doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2015.10-11.008

交换交叉立方网络的可靠性研究①

马 强②* 梁家荣③* 熊 茜* 郭 晨**

(*广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)

(**广西大学电气工程学院 南宁 530004)

摘 要 针对传统的基于连通度分析交换交叉立方网络可靠性的方法的不足,提出一种基于超连通度的可靠性分析方法,因为用超连通度衡量互连网络的稳定性和容错能力较之用连通度更为准确。在研究了交换交叉立方网络的拓朴结构的基础上证明了交换交叉立方网络的点连通度和边连通度均是 $s+1(s \leq t)$,证明了交换交叉立方网的超点连通度和超边连通度均是 $2s(s \leq t)$,也就是说,当移除交换交叉立方网络的 $2s$ 个点或者 $2s$ 条边,会得到不包括孤立点的非连通图。当交换交叉立方网络被用来构建大型并行计算/通信系统时,运用上述成果能够更加准确地为系统的稳定性和容错能力提供支持。

关键词 互连网络,点连通度,边连通度,交换交叉立方网($ECQ(s,t)$),超点连通度,超边连通度

0 引 言

互连网络是由很多处理器按照一定规则连接构成的,它在大规模并行处理机中扮演着重要角色,在并行计算领域备受重视。近年来,随着网络规模的不断增大,网络可靠性的研究引起了广泛关注。在网络可靠性的研究领域,点连通度和边连通度是衡量网络可靠性的重要度量参数,它们分别是指移除部分顶点或边,且使图不连通的最小顶点数或边数。为了更加准确地衡量互连网络的稳定性和容错能力,文献[1]提出了超点连通度和超边连通度的概念,它们分别是指移除部分顶点或边,使图不连通且每个连通分支都至少有两个点的最小顶点数或边数。超连通度一提出便引起了众多学者的关注,并产生了很多好的研究成果。文献[2]证明了交换超立方网络[3,4](exchanged hypercubes, $EH(s,t)$)的点连通度和边连通度均是 $s+1$。文献[5]研究了交换超立方网络 $EH(s,t)$ 的超连通度,得出 $EH(s,t)$ 的超点连通度和超边连通度均是 $2s$。文献[6]证明了交叉立方网[7](crossed cubes, CQ_n)的连通度是 n。文献[8]研究得出 n 维交叉立方网络的超点连通度和超边连通度均是 $2n-2$。文献[9-11]研究了其他超立方网络的变种网络的超连通度。基于当前文献已有连通度和超连通度的研究成果发现,互连网络的超连通度明显远大于连通度,这对于更准确地衡量互连网络的稳定性和容错能力有着极为重要的学术意义和应用价值。

多处理器计算机系统一般可以用一个静态互连网络表述其拓朴结构,当前描述多处理器计算机系统主要的静态互连网络结构有 Linear(线性阵列),Ring(环形),Tree(树形),Star(星形),Mesh(网格),Torus(环绕),Hypercube(超立方体)等。在已被提出的众多互连网络拓扑结构中,超立方网络(hypercube, Q_n)[12]以其具有的对称性、小半径、强连通性、递归结构、可划分性等优秀性质而成为了并行计

① 国家自然科学基金(61363002)资助项目。

② 男,1990 年生,硕士;研究方向:网络与并行计算;E-mail: qiangv5@live.com

③ 通信作者,E-mail: gxuliangjr@163.com

(收稿日期:2015-04-14)

算/通信领域比较流行的网络结构,但是它不是各方面性质最好的。针对超立方网络的缺陷,很多超立方网络 Q_n 的变种网络已在文献[13-16]提出。交叉立方网络 CQ_n[6] 与交换超立方网络 $EH(s,t)$[3,4] 是最具代表性的网络:交叉立方网络 CQ_n 是从直径的角度考虑,通过改变超立方网络 Q_n 的部分连接而得到,它的直径大约是超立方网络 Q_n 直径的一半[6];交换超立方网络 $EH(s,t)$ 是从成本的角度考虑,通过移除超立方网络 Q_n 的部分连接而得到,这使得交换超立方网络的连接数几乎等于对应超立方网络 Q_n 连接数的一半[4]。为了得到更加优化的互连网络拓扑,Li 和 Mu 在 2013 年通过结合交叉立方网络 $CQ(s,t)$ 与交换超立方网络 $EH(s,t)$ 的优势,在文献[17]中提出了交换交叉立方网络(exchanged crossed cubes, $ECQ(s,t)$)。比较交换超立方网 $EH(s,t)$ 的连通度 $\kappa(EH(s,t)) = s+1$ 和超连通度 $\kappa'(EH(s,t)) = 2s$,以及交叉立方网 CQ_n 的连通度 $\kappa(CQ_n) = n$ 和超连通度 $\kappa'(CQ_n) = 2n-2$ 发现,一个互连网络的连通度和超连通度有着很大的差别,对于衡量互连网络的稳定性和容错能力,超连通度比连通度有着更大的优势。本文正是在此基础上,从研究交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 的可靠性方向入手,通过研究其结构特性,证明了交换交叉立方网络的点连通度和边连通度均是 $s+1$。研究并证明了交换交叉立方网络的超点连通度和超边连通度均是 $2s$,为利用超连通度研究交换交叉立方网络的可靠性,提供了重要的理论支撑。

