

# 涵道式无人机的悬停姿态控制与运动稳定性分析<sup>①</sup>

刘云平<sup>②\*</sup> 陈 城<sup>\*</sup> 吴洪涛<sup>\*\*</sup> 李先影<sup>\*</sup> 黄希杰<sup>\*</sup>

(\*南京信息工程大学信息与控制学院 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心 南京 210044)

(\*\*南京航空航天大学机电学院 南京 210015)

**摘要** 进行了涵道式无人机的运动稳定性分析,指出无人机在悬停状态下受近地空间、气流颠簸和荷兰滚的影响,导致系统极易出现抖动甚至失控,而优化飞行器的结构参数对于提高飞行器运动稳定性具有重要意义。基于这种分析,从机械结构设计出发,通过 Lyapunov 指数方法建立飞行器结构参数与系统运动稳定性之间的量化关系,以此指导系统的机械结构设计及控制系统优化,为提高系统执行飞行任务的可靠性和稳定性奠定理论基础。该方法与 Lyapunov 直接法相比最大的优点是其可构建性,从而为分析其他机器人等非线性系统的运动稳定性提供了一种简单有效的工具。

**关键词** Lyapunov 指数, 涵道式无人机, 运动稳定性, 悬停

## 0 引言

涵道式无人机具有可垂直起降、机动性强的特点,经常执行投弹攻击、大气探测、物品运载等飞行任务<sup>[1]</sup>。然而,涵道式无人机由于飞行任务主要位于气流相对复杂的近地空间,特别是在悬停过程中会受到气流颠簸和荷兰滚影响,极易出现抖动、失控等运动稳定性问题<sup>[2,3]</sup>,因而提高其悬停过程的稳定性和降低能耗变得尤为重要<sup>[4,5]</sup>。

运动稳定性理论主要是有关研究系统在受到干扰后的运动状态与原预定运动状态之间发散或收敛的运动特性理论,目前运动稳定性研究主要有两个学派:一个是 Routh-Hurwitz(1875, 1895)学派,提出通过判断系统的特征根是否在左半平面判定系统是否稳定;另一个是 Lyapunov(1892)学派,Lyapunov 发表的著名的博士论文运动稳定性一般问题,开创了运动稳定性研究的新纪元,是当前研究稳定性的主要方法。Lyapunov 直接法分析运动稳定性的关

键是构建 Lyapunov 函数,但是由于 Lyapunov 函数没有一般的构造方法,而且也不唯一,大大限制了其广泛应用。由于涵道式无人机是多变量、强耦合和欠驱动的非线性系统,动力学方程复杂难以求解,Lyapunov 函数难以构建<sup>[6]</sup>。而且,复杂非线性系统的运动稳定性是多自由度、强耦合的非线性系统,其动力学方程非常复杂,无法准确给出,因此成为当前的热点和难点。

由于 Lyapunov 指数可以定量描述系统受到扰动后的初值与原初值两条轨道随时间推移按指数方式发散或收敛的程度,在 Lyapunov 指数小于 0 的方向上,相体积收缩,运动是稳定的,反之不稳定。与 Lyapunov 直接法相比,通过 Lyapunov 指数方法分析系统的运动稳定性<sup>[7,8]</sup>的主要优点不仅在于 Lyapunov 指数的可构建性<sup>[9,10]</sup>,而且能够量化地分析系统的运动稳定性,因而适合涵道式无人飞行器等含噪声干扰的复杂非线性系统的运动稳定性分析<sup>[11]</sup>。Dingwell<sup>[12]</sup>等将其很好地应用在生物力学领域。加拿大的 Wu<sup>[13]</sup>教授通过 Lyapunov 指数方法研究了

<sup>①</sup> 国家自然科学基金(51405243, 51405241, 61304089)和江苏省自然科学基金(BK20130999)资助项目。

<sup>②</sup> 男,1979 年生,博士,副教授;研究方向:智能机器人,多体系统动力学,运动稳定性,气象仪器等;联系人,E-mail: uav\_nuist@sina.com  
(收稿日期:2016-05-30)

被动步行机器人的运动稳定性。

运动稳定性的提高主要是通过改变飞行器的结构参数或输入控制力矩影响其动力学特性,而输入力矩的大小与其动力学参数又是密切相关的。因此,本研究利用 Lyapunov 指数方法建立动力学参数与系统运动稳定性之间的量化关系,为飞行器的机械结构设计及控制系统优化奠定理论基础。

## 1 涵道式无人机的动力学模型

图 1 显示涵道式无人机的结构简图,选取广义坐标为  $\mathbf{q} = [\phi \theta \psi x y z]$ ,其中  $\phi, \theta, \psi$  为 3-2-1 欧拉角作为三个方向上的姿态角,  $x, y, z$  为线位移。定义伪速度为  $\mathbf{P} = [p q r u v w]$ ,  $p, q, r$  是角速度,  $u, v, w$  是线速度。

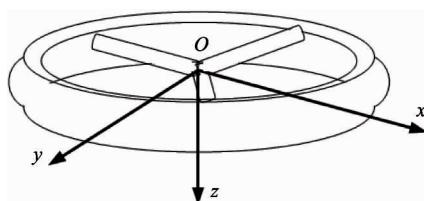


图 1 涵道式无人机结构简图

首先建立涵道式无人机的动力学模型。本文采用基于欧拉-庞卡莱方程建立系统的运动学及动力学方程如下:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}(\mathbf{q})\mathbf{p} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{C}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{P}$  是伪速度矢量,  $\mathbf{q}$  是广义坐标矢量,  $\mathbf{V}(\mathbf{q})$  是运动学矩阵,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  是惯性矩阵,  $\mathbf{C}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  是哥式力,  $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u})$  是空气动力以及所有外力。

