

# 多状态可修复 $k/n$ 系统的随时间响应可靠性研究<sup>①</sup>

方永锋<sup>②\*</sup> 陈建军<sup>\*\*</sup>

( \* 贵州工程应用技术学院机械工程学院 毕节 551700 )

( \*\* 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071 )

**摘 要** 利用离散时间的马尔科夫链和半马尔科夫链对复杂的多状态可修复  $k/n$  系统元件的多样性进行了分析,给出了元件状态变化以及在状态逗留时间的概率分布计算公式,然后给出了元件在状态变化、状态寿命变化的一步概率转移矩阵,最后根据对元件的分析,导出了系统的可靠度与可用度的预测模型。算例表明,得出的模型易行、有效。

**关键词** 多状态,  $k/n$  系统, 可修复, 马尔科夫, 可靠性

## 0 引 言

$k/n$  系统是指由几个部件构成,所有  $n$  个部件都工作,且至少有  $k$  ( $k \leq n$ ) 个部件正常工作才能确保系统正常运行的系统。在实际工程应用中,大多数系统是由不同的元件组成,而且元件在不同的时间表现的状态也不同,因而这些系统在不同时间段表现的状态也是不同的,从而呈现出多状态。到目前为止,对多状态可修复  $k/n$  表决系统 (multi-state repairable  $k/n$  voting system, MRK/NS) 的研究已取得一定进展。文献[1-3]探讨了 MRK/NS 的一些特点,从而表明研究 MRK/NS 的可靠性研究是可行的。文献[4,5]研究了多状态并联系统的可靠性,研究表明多状态并联系统的可靠性取决于其并联的元件的可靠性状态。但这些研究并未真正涉及到 MRK/NS 的可靠性。另外,因为 MRK/NS 本身具很复杂,所以研究起来具有一定的困难。自 1960 年代以来,对马尔科夫链 (Markov chain, MC) 和半马尔科夫链 (semi-Markov chain, SMC) 的研究内容日渐丰富,理论也比较完善,使得它们的应用在工程领域逐

渐展开。文献[6-8]用 MC 和 SMC 对一般系统的状态变化进行了研究,收到了很好的效果。实际上,系统在它的生命历程中,承受的是不同的冲击与作用,大多数情况下,冲击与作用是随时间离散的,因而系统会在某一状态逗留,逗留时间也是离散的。另外,用离散的状态去逼近连续的状态也是人们常用的一种有效方法。文献[9,10]研究了离散时间半马尔科夫链 (SMC),证明离散时间 SMC 在工程实践中应用空间很大。文献[11,12]表明离散时间 SMC 可以用于系统的可靠性研究,用其预测短时间的系统可靠性是精确的。本文在这些文献的基础上,通过利用离散时间 MC 和离散时间 SMC 研究多状态可修复  $k/n$  表决系统 (MRK/NS) 元件的状态,给出了 MRK/NS 的可靠度和可用度的预测模型。最后,用一个工程算例说明了该模型的可行性、实用性与易行性。

## 1 MRK/NS 的元件分析

MRK/NS 有  $n$  个相互独立元件,这些元件可以相同,也可以完全不相同或者部分不相同,元件记为

① 国家自然科学基金(51175398),贵州省自然科学基金(黔科合 J 字[2014]2001),贵州省省级实验示范教学中心项目,贵州省普通高等学校新能源汽车产学研基地(黔教科 KY[2014]238),贵州省普通高等学校新能源汽车工程研究中心(黔教科 KY[2014]226),贵州省普通高等学校煤化工过程装备与控制创新人才团队(黔科合人才团队[2015]73)和贵州工程应用技术学院高层次人才(院科合字 G2013007 号,院科合字 G2015003 号)资助项目。  
② 男,1975 年生,博士,副教授;研究方向:系统与结构可靠性的研究与设计;联系人,E-mail: fangyf\_9707@126.com  
(收稿日期:2015-11-07)