1 交换交叉立方网络及其性质

本文使用 $G = (V,E)$ 表示系统 S,V 表示图的点集,E 表示图的边集,假定 $V' \subset V(G)$,$V(G) - V'$ 表示移除 V' 中的点后形成的图,假定 $F \subset E(G)$,$E(G) - F$ 表示移除 F 中的边后形成的图。

定义 1[1] 假定 $V' \subset V(G)$,如果 $V(G) - V'$ 是不连通的,而且每个连通分支至少包含两个点,那么称 V' 为超点割集。

定义 2[1] 假定 $F \subset E(G)$,如果 $E(G) - F$ 是不连通的,而且每个连通分支至少包含两个点,那么称 F 为超边割集。

如果图 G 存在超点割集(超边割集),超点(边)连通度 $\kappa'(G)(\lambda'(G))$ 是所有超点割集(超边割集)中基数最小的点(边)的个(条)数。

本文使用长度为 n 的二进制字符串 $x = x_{n-1}\cdots x_0$ 或 $u = u_s\cdots u_1 u_t \cdots u_1 u_0 (n = s+t+1)$ 标记 $ECQ(s,t)$ 的点。一个点的标记也被称作点的地址。对于 $ECQ(s,t)$,以下遵从来自文献[17]的定义。

定义 3 给定两个长度为 2 的二进制字符串 $x = x_1x_0$ 和 $y = y_1y_0$,当且仅当 $(x,y) \in \{(00,00),(10,10),(01,11),(11,01)\}$,$x$ 和 y 被称为关联对,表示为 $x \sim y$。

假定 $x = x_1x_0$ 和 $y = y_1y_0$,而且 $x \sim y$,那么就会有:$x_0 = y_0$,$\bar{x}_1x_0 \sim \bar{y}_1y_0$,$x_1\bar{x}_0 \sim \bar{y}_1\bar{y}_0$,$y_1y_0 \sim x_1x_0$。

一个交换交叉立方网络通常被定义为一个无向图 $ECQ(s,t) = (V,E)$,取 $s \geqslant 1$,$t \geqslant 1$,s 和 t 是整数。V 是点的集合,定义为 $V = \{a_s\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i, b_j, c \in \{0,1\}, i \in [1,s], j \in [1,t]\}$。$E$ 是边的集合,由以下三部分 E_1, E_2, E_3 组成。假定 $u,v \in V(G)$,为了表示方便,使用 $u[i](0 \leqslant i \leqslant s+t)$ 表示点 $u = u_{s+t}\cdots u_{t+1}u_t\cdots u_1u_0$ 右起第 i 位的值,比如图 1(a)点 $u = 101$,那么 $u[0] = 1$,$u[1] = 0$。

E_1: $u[0] \neq v[0]$, $u[s+t:t+1] = v[s+t:t+1]$

E_2: $u[0] = v[0] = 1$, $u[s+t:t+1] = v[s+t:t+1]$,$u[x:y]$ 表示 u 的 x 维和 y 维之间的位模式,用 $u_{t-1}\cdots u_0$ 表示 $u[t:1]$,用 $v_{t-1}\cdots v_0$ 表示 $v[t:1]$,如果点 u 和点 v 相邻,那么就会存在正整数 $l(1 \leqslant l \leqslant t)$ 使得如下条件成立:

(1) $u_{t-1}\cdots u_l = v_{t-1}\cdots v_l$,以下表示为 $x_{t-1}\cdots x_l$;

(2) $u_{l-1} \neq v_{l-1}$;

(3) 如果 l 是偶数,$u_{l-2} = v_{l-2}$;

(4) 给定 $0 \leqslant i < \lfloor (l-1)/2 \rfloor$,有 $u_{2i+1}u_{2i} \sim v_{2i+1}v_{2i}$。

E_3: $u[0] = v[0] = 0$, $u[t:1] = v[t:1]$,用 $u_{s-1}\cdots u_0$ 表示 $u[s+t:t+1]$,用 $v_{s-1}\cdots v_0$ 表示 $v[s+t:t+1]$,如果点 u 和点 v 相邻,那么就会存在正整数 $l(1 \leqslant l \leqslant s)$ 使得如下条件成立:

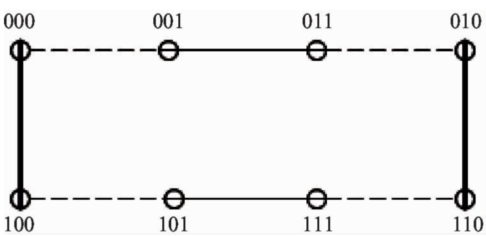
(1) $u_{s-1}\cdots u_l = v_{s-1}\cdots v_l$,以下表示为 $x_{s-1}\cdots x_l$;

(2) $u_{l-1} \neq v_{l-1}$;