欧拉-庞卡莱形式的动力学方程关键是建立系统的动能函数:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (1/2)\mathbf{p}^T \mathbf{M}(\mathbf{k}) \mathbf{p} \quad (3)$$

其中相对质心的广义质量为

$$\mathbf{M}_{cm}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{cm} & 0 \\ 0 & m\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

考虑第  $k$  个刚体连杆,设  $\mathbf{I}_{cm}(k)$  表示其关于质心在坐标系  $F^k$  下的惯性张量,  $m(k)$  表示质量,  $\mathbf{a}(k)$  表示从质心到任意点 O 的位置矢量关于质心的空

间惯量,质量中心关于空间的惯性是  $\mathbf{M}_{cm}$ ,关于 O 的空间惯性是

$$\mathbf{M}_o = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{a}) \mathbf{M}_{cm}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_o & m\bar{\mathbf{a}} \\ -m\bar{\mathbf{a}} & m\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{I}_o$  是对于 O 的惯性张量,  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a})$  是移位算子,  $\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{a})$  是移位算子的转置矩阵,  $\bar{\mathbf{a}}$  是一个斜对称矩阵,  $m$  是质量,  $I$  是转动惯量。可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= -[\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{V}(\mathbf{q})] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{V}(\mathbf{q})]^T + [\sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j \mathbf{X}_j^T] \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{V}^T(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^T}, \mathbf{Q}_p = \mathbf{V}^T(\mathbf{q}) \mathbf{Q} \quad (6)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{q})$  是势能函数,  $\mathbf{Q}_p$  为  $p$  坐标系下的广义力, 主要有重力, 螺旋桨的升力, 控制舵面力, 机身力。

### A. 重力

由于横滚角  $\phi$ 、俯仰角  $\theta$  不为 0, 重力可以被分为沿三个方向上的力和力矩:

$$\mathbf{F}_{Gx} = -mg \sin \theta \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_{Gy} = -mg \cos \theta \cos \phi \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_{Gz} = mg \cos \theta \sin \phi \quad (8)$$

### B. 螺旋桨升力

涵道式无人机升力的主要来源是由螺旋桨产生的,这种类型的飞行器在悬停和小范围里飞行和传统直升机一样,前飞时像固定翼飞机一样。

$$\mathbf{F}_{Ax} = \mathbf{F}_{Ay} = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_{Az} = -T \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{ax} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{ay} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{az} = -\mathbf{M}_e \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{4} N_b (v_b - v_i) \omega_r r^2 \rho \infty a_0 b c_r, \quad (10)$$

$$v_b = v_i + \frac{2}{3} \omega_r r \left( \frac{3}{4} K_{twist} \right),$$

$$M_e = N_b \int_0^r \frac{1}{2} \rho \infty \omega_r r^3 C_D dr$$

其中  $v_i$  是螺旋桨的诱导速度,  $a_0$  是螺旋桨的升力曲

线,  $b$  是螺旋桨叶片的数量,  $\rho \infty$  是空气密度,  $N_b$  是螺旋桨数量,  $r$  是螺旋桨的半径,  $\omega_r$  是转速,  $k_{twist}$  是叶片之间的扭矩,  $c_r$  是电机叶片的弦长,  $C_D$  是飞行器的阻力系数。

### C. 控制舵面

$$\mathbf{F}_{ex} = 2 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_1) \sin \delta_1$$

$$\mathbf{F}_{ey} = 2 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_2) \sin \delta_2$$

$$\mathbf{F}_{ez} = 2 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_1) \sin \delta_1 \quad (11)$$

$$+ 2 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_2) \sin \delta_2$$

$$+ 4 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_3) \sin \delta_3$$

$$\mathbf{M}_{ex} = 2 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_1) l_1$$

$$\mathbf{M}_{ey} = 2 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_2) l_2 \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_{ez} = 4 \frac{1}{2} \rho \infty v_i^2 S_t C_l(\delta_3) l_3$$

其中  $\delta$  表示控制舵面的偏向角,  $S_t$  表示控制舵特征面积,  $l_1$ 、 $l_2$  和  $l_3$  是控制舵面的力臂,  $C_l$  是升力系数

与舵偏角的比值,  $C_l = \frac{c_{lr}}{\delta}$ 。

### D. 机身力

$$\mathbf{F}_{fx} = - \frac{1}{2} \rho \infty C_x u^2 S_x$$

$$\mathbf{F}_{fy} = \frac{1}{2} \rho \infty C_y v^2 S_y \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{fz} = \frac{1}{2} \rho \infty C_z w^2 S_z$$

$C_x$ 、 $C_y$ 、 $C_z$  分别是 3 个方向上的升力曲线系数,  $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$  是飞行器  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的特征面积。

