84(10): 104023
- [9] 方子帆, 邓兆祥. 汽车振动系统状态空间模型的研究[J]. *中国机械工程*, 2005, 16(4): 353-357
- [10] 陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战[J]. *自动化学报*, 2013, 39(4): 312-321
- [11] 谢广明, 郑大钟. 一类混合动态系统的能控性和能观性研究[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(1):139-142
- [12] 张雪峰, 张庆灵. 线性时变广义系统的能空性与能观性问题[J]. *自动化学报*, 2009, 35(9):1249-1253

Theory Analysis and model development on a constraint servo control system

Fu Rongrong, Tian Yongsheng, Hou Peiguo, Bao Tiantian

(School of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract

This research comes from the field of medical rehabilitation, it helps disabled person repair human sensory-motor functions. On this background, a task by emulating everyday scenario is modeled. The system analyses are processed from different aspects of D'Alembert principle and energy safety margin. A conceptual 'cup and ball' model is proposed to emulate the everyday activity of transporting a cup of water without water spilling. Based on equilibrium equations and Euler-Lagrange equation, an appropriate mathematical model of the system is developed, which can reveal motion states in this system and provide the theoretic foundation for realizing this task. The controllability and observability analyses are given after the mathematical model obtained, and experiment results show that this system is both completely state controllable and observable. This study provides a new dynamic object for control research in the field of medical rehabilitation.

Key words: complex dynamic system, mathematical modelling, Euler-Lagrange equation, controllability and observability analysis