

# VTOL 飞行器有限时间轨迹跟踪控制<sup>①</sup>

邹立颖<sup>②\*</sup> 王红艳<sup>\*\*\*</sup> 苗凤娟<sup>\*\*</sup> 王艳春<sup>\*\*</sup>

( \* 燕山大学电气工程学院 秦皇岛 066004 )

( \*\* 齐齐哈尔大学通信与电子工程学院 齐齐哈尔 161006 )

( \*\*\* 齐齐哈尔大学机电工程学院 齐齐哈尔 161006 )

**摘 要** 针对 VTOL 飞行器的轨迹跟踪控制问题,提出一种基于有限时间控制的控制方案。鉴于 VTOL 飞行器系统是强耦合的非线性系统,首先采用系统分解技术将原系统解耦成两个子系统,将原系统的输出跟踪问题转化为两个子系统的镇定问题。对于解耦后的系统,设计了有限时间控制律,所设计的控制器能够保证闭环系统有限时间稳定,克服了传统有限时间控制的弊端。仿真结果表明了所提出的控制方法具有良好的跟踪性能,能够实现飞行器对给定参考轨迹的快速、准确跟踪。

**关键词** 垂直起降(VTOL)飞行器,输出跟踪,有限时间控制,欠驱动

## 0 引 言

VTOL(vertical take-off and landing)飞行器是一种能够垂直起飞和着陆的飞行器<sup>[1]</sup>,其研究始于二战时期,由于 VTOL 飞行器的起降不依赖跑道、无需建造大机场及良好的机动性能,在执行特殊任务时能发挥巨大作用,因而在军事领域具有重要意义。在过去的数十年里,VTOL 飞行器的控制问题一直成为各军事大国研究的重要课题之一。

VTOL 飞行器系统控制的难点在于它具有 3 个自由度和 2 个控制输入,是一种典型的欠驱动、强耦合、非最小相位系统<sup>[1-3]</sup>,这使得 VTOL 飞行器的研究课题极富挑战性。目前 VTOL 飞行器的研究方向主要有两个:镇定控制和轨迹跟踪控制。在过去的几十年里,国内外很多学者提出了许多控制方法。早期 Hauser<sup>[4]</sup>等人提出一个近似输入输出线性化控制方法,该方法忽略了输入耦合将飞行器近似为最小相位系统,最终实现了 VTOL 飞行器有界跟踪

和渐近镇定控制。但实际中,输入耦合是不可忽略的。Martin<sup>[5]</sup>等人提出一种“微分平滑”的解耦方法,通过坐标变换将输出变成“惠更斯”中心,从而使原模型解耦成最小相位系统,针对最小相位系统设计了跟踪控制律。文献[6]采用模型分解的方法研究了输出轨迹跟踪问题。文献[7]采用 Lyapunov 直接法设计了保证 VTOL 飞行器系统全局镇定的控制律,同时用 LaSalle 不变集理论给出了全局渐近收敛稳定性证明。文献[8-10]基于观测器重构速度信号,采用反步法实现了 VTOL 飞行器全局输出渐近跟踪。文献[10-12]考虑输入受限情况,提出一种基于内嵌饱和函数的 VTOL 飞行器镇定新方法。文献[13]研究了执行器故障情况下的系统稳定性问题。

截至目前,飞行器系统的输出轨迹跟踪控制问题,仍是一个开放性课题。鉴于此,考虑 VTOL 飞行器输入存在耦合情况下的输出跟踪控制问题,本文提出一种将系统分解技术与有限时间控制方法相结合的控制策略。首先,采用系统分解方法将 VTOL

① 黑龙江省留学归国人员科学基金(LC2017028)和黑龙江省教育厅基本科研业务专项(齐齐哈尔大学科研项目:135209237)资助。

② 女,1980年生,博士,副教授;研究方向:飞行器控制,非线性控制;联系人,E-mail: zouliying2007@126.com  
(收稿日期:2018-04-12)