通过式(1)和(2)获得的涵道式无人机的动力学模型的主要代表项如下:

$$\mathbf{p} = (p, q, r, u, v, w)^T, \mathbf{q} = (\phi, \theta, \psi, x, y, z)^T \quad (14)$$

$$V(\mathbf{q}) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_\theta T_\theta & C_\phi & S_\phi C_\theta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ C_\phi T_\theta & -S_\varphi & C_\varphi C_\theta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_\theta C_\psi & C_\theta S_\psi & -S_\theta \\ 0 & 0 & 0 & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi S_\psi & S_\phi C_\theta \\ 0 & 0 & 0 & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L} \\ -\mathbf{M} \\ -\mathbf{NN} \\ -\mathbf{f1} + gmS_\theta \\ -\mathbf{f2} - gmC_\theta S_\varphi \\ -\mathbf{f3} - gmC_\theta S_\varphi \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{p}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I}_y r & \mathbf{I}_z q & 0 & -mw & mv \\ \mathbf{I}_x r & 0 & -\mathbf{I}_z p & mw & 0 & -mu \\ -\mathbf{I}_x q & \mathbf{I}_y p & 0 & -mv & mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -mr & mq \\ 0 & 0 & 0 & mr & 0 & -mp \\ 0 & 0 & 0 & -mq & mp & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中:  $\mathbf{I}_x$ 、 $\mathbf{I}_y$ 、 $\mathbf{I}_z$  分别为系统  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的转动惯量,  $m$  为系统质量,  $g$  为重力加速度, 见参数表 1 所示。 $\phi$  为系统绕  $x$  轴方向的滚转角 (rad),  $\theta$  为系统绕  $y$  轴方向的俯仰角 (rad),  $\psi$  为系统绕  $z$  轴方向的偏航角 (rad),  $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的角速度和线速度,  $S_\phi = \sin \phi$ ,  $C_\phi = \cos \phi$ ,  $S_\theta = \sin \theta$ ,  $C_\theta = \cos \theta$ ,  $C_\theta^{-1} = \sec \theta$ ,  $T_\theta = \tan \theta$ ,  $S_\psi = \sin \psi$ ,  $C_\psi = \cos \psi$ ,  $\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{NN}$ 、 $\mathbf{f1}$ 、 $\mathbf{f2}$ 、 $\mathbf{f3}$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向上的总的力矩和力, 并且每个关节输入力和力矩采用了 PD 控制算法, 如下:

$$T_i = k_{pi}(\theta_{di} - \theta_i) + k_{vi}(\dot{\theta}_{di} - \dot{\theta}_i), i = 1, 2, \dots \quad (19)$$

其中  $\theta_{di}$  是期望位置或运动轨迹,  $k_{pi}$  和  $k_{vi}$  是比例微分系数, 这些系数和悬停姿态的关系将在仿真分析中给出。

表 1 系统总体主要结构参数表

参数	参数值
$m$	0.155 kg
$g$	9.8 m/s <sup>2</sup>
$I_x, I_y, I_z$	2.374 kg · m <sup>2</sup> , 2.374 kg · m <sup>2</sup> , 0.8437 kg · m <sup>2</sup>
$a_o$	5.9
$b$	5
$N_b$	1
$r$	0.4 m
$\omega_r$	500 rpm
$v_i$	20 m/s
$C_x, C_y, C_z$	0.5, 0.5, 0.1
$l_1, l_2, l_3$	0.26, 0.26, 0.55 m
$k_{west}$	0.2618
$C_r$	0.025 m
$A$	0.5024 m <sup>2</sup>
$C_l$	0.12
$C_D$	0.5

由式(1)和(2)得:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} p + rC_\phi T_\theta + qS_\phi T_\psi \\ qC_\phi - rS_\phi \\ rC_\phi C_\theta^{-1} + qS_\phi C_\theta^{-1} \\ uC_\theta C_\psi + v(C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi) + w(C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi) \\ uC_\theta S_\psi + v(C_\phi C_\psi + S_\theta S_\phi S_\psi) + w(-C_\psi S_\phi + C_\phi S_\theta S_\psi) \\ wC_\theta C_\phi - uS_\theta + vC_\theta S_\phi \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} (\mathbf{L} - qr(\mathbf{I}_z - \mathbf{I}_y)) / \mathbf{I}_x \\ (\mathbf{M} - rp(\mathbf{I}_x - \mathbf{I}_z)) / \mathbf{I}_y \\ (NN - pq(\mathbf{I}_y - \mathbf{I}_x)) / \mathbf{I}_z \\ -(qw - rv) + \frac{1}{m}\mathbf{f}_x \\ -(ru - pw) + \frac{1}{m}\mathbf{f}_y \\ -(pv - qu) + \frac{1}{m}\mathbf{f}_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

将式(20)和(21)转化为系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (22)$$

式中,  $\mathbf{X} = [\mathbf{q} \ \mathbf{p}]^T = (\phi, \theta, \psi, x, y, z, p, q, r, u, v, w)^T$

## 2 基于 Lyapunov 指数的运动稳定性分析过程

Lyapunov 指数是描述系统受到扰动后的初值与原初值两条轨道随时间收敛或发散的平均指数率。当 Lyapunov 指数小于 0 时, 系统的相轨道吸引到一个稳定的固定点上, 整个系统是稳定的。负的 Lyapunov 指数是耗散系统或者非保守系统(如阻尼谐波振子)的基本特征, 而且这个负值越大相轨道收敛越快, 系统到达稳定状态的速度也越快, 当这个负值趋向于无穷大时系统是超稳定的。如果系统是稳定的, 其 Lyapunov 指数中至少有一个小于 0, 并且所有指数之和同时小于 0。当 Lyapunov 指数大于 0 时, 系统是不稳定的或混沌的。Lyapunov 指数为 0 时, 相轨迹是周期性运动<sup>[14,15]</sup>。