$x_l, l = 1, 2, \dots, n$ , MRK/NS 的状态是由构成它的元件的状态决定的。MRK/NS 的状态空间记为  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$ , 工作状态空间记为  $\Omega_w = \{0, 1, 2, \dots, n-k\}$ , 失效状态空间记为  $\Omega_f = \{n-k+1, \dots, n\}$ 。若 MRK/NS 完全失效, 则它的状态记为 0, 如果 MRK/NS 功能完好, 则它的状态定义为  $n$ , 其它状态均为 MRK/NS 的中间过渡状态。MRK/NS 的所有元件在其某一个状态的逗留时间是服从一定的概率分布的。每个元件的状态是相互独立的, 而且, 失效元件的修理与其它元件也是互不相关的。MRK/NS 的第  $l$  个元件的状态空间记为  $\Omega_l = \{0, 1, 2, \dots, u_l-1, u_l\}, 1 \leq l \leq n$ , 该元件完全失效记为 0, 该元件的完好状态记为  $u_l$ , 其他为过渡状态。该元件在时刻  $t$  所处的状态用  $x_l(t)$  表示, 显然随机过程  $\{x_l(t), t \in N\}$  以  $\Omega_l$  为状态空间的半马尔科夫过程<sup>[11]</sup>。系统的第  $l$  个元件第  $t$  次跃阶时刻记做  $c_l^t$ , 则  $\{c_l^t, t \in N\}$  是以  $N$  为状态空间的马尔科夫随机过程, 这里有  $c_l^0 = 0, 0 < c_l^1 < \dots < c_l^t < \dots < c_l^N$ 。第  $l$  个元件在第  $t$  次时的跃阶时刻的状态记为  $s_l^t$ , 则  $\{s_l^t, t \in N\}$  是以  $N$  为状态空间的嵌入式马尔科夫随机过程<sup>[12]</sup>。系统的第  $l$  个元件在状态  $s_l^{t-1}$  进行第  $t$  次的跃阶之前的逗留时间记为  $S_l^t$ , 那么  $S_l^t = c_l^t - c_l^{t-1}, S_l^0 = 0$ , 则  $\{S_l^t, t \in N\}$  是以  $N$  为状态空间的马尔科夫随机过程。随机链  $\{(s_l^t, i_l^t), t \in N\}$  是由跃阶状态和跃阶时刻组成的以  $N$  为状态空间的时间离散的马氏链更新链。设与之相联系的半马尔科夫核如下:

$$\{q_l^{i,j}(\tau), \tau \in N\} \quad (1)$$

这里  $q_l^{i,j}(\tau) = P(s_l^{t+1} = j, c_l^{t+1} - c_l^t = \tau | s_l^t = i) = P(S_l^{t+1} = j, S_l^{t+1} = \tau | s_l^t = i), i, j \in \Omega_l, \tau \in N^+, q_l^{i,j}(0) = 0$ 。

式(1)可以被简化为

$$q_l^{i,j}(\tau) = p_l^{i,j} f_l^{i,j}(\tau) \quad (i, j \in \Omega_l, \tau \in N) \quad (2)$$

这里  $p_l^{i,j}(\tau) = P(s_l^{t+1} = j, | s_l^t = i), f_l^{i,j}(\tau) = P(S_l^{t+1} = \tau | s_l^t = i, s_l^{t+1} = j)$ 。元件在某一状态的逗

留时间只与现在的状态有关, 则有  $f_l^{i,j}(\tau) = f_l^{i,j}(\tau)$ , 由此式(2)可改写为

$$q_l^{i,j}(\tau) = p_l^{i,j} f_l^j(\tau) \quad (i, j \in \Omega_l, \tau \in N) \quad (3)$$

式(3)有如下三个性质:

$$(1) 0 \leq q_l^{i,j}(\tau) \leq 1 \quad (i, j \in \Omega_l, \tau \in N);$$

$$(2) q_l^{i,j}(0) = 0 \quad (i, j \in \Omega_l);$$

$$(3) \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{j \in \Omega_l} q_l^{i,j}(\tau) = 1 \quad (i \in \Omega_l)$$