飞行器系统解耦成两个子系统。然后,对于解耦后系统,采用有限时间控制方法设计了有限时间控制律,使得闭环系统在有限时间内快速收敛。所提出的有限时间控制律中包含切换函数,使得闭环系统在两种情况下都保证快速收敛,解决了已有的有限时间控制器在远离原点时收敛速度慢的问题。最后,给出的仿真结果表明本文所提出的控制器具有良好的跟踪性能,能够保证系统快速、准确地跟踪给定参考轨迹。

1 预备知识

考虑文献[4]提出的 VTOL 飞行器简化动力学模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -u_1 \sin x_5 + \varepsilon u_2 \cos x_5 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u_1 \cos x_5 + \varepsilon u_2 \sin x_5 - g \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = u_2 \\ y = (x_1, x_3, x_5)^T \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $(x_1, x_3)$  是 VTOL 飞行器质心的水平和垂直方向位置,  $x_5$  为滚转角,  $u_1$  和  $u_2$  为飞行器底部推力控制输入和滚动控制输入,  $g$  为重力加速度,  $\varepsilon$  是描述滚动控制输入和横向加速度关系的耦合系数。由 VTOL 飞行器动力学模型可见, VTOL 飞行器为非最小相位系统。

本文解决的问题是 VTOL 飞行器的轨迹跟踪问题,控制目标为:对于给定飞行器的位置参考轨迹  $Y_d = (y_{1d}, y_{2d})$ , 设计控制律  $u_1$  和  $u_2$  使得  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  分别渐近跟踪位置  $y_{1d}$  和  $y_{2d}$ , 同时保证滚转角  $x_5$  稳定。

为便于后续控制器设计,本研究先给出一些定义和引理。

**定义 1**<sup>[14]</sup> 称向量场  $f(x): R^n \rightarrow R^n$  关于  $(r_1, \dots, r_n) \in R^n, r_i > 0, i = 1, \dots, n$  具有齐次度  $k$ , 若对  $\forall \tau > 0, x \in R^n$ , 满足

$$f_i(\tau^{r_1} x_1, \dots, \tau^{r_n} x_n) = \tau^{k+r_i} f_i(x), i = 1, \dots, n$$

其中  $k \geq -\max\{r_i, i = 1, \dots, n\}$

**引理 1**<sup>[14]</sup> 如果连续系统  $\dot{x} = f(x)$  是全局渐近稳定的且齐次度  $k < 0$ , 则该系统为全局有限时间稳定的。

**引理 2**<sup>[14]</sup> 以下系统是全局有限时间稳定的。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 s(\alpha_1, x_1) - k_2 s(\alpha_2, x_2) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $s(\cdot)$  定义为

$$s(\alpha_i, x) = \begin{cases} \text{sign}(x) |x|^{\alpha_i}, & |x| \leq 1 \\ x, & |x| > 1 \end{cases} \quad (3)$$

且  $0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1), k_1, k_2 > 0$ 。

2 控制器设计

2.1 系统解耦

由于模型中输入存在耦合,不利于控制器设计。本文采用 Olfati-Sber 提出的解耦方法<sup>[3]</sup>对 VTOL 飞行器模型进行输入解耦。

令

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \varepsilon \sin x_5, z_2 = \dot{x}_1 - \varepsilon \cos x_5 \cdot x_6 \\ z_3 &= x_3 + \varepsilon (\cos x_5 - g), z_4 = \dot{x}_3 - \varepsilon \sin x_5 \cdot x_6 \\ z_5 &= x_5, z_6 = x_6 \end{aligned} \quad (4)$$

则系统式(1)表示为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\bar{u}_1 \sin z_5 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \bar{u}_1 \cos z_5 - g \\ \dot{z}_5 = z_6 \\ \dot{z}_6 = u_2 \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\bar{u}_1 = u_1 - \varepsilon x_6^2$ 。