Lyapunov 指数可以通过动力学方程或状态量的时间序列两种方式获得, 本文采用基于动力学方程的计算方法(计算过程如图 2 所示), 其计算公式为

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}}| \quad (23)$$

其中, Lyapunov 指数的大小由函数  $\mathbf{f}(\mathbf{X})$  在  $\mathbf{X}_i$  处的雅可比矩阵  $|d\mathbf{f}/d\mathbf{X}|$  决定, 状态方程  $d\mathbf{X}(t)/dt = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t))$  是通过非线性系统的动力学方程获得的。

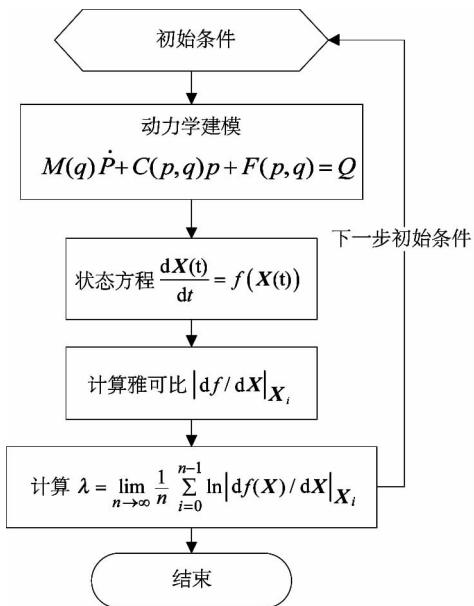


图2 Lyapunov 指数计算流程

### 3 计算 Lyapunov 指数

在建立的动力学模型基础上,将方程(22)代入式(23)中就可以计算出整个系统的 Lyapunov 指数谱。

为了计算 Lyapunov 指数谱<sup>[16,17]</sup>,在一些初始条件下,一个基准轴通过非线性运动方程被定义。在球的表面上,点的轨迹被定义为极小地分离基准轴线性运动方程。基准轴的建立通过非线性运动方程在一些暂时点的初始条件积分。与此同时,对于一个  $n$  维系统线性方程被积分为  $n$  个不同的初始向量,这些初始向量被定义在  $n$  个正交单位向量的不同方向上。这就有下面一组非线性系统和线性方程:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(\mathbf{X}) \\ \mathbf{F}(t)\boldsymbol{\psi}_t \end{Bmatrix} \quad (24)$$

其中: $\mathbf{X}=(\phi, \theta, \psi, x, y, z, p, q, r, u, v, w)$ ,  $\boldsymbol{\psi}_t$  是线性化系统  $\delta\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_t \delta\mathbf{x}_0$  状态转换矩阵, 变分方程  $\dot{\boldsymbol{\psi}}_t = \mathbf{F}(t)\boldsymbol{\psi}_t$  是时变线性微分方程的矩阵值, 它是由沿着轨迹  $\mathbf{X}(t)$  向量场线性化推算得到的。 $\mathbf{F}(t)$  雅可比矩阵被定义为:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)} \quad (25)$$

$\mathbf{X}^T$  是  $\mathbf{X}$  的数组转置矩阵, 数值积分的初始条件是

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}(t_0) \\ \boldsymbol{\psi}_t(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

其中: $\mathbf{I}$  是单位矩阵。

为了计算这个步骤,让线性运动方程作用在正交单位向量的初始方向上来得到一组  $\{\delta\mathbf{x}_1, \delta\mathbf{x}_2, \delta\mathbf{x}_3, \dots, \delta\mathbf{x}_n\}$  向量。为了避免所有向量沿着最大膨胀方向的不重合,我们反复使用标准正交化(GSR)。GSR 给出下面一组正交单位向量  $\{\mathbf{v}_1^{'}, \mathbf{v}_2^{'}, \dots, \mathbf{v}_n^{'}\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^{'} &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ \mathbf{v}_2^{'} &= \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1^{'} \rangle \mathbf{v}_1^{'}}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1^{'} \rangle \mathbf{v}_1^{'}\|} \\ &\dots \\ \mathbf{v}_n^{'} &= \frac{\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}^{'} \rangle \mathbf{v}_{n-1}^{'} - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1^{'} \rangle \mathbf{v}_1^{'}}{\|\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}^{'} \rangle \mathbf{v}_{n-1}^{'} - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1^{'} \rangle \mathbf{v}_1^{'}\|} \end{aligned} \quad (27)$$

其中: $\delta\mathbf{x}_i^{(k)} = \mathbf{v}_i^k$ , 向量  $\mathbf{v}_i^{(k)}$  是  $\mathbf{v}_i^k$  标准化得到的,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示是内积。反复标准正交化的次数并不是关键,只要它的大小和方向都不要超过计算的极限即可。