由以上性质可以得出:  $q_l^{i,i}(\tau) = 0, i \in \Omega_l, \tau \in N$ 。

MRK/NS 的元件在状态  $i$  的逗留时间的分布为

$$\begin{aligned} h_l^i(\tau) &= P(S_l^{t+1} = \tau, s_l^t = i) \\ &= \sum_{k \in \Omega_l} q_l^{i,k}(\tau). \quad i, j \in \Omega_l, \tau \in N \end{aligned} \quad (4)$$

MRK/NS 的元件在状态  $i$  的累积逗留时间的分布为

$$\begin{aligned} H_l^i(\tau) &= P(S_l^{t+1} \leq \tau, s_l^t = i) \\ &= \sum_{k \in \Omega_l} h_l^i(k). \quad \tau \in N \end{aligned} \quad (5)$$

MRK/NS 的第  $l$  个元件在时刻  $\tau$  的寿命记为  $U_l$ , 则

$$\begin{aligned} U_l &= \tau - S_l^{M_l(\tau)}, \\ M_l(\tau) &= \max\{t | S_l^t \leq \tau\} \end{aligned} \quad (6)$$

由以上可得 MRK/NS 第  $l$  个元件在时间  $\tau$  的状态及其寿命变化过程为  $\{(Z_l(\tau), U_l(\tau)), \tau \in N\}$ , 它是以  $\Omega_p = \Omega_l \times N$  为状态空间的马尔科夫过程, 它的一次转移概率为

$$\begin{aligned} P(Z_l(\tau+1) = j) \\ U_l(\tau+1) = \tilde{v} | Z_l(\tau) = j, U_l(\tau) = v) &= \begin{cases} \frac{q_l^{i,j}(v+1)}{1 - H_l^i(v)} & (\tilde{v} = 0) \\ \frac{1 - H_l^i(v+1)}{1 - H_l^i(v)} & (\tilde{v} = v+1, i = j) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可以得出 MRK/NS 的第  $l$  个元件的一步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 - H_l^0(1) & 0 & \cdots & 0 & q_l^{01}(1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q_l^{0u_l}(1) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{1 - H_l^0(2)}{1 - H_l^0(1)} & \cdots & 0 & \frac{q_l^{01}(2)}{1 - H_l^0(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{q_l^{0u_l}(2)}{1 - H_l^0(1)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{q_l^{01}(3)}{1 - H_l^0(2)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{q_l^{0u_l}(3)}{1 - H_l^0(2)} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & p_l^{01} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_l^{0u_l} & 0 & \cdots & 0 \\
q_l^{10}(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 - H_l^1(1) & \cdots & 0 & \cdots & q_l^{1u_l}(1) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{q_{1d_l}^1(2)}{1 - H_l^1(1)} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p_l^{10} & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
q_l^{u_l0}(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_l^{u_l1}(1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 - H_l^{u_l}(1) & \cdots & 0 \\
\frac{q_l^{u_l0}(2)}{1 - H_l^{u_l}(1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{q_l^{u_l1}(2)}{1 - H_l^{u_l}(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p_l^{u_l0} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_l^{u_l1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\quad (8)$$

## 2 MRK/NS 随时间响应的可靠性模型

通过以上对 MRK/NS 的元件的状态分析, MRK/NS 的随机状态过程可以被写为

$$\{X(\tau), \tau \geq 0\} = \{(Z_1(\tau), U_1(\tau)), \dots, (Z_l(\tau), U_l(\tau)), \dots, (Z_n(\tau), U_n(\tau))\} \quad (9)$$

式(9)是一个时间离散的马尔科夫链,它的状态空间为

$$\Omega_S = \prod_{l=1}^n (\Omega_l \times N) \quad (10)$$

式(9)的转移概率矩阵如下:

$$P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_l \otimes \cdots \otimes P_n \quad (11)$$

这里  $P_l$  是  $(Z_l(\tau), U_l(\tau))$  随机过程的一步转移概率矩阵。因此 MRK/NS 的元件的状态决定了 MRK/NS 的状态。MRK/NS 的元件状态与 MRK/NS 的状态可以用一个函数关系来表示。

MRK/NS 的功能函数给出的映射如下:

$$(x_1, \dots, x_l, \dots, x_n) \rightarrow \phi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_n), \quad x_l \in E_l \quad (12)$$