对于解耦后的系统式(5),基于系统分解方法<sup>[3]</sup>,分解为两个子系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\bar{u}_1 \sin z_5 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \bar{u}_1 \cos z_5 - g \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_5 = z_6 \\ \dot{z}_6 = u_2 \end{cases} \quad (7)$$

第一个子系统由 4 个方程构成, 控制输入为  $\bar{u}_1$ , 将  $z_5$  当作虚拟输入, 用  $z_{5d}$  表示; 第二个子系统由 2 个方程构成, 控制输入为  $u_2$ 。思路为: 设计控制律  $\bar{u}_1$  和  $z_{5d}$  用来控制第一个子系统, 然后设计控制律  $u_2$  使得  $z_5$  在有限时间内快速收敛于  $z_{5d}$ 。

定义

$$\bar{u}_1 = \sqrt{r_1^2 + (r_2 + g)^2}, z_{5d} = \arctan\left(\frac{-r_1}{r_2 + g}\right) \quad (8)$$

$$r_1 = -\bar{u}_1 \sin z_{5d}, r_2 = \bar{u}_1 \cos z_{5d} + g \quad (9)$$

其中  $r_1$  和  $r_2$  为辅助控制变量。

当  $z_5 = z_{5d}$  时, 有

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = r_1 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = r_2 \end{cases} \quad (10)$$

## 2.2 有限时间控制器设计

基于解耦后的子系统式(7)和式(10), 本节采用有限时间控制方法设计了有限时间控制律, 使得 VTOL 飞行器系统在有限时间内稳定地完成跟踪任务。

令期望轨迹为  $(z_{1d}, z_{2d})$ , 轨迹跟踪目标为:  $z_1 \rightarrow z_{1d}, z_3 \rightarrow z_{2d}$ , 同时保证  $z_5$  稳定。

定义跟踪误差变量:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 - z_{1d}, e_2 = z_2 - \dot{z}_{1d} \\ e_3 &= z_3 - z_{2d}, e_4 = z_4 - \dot{z}_{2d} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)中, 得到跟踪误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= r_1 - \ddot{z}_{1d} \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= r_2 - \ddot{z}_{2d} \end{aligned} \quad (12)$$

定义误差变量:

$$e_5 = z_5 - z_{5d}, e_6 = z_6 - \dot{z}_{5d} \quad (13)$$

将式(13)代入式(7)可得:

$$\begin{aligned} \dot{e}_5 &= e_6 \\ \dot{e}_6 &= u_2 - \ddot{z}_{5d} \end{aligned} \quad (14)$$

至此, 原系统式(1)的跟踪问题就转换成跟踪误差子系统式(12)和式(14)的镇定控制问题。接下来, 分别对两个跟踪误差子系统式(12)和式(14)

设计控制律。

对于子系统式(12), 选取有限时间控制律:

$$r_1 = \dot{z}_{1d} - k_1 s(\beta_1, e_1) - k_2 s(\beta_2, e_2) \quad (15)$$

$$r_2 = \dot{z}_{2d} - k_3 s(\beta_1, e_3) - k_4 s(\beta_2, e_4) \quad (16)$$

其中,  $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0, 0 < \beta_1 < 1, \beta_2 = 2\beta_1/(1 + \beta_1), s(\cdot)$  由式(3)定义。

由式(10)、(15)和(16)得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1 s(\beta_1, e_1) - k_2 s(\beta_2, e_2) \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= -k_3 s(\beta_1, e_3) - k_4 s(\beta_2, e_4) \end{aligned} \quad (17)$$

显然, 由引理 2 可得, 闭环系统式(17)是全局有限时间稳定的。因此存在时间  $T_1$ , 使得当  $t > T_1$  时,  $e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 0, e_4 = 0$ , 即系统跟踪上给定的期望位置。