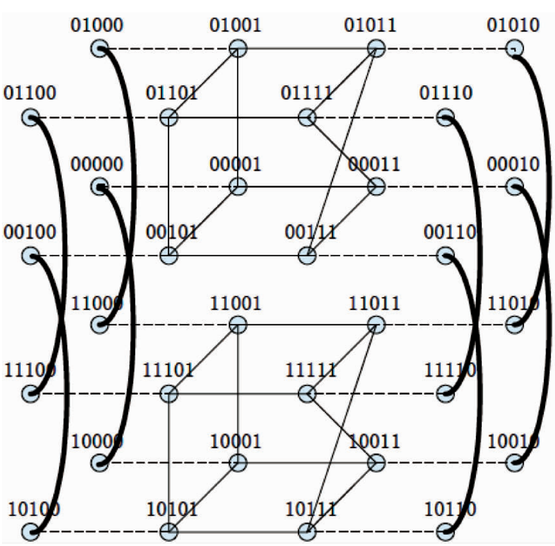
(3) 如果 l 是偶数, $u_{l-2} = v_{l-2}$;

(4) 给定 $0 \leqslant i < \lfloor (l-1)/2 \rfloor$, 有 $u_{2i+1}u_{2i} \sim v_{2i+1}v_{2i}$。

根据交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 的定义可知, $ECQ(s,t)$ 具有三个不相交的边集 E_1, E_2 和 E_3。如图1(a)展示了一个 $s=1$, $t=1$ 的交换交叉立方网络 $ECQ(1,1)$ 实例,图1(b)展示了一个 $s=1$, $t=3$ 的交换交叉立方网络 $ECQ(1,3)$ 实例,图中虚线表示 E_1, 实线表示 E_2, 加粗黑线表示 E_3。



(a) $ECQ(1,1)$



(b) $ECQ(1,3)$

图1　交换交叉立方网络

取 $ECQ(s,t)$ 任意相邻两点 $u = x_{s+t} \cdots x_l u_{l-1} \cdots u_0$ 和 $v = x_{s+t} \cdots x_l v_{l-1} \cdots v_0$, 按照 $ECQ(s,t)$ 构造方法, $(u,v) \in E(ECQ(s,t))$, 称 $l-1$ 是 u 和 v 的最左有效位,记为 d, 对于任意一对相邻点 (u,v), 如果 u 和 v 的最左边有效位是 d, 那么称 u 和 v 沿着维度 d 相邻,并且称 (u,v) 是一条 d 维边,也称 u 是 v 的 d-邻接点或者称 v 是 u 的 d-邻接点。本文中使用符号 $N_i(u)$ 表示 u 的 i-邻接点,使用 $N(u) = \{v \mid (u,v) \in E(ECQ(s,t))\}$ 表示点 u 所有邻接点的集合,使用 $|N(u)|$ 表示点 u 的邻接点总数,称作点 u 的度,记作 $d(u) = |N(u)|$。

如果 (u,v) 是一条 d 维边,那么 $v = N_d(u)$ 或者 $u = N_d(v)$, $d \in \{s+t,\cdots,t+1,t,\cdots,1,0\}$, 结合 $ECQ(s,t)$ 的构造方法, d 可唯一地确定点 u 的邻接点 $N_d(u)$, 而且有:

(1) 如果 $(u,v) \in E_1$, 那么 $d \in \{0\}$;

(2) 如果 $(u,v) \in E_2$, 那么 $d \in \{t,\cdots,1\}$;

(3) 如果 $(u,v) \in E_3$, 那么 $d \in \{s+t,\cdots,t+1\}$。

例如,取 $ECQ(1,3)$ 一点 $u = 01101$, 当 $d = 3$ 时, $N_3(01101) = 00101$ 是点 u 的3维邻接点;当 $d = 2$ 时, $N_2(01101) = 01001$ 是点 u 的2维邻接点;当 $d = 1$ 时, $N_1(01101) = 01111$ 是点 u 的1维邻接点;当 $d = 0$ 时, $N_0(01101) = 01100$ 是点 u 的0维邻接点。

为了后续证明方便,为任意一点 u 的 d 维邻接点作如下标记,取 $ECQ(s,t)$ 任意一点 u: $u \in V(ECQ(s,t))$, 假定 $u = u_{s+t} \cdots u_{t+1} u_t \cdots u_1 u_0$, 那么 u 的 d 维邻接点 $N_d(u)$ 作如下表示:

(1) 如果 $d \in \{0\}$, 那么 $N_d(u) = u_s \cdots u_{t+1} u_t \cdots u_1 \bar{u}_0$;

(2) 如果 $d \in \{t, t-1, \cdots, 1\}$ 而且 $u[0] = 1$, 那么 $N_d(u) = u_s \cdots u_{t+1} u_t \cdots \bar{u}_d u'_{d-1} \cdots u'_1 u_0$;

(3) 如果 $d \in \{s+t, s+t-1, \cdots, t+1\}$ 而且 $u[0] = 0$, 那么 $N_d(u) = u_s \cdots \bar{u}_d u'_{d-1} \cdots u'_{t+1} u_t \cdots u_1 u_0$;