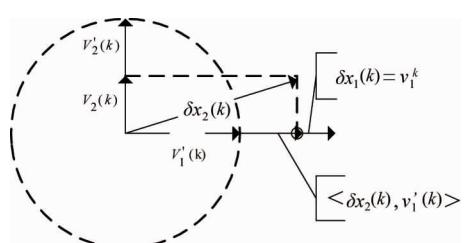
图3 显示两个向量  $\delta\mathbf{x}_1^{(k)}$  和  $\delta\mathbf{x}_2^{(k)}$  ( $k$  是总的积分步数) 反复标准正交化的几何解释,它们先正交化为  $\mathbf{v}_1^{(k)}$  和  $\mathbf{v}_2^{(k)}$ , 再标准化为  $\mathbf{v}_1^{'(k)}$  和  $\mathbf{v}_2^{'(k)}$ 。向量  $\mathbf{v}_1^{(k)} = \delta\mathbf{x}_1^{(k)}$ , 向量  $\mathbf{v}_1^{'(k)}$  是  $\mathbf{v}_1^{(k)}$  的标准化。 $\langle \delta\mathbf{x}_2^{(k)}, \mathbf{v}_1^{(k)} \rangle$  是  $\delta\mathbf{x}_2^{(k)}$  作用在  $\mathbf{v}_1^{(k)}$  上的长方形长度。 $\mathbf{v}_2^{(k)}$  的标准化产生正交向量  $\mathbf{v}_2^{'(k)}$ 。椭球面的间距是  $\{\delta\mathbf{x}_1^{(k)}, \delta\mathbf{x}_2^{(k)}\}$

$$\{\delta\mathbf{x}_1^k, \delta\mathbf{x}_2^k\} = \|\mathbf{v}_1^k\| \cdot \|\mathbf{v}_2^k\| \quad (28)$$

然后 Lyapunov 指数可以被计算如下:

$$\lambda_i \approx \frac{1}{kh} \sum_{k=1}^k \log_2 \|\mathbf{v}_i^k\| \quad (29)$$

其中: $k$  是迭代的次数,  $h$  是时间步长。

图3 向量  $\delta\mathbf{x}_1^{(k)}$  和  $\delta\mathbf{x}_2^{(k)}$  的标准正交化

## 4 悬停过程的控制设计及稳定性分析

在仿真分析时,首先利用 Mathematica 软件对涵道式无人机进行动力学建模。得到非线性模型后,在 Mathematica 软件中仿真出悬停姿态下 Lyapunov 指数谱和相空间,得到系统机械结构参数与稳定性之间的量化关系。计算 Lyapunov 指数谱时,迭代次数采用  $k = 100$ ,步长  $h = 0.002$ 。

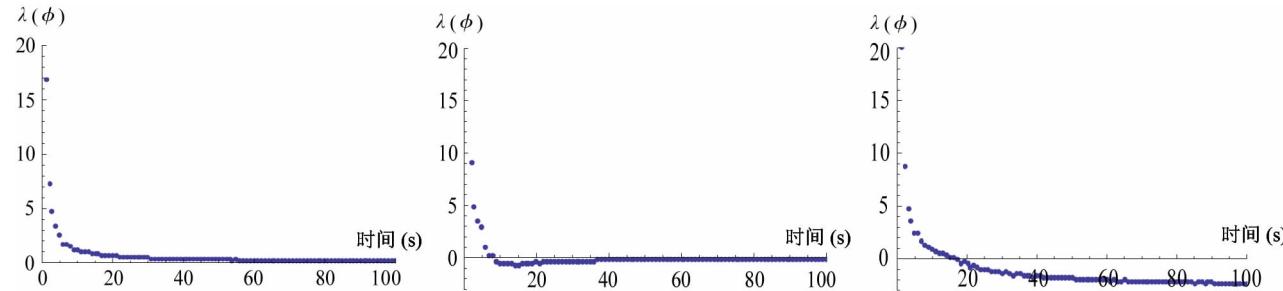


图 4 悬停阶段姿态 Lyapunov 指数谱

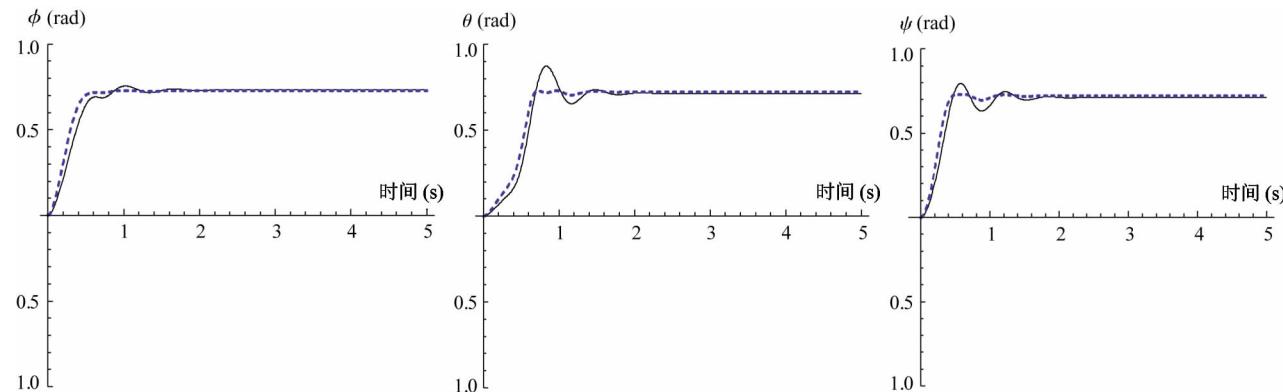


图 5 悬停阶段三个姿态角曲线

同时给 PD 控制算法的比例微分系数为  $k_{p4} = 1$ ,  $k_{p4} = 300$ ,  $k_{p5} = 2$ ,  $k_{p5} = 350$ ,  $k_{p6} = 2$ ,  $k_{p6} = 250$ ;期望轨迹  $\theta_{d4} = x = 1.7 \sin(2x)$ ,  $\theta_{d5} = y = 1.7 \sin(2y)$ ,  $\theta_{d6} = z$