对于子系统式(14), 设计有限时间控制律:

$$u_2 = \dot{z}_{5d} - k_5 s(\beta_3, e_5) - k_6 s(\beta_4, e_6) \quad (18)$$

其中,

$$k_5, k_6 > 0, 0 < \beta_3 < 1, \beta_4 = 2\beta_3/(1 + \beta_3)。$$

由式(14)和(18), 得到闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}_5 &= e_6 \\ \dot{e}_6 &= -k_5 s(\beta_3, e_5) - k_6 s(\beta_4, e_6) \end{aligned} \quad (19)$$

同样, 由引理 2 可得, 闭环系统式(19)是有限时间稳定的。因此, 存在有限时间  $T_2 (T_2 < T_1)$ , 使得当  $t > T_2$  时,  $e_5 = 0$ , 即  $z_5 = z_{5d}, z_5$  快速收敛到  $z_{5d}$ 。下面以定理形式总结本文的研究成果。

**定理 1:** 对于 VTOL 系统式(5), 如果采用由式(8)、(9)、(15)、(16)和(18)组成的有限时间控制器, 则闭环系统是全局有限时间稳定的。即,  $z_1 \rightarrow z_{1d}, z_2 \rightarrow \dot{z}_{1d}, z_3 \rightarrow z_{2d}, z_4 \rightarrow \dot{z}_{2d}, z_5 \rightarrow z_{5d}$ 。

**注 1:** 大多数有限时间控制器闭环系统具有负的齐次度, 这是有限时间控制器在 origin 附近收敛的关键, 但是同时也降低了系统远离 origin 时的收敛速度。本文中采用的有限时间收敛控制器中采用  $s(\cdot)$  函数,  $s(\cdot)$  具有切换结构, 当状态远离 origin 时, 系统指数稳定, 当状态邻近 origin 时, 切换为有限时间收敛。这样就解决了上述的收敛速度问题。此外, 也保证了旋转子系统收敛速度快于平移子系统。

3 仿真结果

为验证本文所提控制算法的有效性,在 MATLAB/SIMULINK 环境下进行了 VTOL 飞行器仿真实验。设定期望轨迹为圆形:  $y_{d1} = 3\cos(0.2t)$ ,  $y_{d2} = 3\sin(0.2t)$ , 模型耦合参数为  $\varepsilon = 0.5$ , 飞行器系统初始状态为  $x(0) = [2 \ 0.01 \ 1 \ 0.01 \ 0.05 \ 0]^T$ , 控制器参数为  $\beta_1 = \frac{3}{5}, \beta_2 = \frac{3}{4}, \beta_3 = \frac{4}{5}, \beta_4 = \frac{8}{9}, k_1 = k_2 = 1, k_3 = k_4 = 1, k_5 = 1.5, k_6 = 1.5$ 。