其状态空间变化如下:

$$\phi: \prod_{l=1}^n \Omega_l \rightarrow \Omega \quad (13)$$

上述的映射是把 MRK/NS 的所有元件的状态空间映射到 MRK/NS 的状态空间去。

根据 MRK/NS 可靠度的定义,在状态空间  $\Omega$  内任取  $k$ , 如果 MRK/NS 在时刻  $\tau$  时  $k$  水平状态下运行是正常的,那么就可以认为 MRK/NS 在时刻  $\tau$  是可靠的。

记  $L_k = \{(x_1, \dots, x_l, \dots, x_n) : \phi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_n) \geq k\}$ , 则

$$D^u = \{((x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l), \dots, (x_n, u_n)) : (x_1, \dots, x_l, \dots, x_n) \in L_k, u_l \in N\} \quad (14)$$

$$D^c = \{((x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l), \dots, (x_n, u_n)) : (x_1, \dots, x_l, \dots, x_n) \in \bar{L}_k, u_l \in N\} \quad (15)$$

这里  $l = 1, 2, \dots, n$ ,  $\bar{L}_k$  为  $L_k$  的补, 则 MRK/NS 在任意时刻  $\tau$  的可用度为

$$A(\tau) = \alpha PI \quad (16)$$

这里  $\alpha$  为 MRK/NS 的元件初始可靠度组成的概率向量,  $I = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)'$ , 它是一个  $n$  维列向量, 它的前  $k$  个元素为 1, 其他元素为 0。

MRK/NS 在任意时刻  $\tau$  的可靠度为

$$R(\tau) = \alpha_1 P^\tau I \tag{17}$$

这里  $\alpha_1$  为  $\alpha$  中  $D''$  对应的 MRK/NS 的元素初始可靠度组成的概率向量,  $P''$  是由  $D''$  对应的  $P$  中的元素组成的概率矩阵,  $I = (1, \dots, 1)'$  是一个  $k$  维列向量。

3 算 例

已知某冷却水传输系统由三个不同的元件构成,每个元件的状态空间为  $\Omega_i = \{0,1,2\}$ , 0 表示元件已失效,2 表示元件完好,1 表示元件在过渡期。该系统从所有元件状态都是 2 的情况下开始运行,当三个元件中有 2 个失效时,MRK/NS 就认为失效。该系统的元件在状态  $i$  的逗留时间仅与目前的状态  $i$  有关。元件的初始可靠度均为 0.9999,元件初始状态转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

时间  $\tau$  取 5 个时间段,由式(4)可以得到每个元件在各个状态的逗留时间的分布矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.10 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.20 & 0.40 & 0.20 & 0.10 \\ 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.50 & 0.30 \end{bmatrix}$$

在该算例中,有不同的三个元件,每个原件有三个状态,每个元件在同一时间都会表现出不同的状态,因而该系统是一个多状态系统。用本文方法计算得到冷却水传输系统在前 50 个单位时间的可用度示意图如图 1 所示,由式(17),系统可靠度如图 1 所示。由式(16)计算的系统可用度如图 2 所示。

4 结 论

(1)MRK/NS 的元件的状态变化用离散时间的马尔科夫链和半马尔科夫链进行了研究,给出了元件的状态转移矩阵,从而确定了 MRK/NS 的状态变化模型,给出了 MRK/NS 的可靠度与可用度预测模型。