本文使用 $N_{d1,d2}(u)$ 表示点 $N_{d1}(u)$ 的 $d2$ 维邻接点,即 $N_{d1,d2}(u) = N_{d2}(N_{d1}(u))$, 类似地,如果 d_1, d_2, d_3 满足上述邻接点的求解方法, $N_{d1,d2,d3}(u) = N_{d3}(N_{d2}(N_{d1}(u)))$。

下面引入交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 的部分性质。

性质1[17]: $ECQ(s,t)$ 同构于 $ECQ(t,s)$。

性质2[17]: $ECQ(s,t)$ 能够分解为相同的两个 $ECQ(s-1,t)$ 或 $ECQ(s,t-1)$。

例如,可以将 $ECQ(s,t)$ 分解为 L 和 R 两部分,

分解如下：

$V(L) = \{0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i,\ b_i,\ c \in \{0,1\},\ i \in [1,s-1],\ j \in [1,t]\}$

$V(R) = \{1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i,\ b_i,\ c \in \{0,1\},\ i \in [1,s-1],\ j \in [1,t]\}$

使用 L 和 R 分别表示 $V(L)$ 和 $V(R)$ 的导出子图，那么 $L \cong ECQ(s-1,\ t)$，$R \cong ECQ(s-1,t)$，L 和 R 之间的边是 E_3。使用 $L \odot R$ 表示 $ECQ(s,t)$ 的这种分解，即 $ECQ(s,t) = L \odot R$。

性质 3[17]：$ECQ(s,t)$ 的顶点数 $N(s,t) = 2^{s+t+1}$，边数 $E(s,t) = (s+t+2)2^{s+t-1}$。

性质 4[17]：$ECQ(s,t)$ 的点的度有如下两种情况：地址末尾标记为 0 的点的度是 $s+1$，地址末尾标记为 1 的点的度是 $t+1$，因此，$ECQ(s,t)$ 的最小度是 $\min\{s+1,t+1\}$，$ECQ(s,t)$ 的度是 $\max\{s+1,t+1\}$。

2　交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 的连通度

根据 $ECQ(s,t)$ 构造方法，结合最左有效位 d 的定义，任意一条边只与两个最左有效位相同的点相连，因此，在 $ECQ(s,t)$ 拓扑图中，一条由 u_0 作为始点的边 $P: u_0 \to u_1 \to u_2 \cdots \to u_{s+t}$ 可以由一个由各点最左有效位 d 组成的序列 $w = (d_0 - d_1 - d_2 - \cdots - d_{s+t})$（$d_i \in \{0,1,\cdots,s+t\}$）唯一决定。例如 $ECQ(1,3)$，如果 $u_0 = 00000$，由 u_0 开始，由序列 $w = (4-0-3-1)$ 决定的路径是：00000 - 10000 - 10001 - 11001 - 11011。

网络中的一条路径是由不同的点组成的序列，序列中每对相邻点被一条边相连，P_1 和 P_2 是点 u 和点 v 之间的两条路径，当且仅当 $V(P1) \cap V(P2) = \{u,v\}$，$P_1$ 和 P_2 被称为点不相交路径，当且仅当 $E(P1) \cap E(P2) = \varnothing$，$P_1$ 和 P_2 被称为边不相交路径。

引理 1：$\kappa(ECQ(s,t)) = s+1(1 \leqslant s \leqslant t)$

证明：给定 $s+t \geqslant 3$，在 $ECQ(s,t)$ 中任取一点 u，使得 $u \in V(E3)$，假定 $S = N(u)$，根据性质 4，$|S| = s+1$，而且 S 是一个分离集，所以 $\kappa(ECQ(s,t)) \leqslant s+1$。为了证明 $\kappa(ECQ(s,t)) = s+1(1 \leqslant s \leqslant t)$，需要证明每个点割集的基数至少是 $s+1$。下面使用 $s+1$ 上的归纳法。

(1) $s+t = 2$ 时，即 $ECQ(1,1)$，如图 1(a)，$ECQ(1,1)$ 是一个 8 个点的单环，观察图 1(a) 容易发现 $\kappa(ECQ(1,1)) = 2$。

(2) $s+t \geqslant 3$ 时，根据归纳假设可得，$\kappa(ECQ(s-1,t)) = s$，根据性质 2，可以将 $ECQ(s,t)$ 作如下分解，$ECQ(s,t) = L \odot R$：

$V(L) = \{0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i,\ b_i,\ c \in \{0,1\},\ i \in [1,s-1],\ j \in [1,t]\}$

$V(R) = \{1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i,\ b_i,\ c \in \{0,1\},\ i \in [1,s-1],\ j \in [1,t]\}$

假定 L 和 R 分别表示 $V(L)$ 和 $V(R)$ 的导出子图，那么 $L \cong ECQ(s-1,t)$，$R \cong ECQ(s-1,t)$。假定 S 是 $ECQ(s,t)$ 的一个点割集，如果 $L-S$ 是连通的，因为 $ECQ(s,t) = L \odot R$，那么 $ECQ(s,t) - S$ 也是连通的，除非 S 包含 E_3 的每条边的一个顶点，这需要满足条件：$|S| \geqslant 2^t$，但是 $2^t \geqslant s+1(1 \leqslant s \leqslant t)$。