仿真结果如图 1~图 4 所示,图 1 表示输出轨迹跟踪曲线,图 2 表示飞行器滚转角及其角速度变化曲线;由图 1 和图 2 可见,VTOL 飞行器能够快

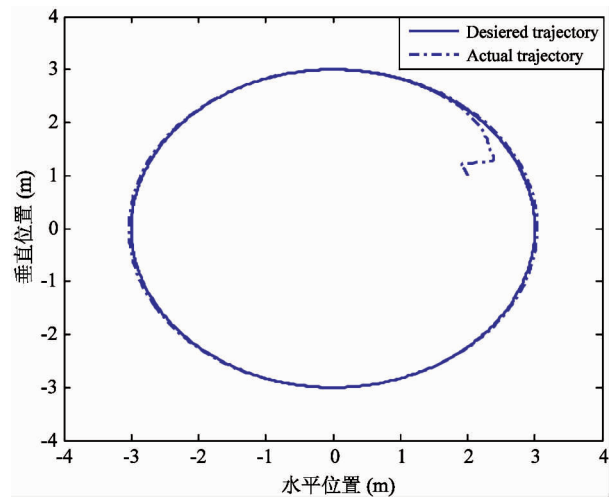


图 1 输出轨迹跟踪曲线

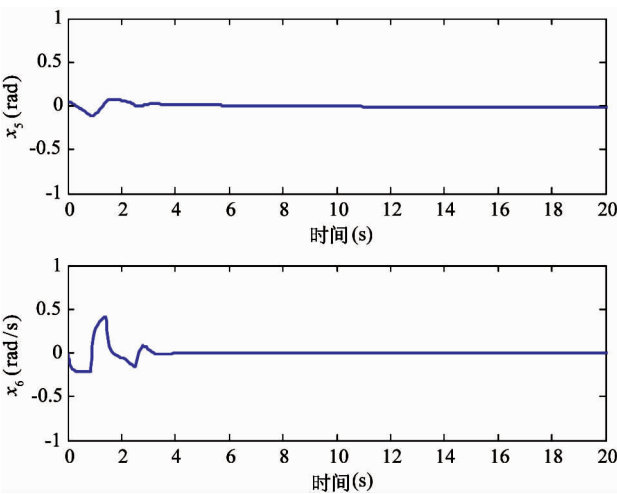


图 2 滚转角及滚转角速度

速、准确地跟踪上给定输出参考轨迹,同时保证滚转角在 4s 内收敛到零。图 3 表示位置跟踪曲线,可以看出位置能在 3s 内跟踪上给定参考位置,动态响应快。图 4 为 VTOL 飞行器控制输入曲线,可以看出控制器响应迅速、稳定收敛。上述结果表明,本文设计的控制器具有良好的动态性能和稳态性能,跟踪效果良好。

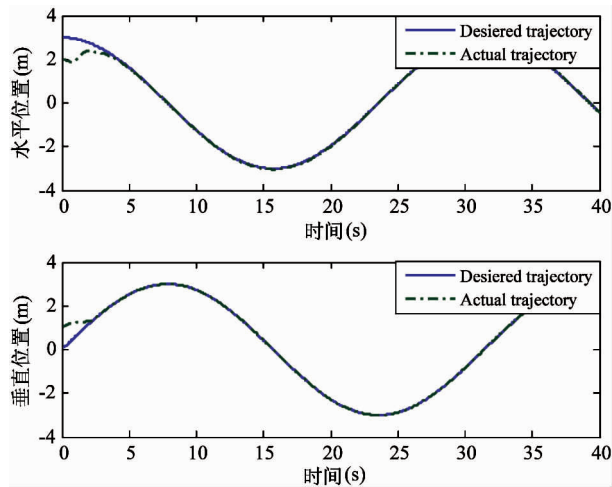


图 3 位置跟踪曲线

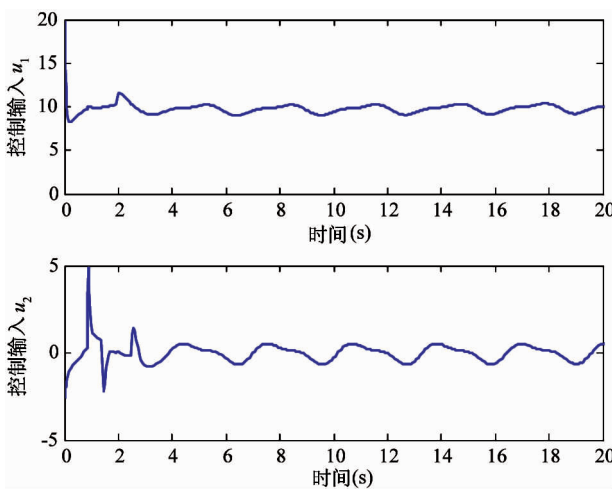


图 4 控制输入

4 结论

考虑 VTOL 飞行器的输出轨迹跟踪问题,本文提出一种基于有限时间控制的解决方案。首先,基于系统解耦方法将原系统解耦成两个子系统。然后,对解耦后系统,利用有限时间控制方法设计了有