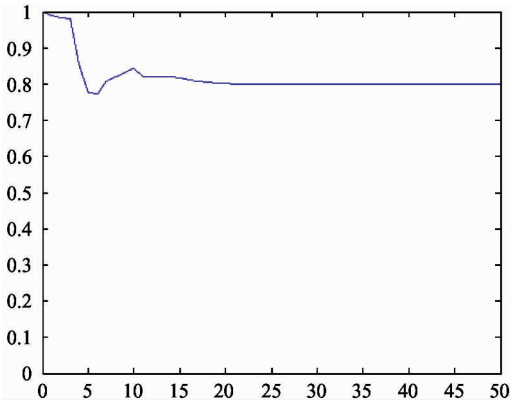


图 1 算例可靠度示意图

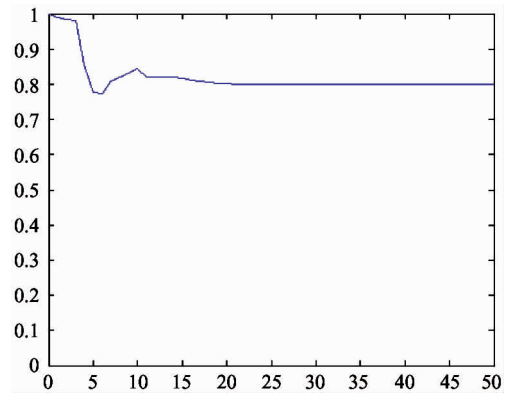


图 2 算例可用度示意图

(2)算例说明本文建立的模型是可行的、实用的与有效的。

参考文献

[ 1 ] Si S B, Dui H Y, Cai Z Q, et al. Integrated importance measure of multi-state systems for maintenance processes. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(2): 266-273

[ 2 ] 方永锋,陈建军,曹鸿钧. 可修复的 k/n 表决系统的可靠性分析. *西安电子科技大学学报*, 2014, 41(5): 179-184

[ 3 ] Lisnianski A, Levitin G. *Multi-State System Reliability*. New York: World Scientific, 2003

[ 4 ] 宋秀兰,俞立. 混合储能系统功率配置的建模与滚动优化控制. *高技术通讯*, 2014, 24(12): 1279-1288

[ 5 ] Gregory L. A universal generating function approach for the analysis of multi-state systems with dependent elements. *Reliability Engineering and System Safety*, 2004, 84(3): 285-292

[ 6 ] 苗琳璐,王武,李玉榕. 基于 T-S 模型的非线性系统故

- 障诊断集员滤波器的设计. 高技术通讯,2014,24(2): 208-214
- [ 7 ] Fang Y F, Tao W L, Tee K F. Reliability analysis of repairable  $k$ -out- $n$  system from time response under several times stochastic shocks. *Smart Structures and Systems*, 2014, 14(4): 559-567
- [ 8 ] Meyn S P, Tweedie R L. Markov Chains and Stochastic Stability. Beijing: Spring- Verlag, 1999
- [ 9 ] Limnios N, Oprian G. Semi-Markov Processes and Reliability in Statistics for Industry and Technology. Boston: Birkhauser, 2001
- [10] Barbu V, Limnios N. Semi-Markov Chain and Hidden Semi-Markov Models toward Applications in Lecture Notes in Statistic. New York: Springer-verlay, 2008
- [ 11 ] Barbu V, Limnios N. Discrete Time Semi-Markov Processes for Reliability and Survival Analysis-A Nonparametric Approach in Parametric and Semi-Parametric Models with Applications to Reliability, Survival Analysis and Quality of Life. Boston: Statistics for Industry and Technology , 2004
- [ 12 ] Fazlollahtabar H, Saidi-Mehrabad M, Balakrishnan J. Integrated markov-neural reliability computation method: A case for multiple automated guided vehicle system. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 135, 34-44

## Research on the dynamic reliability of multi-state repairable $k$ -out- $n$ systems

Fang Yongfeng<sup>\*</sup>, Chen Jianjun<sup>\*\*</sup>

(<sup>\*</sup> School of Mechanical Engineering, Guizhou University of Science Engineering, Bijie 551700)

(<sup>\*\*</sup> Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design, Ministry of Education, Xidian University, Xi'an 710071)

### Abstract

The component diversity of multi-state repairable  $k$ -out- $n$  ( $k/n$ ) systems is analyzed by using discrete time Markov chains and semi-Markov chain to obtain the fomula for computing the probability distribution of component state changes and the state sojourn time, then, the first order probability transition matrix of components' state changes and state lifetime changes is given, and finally, the models for prediction of system reliability and availability are deduced by components analysis, and their feasibility and effectiveness are verified by a computing example.

**Key words:** multi-state,  $k$ -out- $n$  ( $k/n$ ) system, repairable, Markov, reliability