因此需要假定 $L-S$ 是不连通的，根据归纳假设，$|V(S) \cap V(L)| \geqslant s$，如果 $V(R) \cap V(R) = \varnothing$，那么 $R-S$ 是连通的，并且 $L-S$ 中属于 E_3 的点总会在 $R-S$ 中有邻接点，因此，$ECQ(s,t) - S$ 是连通的。所以 $V(S) \cap V(R) \neq \varnothing$，即 S 也包含 R 的一个点。所以 $|S| \geqslant s+1$，所以 $\kappa(ECQ(s,t)) \geqslant s+1$。

结合以上：$\kappa(ECQ(s,t)) = s+1(1 \leqslant s \leqslant t)$，证毕。

根据性质 4，因为 $s \leqslant t$，所以 $ECQ(s,t)$ 的最小度 $\xi(ECQ(s,t)) = s+1$。根据图论知识有 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \xi(G)$，根据引理 1 的证明有：$\kappa(ECQ(s,t)) \geqslant s+1(s \leqslant t)$，获得如下引理：

引理 2：$\lambda(ECQ(s,t)) = s+1(s \leqslant t)$

结合引理 1 和引理 2 获得如下定理：

定理 1：$\kappa(ECQ(s,t)) = \lambda(ECQ(s,t)) = s+1(s \leqslant t)$

3　交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 的超连通度

引理 3：$\kappa'(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$

证明:首先证明 $\kappa'(ECQ(s,t)) \leqslant 2s(s \leqslant t)$。

在 $ECQ(s,t)$ 中取 $(u,v) \in E3$,并且定义 $S = \{N(u)-v\} \cup \{N(v)-u\}$。根据性质4,$|S| = 2s$。因为 $ECQ(s,t)$ 是一个二分图,$\{N(u)-v\}$ 和 $\{N(v)-u\}$ 属于不同的部集,所以 S 是一个超点割集。对于 $ECQ(s,t)$ 中任意一点 w,$d(w) \geqslant s+1$。因为 $|N(u)-v| = |N(v)-u| = s$,所以 $ECQ(s,t)-S$ 没有孤立点。因此,$\kappa'(ECQ(s,t)) \leqslant 2s(s \leqslant t)$。

接下来需要证明 $\kappa'(ECQ(s,t)) \geqslant 2s(s \leqslant t)$。取 $ECQ(s,t)$ 任意点集 F:$|F| \leqslant 2s-1$ 并且 $ECQ(s,t)-F$ 没有孤立点,下面证明 $ECQ(s,t)-F$ 是连通的。

根据性质 2 可以将 $ECQ(s,t)$ 分解表示为 $ECQ(s,t) = L \odot R$,这里有:

$V(L) = \{0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i, b_i, c \in \{0,1\}, i \in [1,s-1], j \in [1,t]\}$

$V(R) = \{1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 c \mid a_i, b_i, c \in \{0,1\}, i \in [1,s-1], j \in [1,t]\}$

为了简化表示,假定 $F_L = F \cap L, F_R = F \cap R$,不失一般性,假定 $|F_L| \geqslant |F_R|$,那么 $|F_R| \leqslant s-1$。

因为 $R \cong ECQ(s-1,t)$,根据定理1 可以得知:$R-F_R$ 是连通的。接下来需要证明 $L-F_L$ 中的任意一点通过与 $R-F_R$ 中一点连接的路径是连通的。取 $L-F_L$ 任意一点 u:$u \in L-F_L$。考虑以下两种情况:

情况 1:假定 $u = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0$,那么 $u_R = 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0$ 是 u 在 R 中的一个邻接点。如果 $u_R \notin F_R$,证毕。因此以下假定 $u_R \in F_R$。

因为 $ECQ(s,t)-F$ 没有孤立点,L 中一定存在 u 的一个邻接点 u_L 使得 $u_L \notin F_L$。

情况 1.1　假定 $u_L = N_k(u)$,$k \in \{s+t,\cdots,t+1\}$ 即 $u_L = 0a_{s-1}\cdots \bar{a}_k a'_{k-1} \cdots a'_1 b_t \cdots b_1 0$,下面将会构造 $2s-1$ 条由 u 或 u_L 连接 R 中一点的点不相交路径,如图 2(a)。