当设定 PD 控制算法的比例微分系数  $k_{p1} = 170$ ,  $k_{v1} = 40$ ,  $k_{p2} = 90$ ,  $k_{v2} = 10$ ,  $k_{p3} = 110$ ,  $k_{v3} = 10$ ; 期望轨迹  $\theta_{d1} = \phi = 0.7 \sin(2\phi)$ ,  $\theta_{d2} = \theta = 0.7 \sin(2\theta)$ ,  $\theta_{d3} = \psi = 0.7 \sin(2\psi)$ ; 系统的 Lyapunov 指数有两负一正(总的相加是负的)如图 4 所示,即验证了 Lyapunov 指数可以用来描述系统在悬停状态下的稳定性,并且三个姿态角大约在 3s 后一直是维持在稳定的状态,如图 5 所示(图中虚线为期望运动,实线为实际运动)。

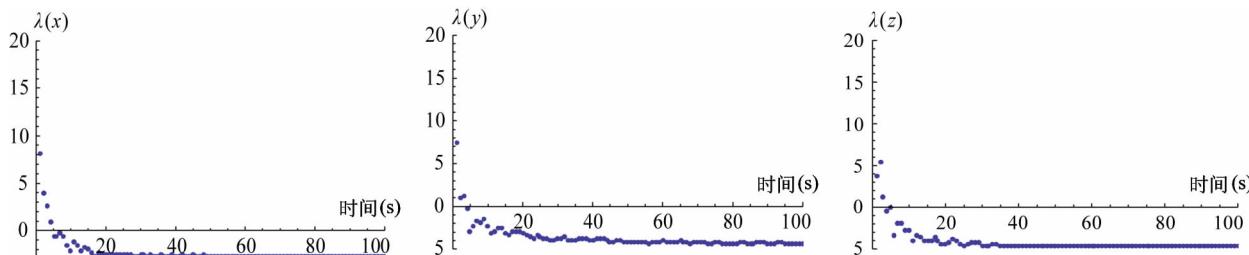


图 6 悬停阶段姿态 Lyapunov 指数谱

$= 1.7 \sin(2z)$ , 此时 Lyapunov 指数都是负的(如图 6 所示),系统的运动是稳定的。三个方向上的位移在设定的期望轨迹周围振动如图 7 所示。

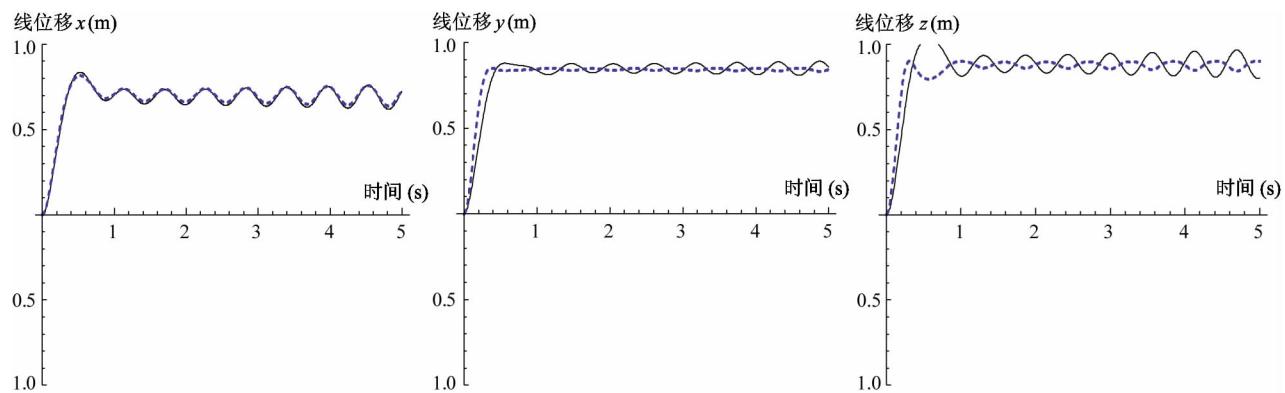


图 7 为悬停阶段线位移曲线

由图 8 可知:当改变初始条件为  $\phi = 0.001, \theta = 0.001, \psi = 0.001, x = 0.001, y = 0.001, z = 0.001$  时, 改变前后的悬停状态下 3 个相空间的吸引子都还稳定在同一个固定点上, 即整个系统是稳定的。既验证了上面的仿真分析也说明了采用 Lyapunov 指数法分析系统运动稳定性的可行性。

由图 9 所示可知: 在水平方向上是线位移和在竖直方向上是线速度的状态空间模型是 4 维尺寸, 它的吸引子不可以显示的, 值得注意的是它的交叉点是由于从 4 维空间降到 2 维空间形成的。系统仍

然可以吸引到一个固定点上。

## 5 结 论

对于一个复杂的非线性系统, 稳定性分析是非常重要的。Lyapunov 直接法分析运动稳定性的关键是构建 Lyapunov 函数, 但是由于 Lyapunov 函数没有一般的构造方法, 大大限制了该方法的广泛应用。Lyapunov 指数可以描述受干扰后的状态空间轨道发散或收敛的平均指教率, 因而可以用来描述多体