限时间控制律。大多数有限时间控制器都存在一个问题:仅保证系统在原点附近时有限时间收敛,而远离原点时收敛速度缓慢;本文提出的有限时间控制器包含切换函数  $s(\cdot)$ ,能够保证系统在任何位置都快速收敛,克服了原有的问题。最后给出的仿真结果表明该控制器表现出良好的跟踪性能。

## 参考文献

- [ 1 ] Zhu B, Cai K Y. Approximate trajectory tracking of input-disturbed PVTOL aircraft with delayed attitude measurements[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20(14): 1610-1621
- [ 2 ] Al-Hiddabi S A, McClamroch N H. Output tracking for nonminimum phase VTOL aircraft[C]. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, USA, 1998. 4573-4578
- [ 3 ] Olfati-Saber R. Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1949-1952
- [ 4 ] Hauser J, Sastry S, Meyer G. Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems[J]. *Automatica*, 1992, 28(4): 665-679
- [ 5 ] Martin P, Devasia S, Parden B. A different look at output tracking: control a vtol aircraft[J]. *Automatica*, 1996, 32(1):101-10
- [ 6 ] Huang C S, Yuan K. Output tracking of a nonlinear non-minimum phase PVTOL aircraft based on nonlinear state feedback[J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(6): 466-473
- [ 7 ] Turker T, Gorgun H, Cansever G. Stabilization of uncoupled PVTOL aircraft based on a Lyapunov function[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2012, 34(5): 578-584
- [ 8 ] Wang X H, Liu J K, Cai K Y. Tracking control for a velocity-sensorless VTOL aircraft with delayed outputs[J]. *Automatica*, 2009, 45(12): 2876-2882
- [ 9 ] Do K D, Jiang Z P, Pan J. On global tracking control of a VTOL aircraft without velocity measurements[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2212-2217
- [ 10 ] Ailon A. A control for autonomous VTOL aircraft with restricted inputs. In: Proceedings of the 17th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, 2009. 1569-1574
- [ 11 ] Castillo P, Lozano R, Fantoni I, et al. Control design for the PVTOL aircraft with arbitrary bounded on the acceleration[C]. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002. 1717-1720
- [ 12 ] Zavala A, Fantoni I, Lozano R. Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(18): 1833-1844
- [ 13 ] 蒋元庆, 杨浩, 姜斌. 基于级联观测器的切换非最小相位垂直起降飞机鲁棒容错控制[C]. 见:第 33 届中国控制会议, 南京, 2014. 4061-4066
- [ 14 ] Frye M, Ding S, Qian C. Fast convergent observer design for output feedback stabilization of a planar vertical take-off and landing aircraft[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(4): 690-700

## Tracking control for a VTOL aircraft based on finite time control

Zou Liying<sup>\* \*\*</sup>, Wang Hongyan<sup>\*\*\*</sup>, Miao Fengjuan<sup>\*\*</sup>, Wang Yanchun<sup>\*\*</sup>

(<sup>\*</sup> College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

(<sup>\*\*</sup> College of Communications and Electronics, Qiqihar University, Qiqihar 161006)

(<sup>\*\*\*</sup> College of Mechatronics Engineering, Qiqihar University, Qiqihar 161006)

### Abstract

A robust tracking control strategy is presented to force a non-minimum phase vertical take-off and landing (VTOL) aircraft, which asymptotically tracks a given reference trajectory. Firstly, a system decomposition technique is used to decouple the VTOL system. By employing two global coordinate transformations, the tracking problem of the VTOL aircraft is converted to the stabilizing problem of the decoupled system. Then, based on the decoupled system, the finite time control method is proposed to stabilize the tracking error subsystem, which makes the overall closed-loop system finite time stable. Finally, numerical simulation results demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed control method.

**Key words:** vertical take-off and landing (VTOL) aircraft, output tracking, finite time control, underactuated