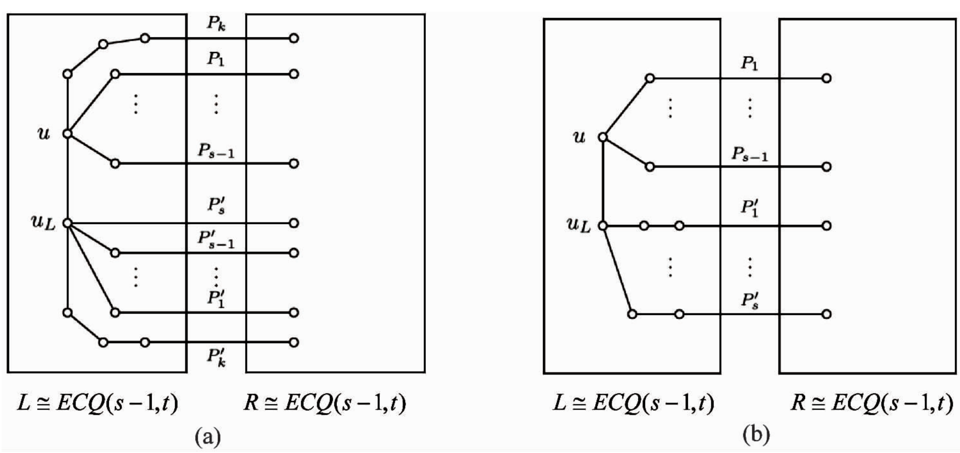


图 2　情况 1 的证明图示

假定 P_i 表示一条开始于 u,并由序列 $w_i = (i-(s+t))(i \in \{s+t, s+t-1, \cdots, t+1\})$ 确定的路径。P_i 表示如下:

$$
\begin{aligned}
u &= 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0 \\
&\rightarrow N_i(u) = 0a_{s-1}\cdots \bar{a}_i a'_{i-1} \cdots a'_1 b_t \cdots b_1 0 \\
&\rightarrow N_{i,s+t}(u) = N_{s+t}(N_i(u))
\end{aligned}
$$

假定 P_k 表示开始于 u,并由序列 $w_k = (0-1-0-(s+t))$ 确定的路径,P_k 表示如下:

$$
\begin{aligned}
u &= 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0 \\
&\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 1 \\
&\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_1 1 \\
&\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_1 0 \\
&\rightarrow 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_1 0
\end{aligned}
$$

假定 P'_i 表示开始于 u_L,由序列 $w'_i = (i-(s+t))(i \in \{s+t, s+t-1, \cdots, t+1\})$ 确定的路径,P'_i 表示如下:

$u_L = N_k(u) \to N_{k,i}(u) \to N_{k,i,s+t}(u)$。

假定 P'_k 表示开始于 u_L，由序列 $w = (0-1-0-(s+t))$ 确定的路径，P'_k 表示如下：

$$u_L = 0a_{s-1}\cdots\bar{a}_k a'_{k-1}\cdots a'_1 b_t\cdots b_1 0$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots\bar{a}_k a'_{k-1}\cdots a'_1 b_t\cdots b_1 1$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots\bar{a}_k a'_{k-1}\cdots a'_1 b_t\cdots \bar{b}_1 0$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots\bar{a}_k a'_{k-1}\cdots a'_1 b_t\cdots \bar{b}_1 0$$
$$\to 1a_{s-1}\cdots\bar{a}_k a'_{k-1}\cdots a'_1 b_t\cdots \bar{b}_1 0$$

假定 P'_s 表示 u_L 和 u_L 在 R 中的邻接点 u'_R 之间的边。

情况 1.2 假定 $u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 1$，下面将构造 $2s-1$ 条由 u 或 u_L 连接 R 中一点的点不相交路径，如图 2(b)。

假定 P_i 表示开始于 u，由序列 $w_i = (i-(s+t))(i \in \{s+t, s+t-1, \cdots, t+1\})$ 确定的路径，P_i 表示如下：

$$u = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 0$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots\bar{a}_i a'_{i-1}\cdots a'_1 b_t\cdots b_1 0$$
$$\to 1a_{s-1}\cdots\bar{a}_i a'_{i-1}\cdots a'_1 b_t\cdots b_1 0$$

假定 P'_i 表示开始于 u，由序列 $w'_i = (i-0-(s+t))(i \in \{1,2,\cdots,s\})$ 确定的路径，P'_i 表示如下：

$$u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 1$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_i b'_{i-1}\cdots b'_1 1$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_i b'_{i-1}\cdots b'_1 0$$
$$\to 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_i b'_{i-1}\cdots b'_1 0$$

根据以上对 $P_i(i = t+1, t+2, \cdots, s+t)$ 和 $P'_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 的构造，可以得到如下结论：以上构造的 $2s-1$ 条路径除 u 和 u_L 之外是点不相交的。假定 $F' = F\backslash\{u_R\}$，那么 $|F'| \leqslant 2s-2$，并且 F' 中每个点最多与一条边相关，所以必然存在一条边 P 属于 $P_i(i = t+1, t+2, \cdots, s+t)$ 或者 $P'_i(i = 1,2,\cdots,s)$，使得 $V(P) \cap F = \varnothing$。所以在 $ECQ(s,t) - F$ 中，点 u 通过与一条连接 $R - F_R$ 一点的路径相连，使得 $ECQ(s,t) - F$ 是连通的。

情况 2：假定 $u = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 1$，根据 $ECQ(s,t)$ 构造定义，$N(u) \subset V(L)$。因为 $ECQ(s,t) - F$ 没有孤立点，因此在 L 中存在 u 的一个邻接点 u_L 使得 $u_L \notin F_L$。

情况 2.1 假定 $u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_k b'_{k-1}\cdots b_1 1$。下面将构造 $2s$ 条由 u 或 u_L 连接 R 中一点的点不相交路径，如图 3(a)。