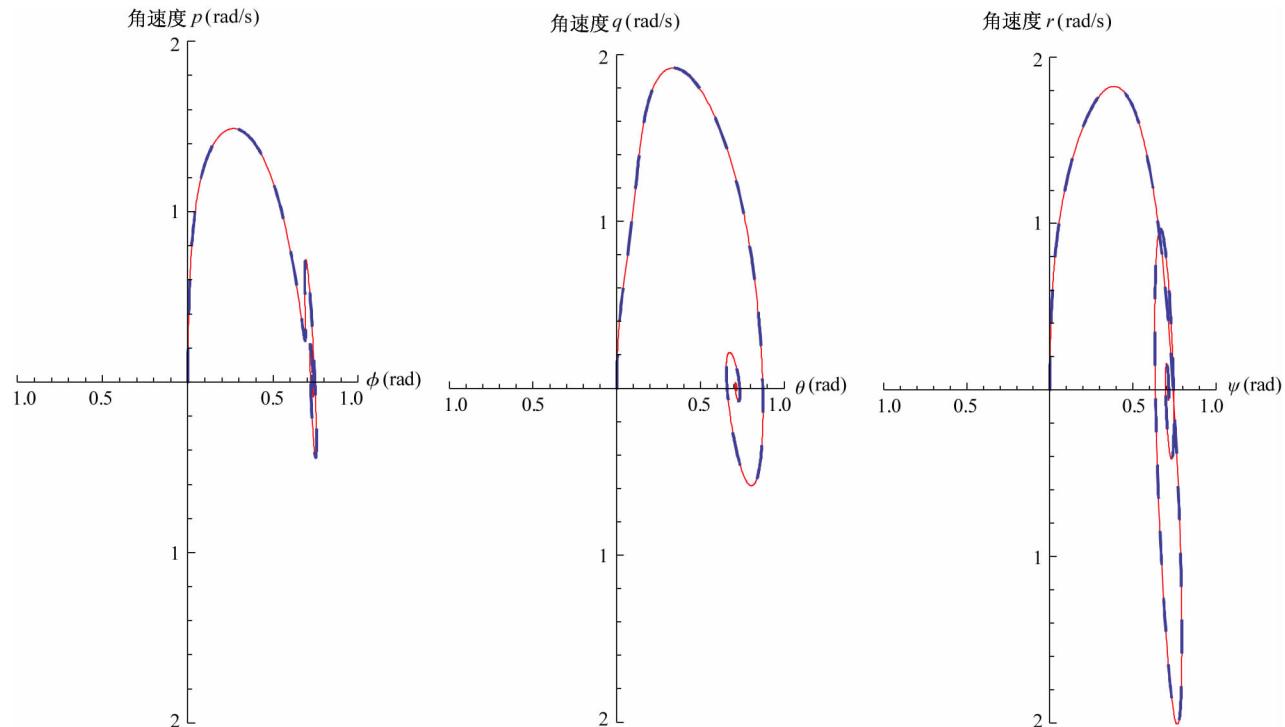


图 8 状态空间的吸引子

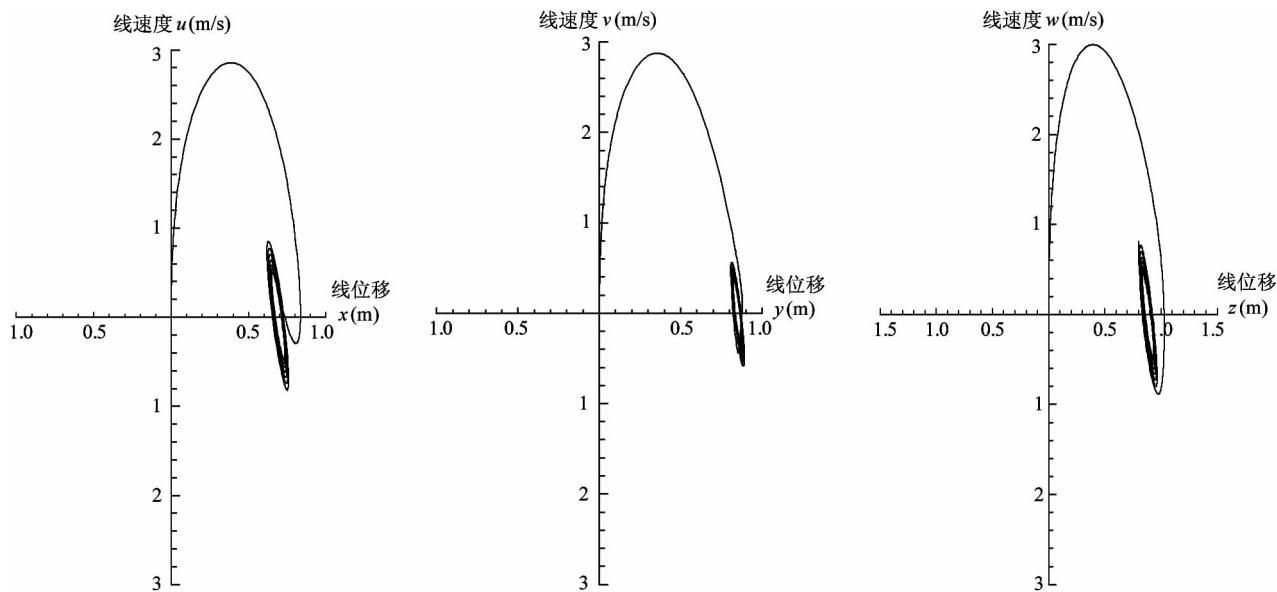


图 9 相空间

系统的运动稳定性。由于时间序列的可观测因素很多,而且相互耦合,同时,因测量精度的实际受限、计算的复杂性,严重制约着人们对时间序列内在机制的理解。因此可通过数值模型计算 Lyapunov 指数。在 Lyapunov 指数小于 0 的方向上相体积收缩,运动是稳定的,反之不稳定,Lyapunov 指数为零则暗示了轨迹是周期性运动。