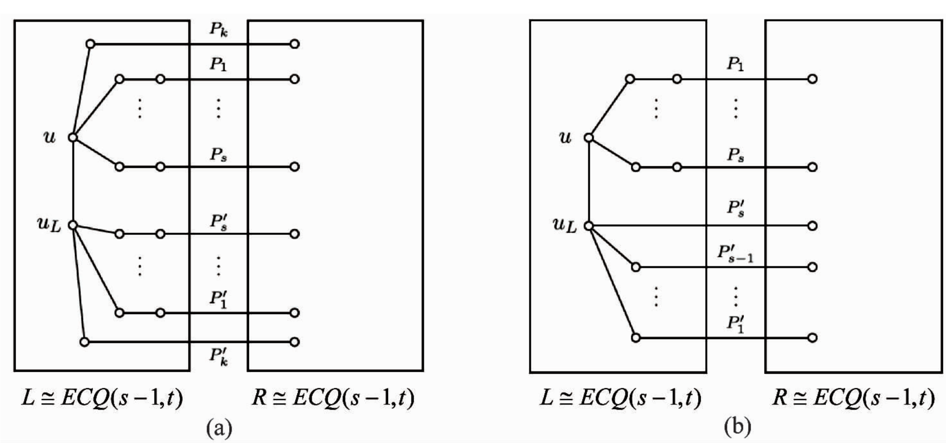


图 3 情况 2 的证明图示

假设 P_i 表示一条开始于 u，并且由序列 $w_i = (i-0-(s+t))(i \in \{1,2,\cdots,s\}\backslash\{k\})$ 的路径。P_i 表示如下：

$$u = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 1$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_i b'_{i-1}\cdots b'_1 1$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_i b'_{i-1}\cdots b'_1 0$$
$$\to 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots \bar{b}_i b'_{i-1}\cdots b'_1 0$$

假定 P_k 表示如下路径：

$$u = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 1$$
$$\to 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 0$$
$$\to 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t\cdots b_1 0$$

假定 P'_i 表示开始于 u_L，由序列 $w'_i = (i-0-$

$(s+t))(i \in \{1,2,\cdots,s-1\} \backslash \{k\})$ 确定的路径，P'_i 表示如下：

$$u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{k-1} \cdots b_1 1$$
$$\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{k-1} \cdots \bar{b}'_i b''_{i-1} \cdots b''_1 1$$
$$\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{k-1} \cdots \bar{b}'_i b''_{i-1} \cdots b''_1 0$$
$$\rightarrow 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{k-1} \cdots \bar{b}'_i b''_{i-1} \cdots b''_1 0$$

假定 P'_k 表示如下路径：

$$u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{d-1} \cdots b_1 1$$
$$\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{k-1} \cdots b_1 0$$
$$\rightarrow 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_k b'_{k-1} \cdots b_1 0$$

情况 2.2　假定 $u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0$，下面将构造 $2s$ 条由 u 或 u_L 连接 R 中一点的点不相交路径，如图 3(b)。

假定 P_i 开始于 u，由序列 $w_i = (i - 0 - (s+t))(i \in \{1,2,\cdots,s\})$ 确定的路径，P_i 表示如下：

$$u = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 1$$
$$\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_i b'_{i-1} \cdots b'_1 1$$
$$\rightarrow 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_i b'_{i-1} \cdots b'_1 0$$
$$\rightarrow 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots \bar{b}_i b'_{i-1} \cdots b'_1 0$$

假定 P'_i 表示开始于 u_L，由序列 $w'_i = ((t+i) - (s+t))(i \in \{1,2,\cdots,s-1\})$ 的路径，P'_i 表示如下：

$$u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0$$
$$\rightarrow 0a_{s-1}\cdots \bar{a}_i a'_{i-1} \cdots a'_1 b_t \cdots b_1 0$$
$$\rightarrow 1a_{s-1}\cdots \bar{a}_i a'_{i-1} \cdots a'_1 b_t \cdots b_1 0$$

假定 P'_s 表示如下路径：

$$u_L = 0a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0 \rightarrow 1a_{s-1}\cdots a_1 b_t \cdots b_1 0$$

从以上对 $P_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 和 $P'_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 的构造可以得出如下结论：不包括 u 和 u_L，这 $2s$ 条路径是点不相交的。因为 $|F| \leqslant 2s-1$，并且 F 的每一点最多只与一条路径关联，所以 $P_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 或 $P'_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 中必然存在一条路径 P 使得 $V(P) \cap F = \varnothing$。也就是说，在 $ECQ(s,t) - F$ 中，点 u 通过与 $R - F_R$ 中一点相连使得 $ECQ(s,t) - F$ 是连通的。

因此，$ECQ(s,t) - F$ 是连通的，这意味着：$\kappa'(ECQ(s,t)) \geqslant 2s(s \leqslant t)$。

结合引理开始时已经证明的 $\kappa'(ECQ(s,t)) \leqslant 2s(s \leqslant t)$，得到结论：$\kappa'(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$，证毕。

$ECQ(s,t)$ 的边最小度 $\xi(ECQ(s,t)) = \min\{d(u) + d(v) - 2 : (u,v) \in E(ECQ(s,t))\}$。根据交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 的定义，边 E_1, E_2, E_3 的度分别是 $s+t, 2t, 2s$。因此 $\xi(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$。

根据离散数学原理，$\kappa'(G) \leqslant \lambda'(G) \leqslant \xi(G)$，根据引理 3 的证明：$\kappa'(ECQ(s,t)) \geqslant 2s(s \leqslant t)$，因为 $\xi(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$，获得如下引理：

引理 4　$\lambda'(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$

结合引理 3 和引理 4 得到如下定理：

定理 2：$\kappa'(ECQ(s,t)) = \lambda'(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$

4　结　论

本文主要是在引入交换交叉立方网 $ECQ(s,t)$ 的概念和性质后，在研究了交换交叉立方网络的拓扑结构的基础上证明了 $ECQ(s,t)$ 的点连通度和边连通度均是 $s+1$，即定理 1：$\kappa(ECQ(s,t)) = \lambda(ECQ(s,t)) = s+1(s \leqslant t)$。为了更好地测量 $ECQ(s,t)$ 的稳定性和容错能力，本文引入了超连通度的概念，证明了交换交叉立方网 $ECQ(s,t)$ 的超点连通度和超边连通度均是 $2s$，即定理 2：$\kappa'(ECQ(s,t)) = \lambda'(ECQ(s,t)) = 2s(s \leqslant t)$。考虑到超连通度能够更加精准的衡量网络的稳定性和容错能力，基于本文成果，当交换交叉立方网 $ECQ(s,t)$ 用于构建大型并行处理机时具有比较高的稳定性和容错能力。

参考文献

[1] Esfahanian A H. Generalized measures of fault tolerance with application to n-cube networks. *IEEE Transactions on Computers*, 1989, 38(11): 1586-1591

[2] Ma M. The connectivity of exchanged hypercubes. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 2010, 2(2): 213-220.

[3] Loh P K K, Hsu W J, Pan Y. The exchanged hypercube. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2005, 16(9): 866-874

[4] Li X J, Xu J M. Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes. *Information Processing Letters*, 2013, 113(14): 533-537

[5] Ma M J, Zhu L Y. The super connectivity of exchanged hypercubes. *Information Processing Letters*, 2011, 111(8): 360-364

[6] Kulasinghe P D. Connectivity of the crossed cube. *Information Processing Letters*, 1997, 61(4): 221-226

[7] Efe K. The crossed cube architecture for parallel computation. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1992, 3(5): 513-524

[8] Xu J M, Wang J W, Wang W W. On super and restricted connectivity of some interconnection networks. *Ars Combin*, 2010, 94(1): 25-32

[9] Yang M C. Super connectivity of balanced hypercubes. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 219(3): 970-975

[10] Zhu Q, Xin-Ke Wang, Cheng G L. Reliability evaluation of BC networks. *IEEE Transactions on Computers*, 2013, 62(11):2337-2340

[11] Chen Y. Super connectivity of k-regular interconnection networks. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(21): 8489-8494

[12] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, 1988, 37(7): 867-872

[13] Tzeng N F, Wei S. Enhanced hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, 1991, 40(3): 284-294

[14] Zhou J X, Wu Z L, Yang S C, et al. Symmetric property and reliability of balanced hypercube. *IEEE Transaction on computers*, 2015, 64(3): 876-881

[15] Yang W L, Lin H Q. Reliability Evaluation of BC networks in terms of the extra vertex- and edge-connectivity. *IEEE transactions on computers*, 2014, 63(10):2540-2548

[16] Chang N W, Tsai C Y, Hsieh S Y. On 3-extra connectivity and 3-extra edge connectivity of folded hypercubes. *IEEE transaction on computers*, 2014, 63(6):1593-1599

[17] Li K, Mu Y, Li K, et al. Exchanged crossed cube: a novel interconnection network for parallel computation. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2013, 24(11): 2211-2219

On reliability of exchanged crossed cube

Ma Qiang*, Liang Jiarong*, Xiong Xi*, Guo Chen**

(*School of Computer and Electronics Information, Guangxi University, Nanning 530004)

(**School of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004)

Abstract

Aiming at the limitation of the traditional connectivity-based method for reliability analysis of exchanged crossed cube networks, the study presented a new reliability analysis method using super connectivity, because the use of super connectivity can more accurately measure the stability and the fault-tolerance of interconnection networks. The study demonstrated that the connectivity and the edge-connectivity of exchanged crossed cube networks are all $s+1$ ($s \leqslant t$) based on investigation of the topology of the networks. Furthermore, it was also demonstrated that the super connectivity and the super edge-connectivity of exchanged crossed cube networks are all $2s$ ($s \leqslant t$), that is, the removal of at least 2s vertices (or 2s edges) of exchanged crossed cube networks disconnects exchanged crossed cube networks and every component contains no isolated vertex. When $ECQ(s,t)$ is used to model the topological structure of a large-scale parallel processing system, these results can provide more accurate measurements for reliability and fault tolerance of the system.

Key words: interconnection network, connectivity, edge-connectivity, exchanged crossed cubes ($ECQ(s,t)$), super connectivity, super edge-connectivity