#### 参考文献

- [ 1 ] Wang S H. Numerical analysis of aerodynamic characteristics for the design of a small ducted fan aircraft. *Journal of software*, 2010, 5(7) :753-760
- [ 2 ] Amiri N, Ramirez-Serrano A, Davies R J. Integral back stepping control of an unconventional dual-fan unmanned aerial vehicle. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2013, 69(4) : 147-159
- [ 3 ] 李远伟, 奚伯齐, 伊国兴等. 小型涵道式无人机的研究进展. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(5) : 700-704
- [ 4 ] Rispoli F, Sheard A G. Computational analysis of noise reduction devices in axial fans with stabilized finite element formulations. *Computational Mechanics*, 2012, 50(6) : 695-705
- [ 5 ] Kumon M, Katupitiya J, Mizumoto I. Robust attitude control of vectored thrust aerial vehicles. *18th IFAC world congress, Milano*, 2011, 28(8) : 2607-2613
- [ 6 ] Yang C X, Christine Wu Q. A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noisy time series. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 64: 279-292
- [ 7 ] Akturk Ali, Cengiz Camci. Experimental and computational assessment of a ducted-fan rotor flow model. *Journal of Aircraft*, 2012, 49(3) : 885-897
- [ 8 ] Yang C X, Christine Wu Q, Zhang P. Estimation of Lyapunov exponents from a time series for n-dimensional state space using nonlinear mapping. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 64(69) :1493-1507
- [ 9 ] Yang C X, Wu Q. On stability analysis via Lyapunov exponents calculated from a time series using nonlinear mapping—a case study . *Nonlinear Dynamics*, 2009, 59(1) : 239-257
- [ 10 ] Kantz H, Radons G, Yang H L. The problem of spurious Lyapunov exponents in time series analysis and its solution by covariant Lyapunov vectors. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2013, 46 (25) : 1-24
- [ 11 ] Zhang W C, Tan S C, Gao P Z. Chaotic forecasting of natural circulation flow instabilities under rolling motion based on Lyapunov exponents. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(6) : 060502
- [ 12 ] Claudine J L, van Deudekom F J, van Campen J P. Gait stability and variability measures show effects of impaired cognition and dual tasking in frail people. *Journal of Neuro Engineering and Rehabilitation*, 2011, 8(2) :1-9
- [ 13 ] Sun Y, Wang X, Wu Q, et al. On stability analysis via

- Lyapunov exponents calculated based on radial basis function networks. *Internal Journal of Control*, 2011, 84(8) : 1326-1341
- [14] 刘云平,李先影,王田苗等. 提高四旋翼无人机起飞/着陆的运动稳定性的研究. 高技术通讯, 2015, 25 (10-11) : 927-934
- [15] Sadri S, Christine Wu Q. Modified Lyapunov exponent, new measure of dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78 :
- 2731-2750
- [16] Sekhavat P, Sepehri N, Wu Q. Calculation of Lyapunov exponents using nonstandard finite difference iscretization scheme: a case study. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2004, 10(4) : 369-378
- [17] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physics D16*, 1985 : 285-317

## Hovering attitude control and stability analysis of a ducted-fan unmanned aerial vehicle ( UAV )

Liu Yunping<sup>\*</sup> , Chen Cheng<sup>\*</sup> , Wu Hongtao<sup>\*\*</sup> , Li Xianying<sup>\*</sup> , Huang Xijie<sup>\*</sup>

( \* College of Information and Control, Nanjing University of Information Science and Technology, Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment in Jiangsu Province, Nanjing 210044 )

( \*\* College of Mechanical Engineering and Automation, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics Robot Research Institute, Nanjing 210015 )

### Abstract

The motion stability of any ducted-fan unmanned aerial vehicle ( UAV ) was analyzed, and the analysis showed that when in a hover state, the ducted-fan UAV is easy to vibrate even it is out of control because of the influences of near-earth space, turbulence, and the Dutch role, while the optimization of the UAV's structure parameters is of great significance for improving the motion stability of the vehicle. Based on the analysis, the quantification relationship between the UAV's structural parameters and its motion stability was built from the viewpoint of structural design by using the Lyapunov exponent method, with the purposes of guiding the vehicle's structural design and control optimization, as well as providing the theoretic basis for promoting the system's dynamic stability. The simulation experimental results indicate that compared with the direct Lyapunov method, the proposed method's most important advantage is its constructivity, so it is a simple, effective tool for analysis of the motion stability of other non-linear systems such as robots.

**Key words:** Lyapunov exponent, ducted-fan unmanned aerial vehicle, stability analysis, hovering