

# 基于状态反馈线性化的单相全桥逆变器的最优控制<sup>①</sup>

谢 维<sup>②\*</sup> \*\* 段建民\*

(\* 北京工业大学北京市交通工程重点实验室 北京 100124)

(\*\* 北京电子科技职业学院 北京 100176)

**摘要** 基于二次型最优控制与状态反馈线性化方法,提出了一种新型的非线性控制单相逆变器的策略。建立了非线性仿射的单相全桥逆变器模型。利用精确线性化状态反馈的方法,推导了非线性状态反馈,并对非线性系统表达式进行了线性化。基于无源控制理论,提出了一种二次型性能指标,利用二次型最优控制优化了状态反馈系数的设计。该控制系统具有成本低,结构简单,易于采用数字信号处理技术实现的特点。基于该控制方法的系统无稳态误差输出,对负载扰动具有强鲁棒性,且输出电压谐波畸变率较小。

**关键词** 状态反馈, 精确线性化, 单相全桥逆变器, 最优控制

## 0 引言

逆变器是一种将直流电转变成交流电的装置,它由逆变桥、控制电路和滤波电路构成。单相恒压恒频(CVCF)逆变器一般应用于对电源质量要求很高的场合,如金融部门、通信系统、医疗中心等。当前逆变器主要采用滑模控制、无差拍控制、重复控制、双闭环控制等控制方案<sup>[1-5]</sup>。重复控制方案虽然可以消除相位与幅值的稳态误差,但其动态响应不好,且会出现一个输出周期的延迟。双闭环控制的波形失真小、控制的设计简单且动态响应快,但是输出电压存在一定相位误差与幅值稳态误差。PID 电压型逆变电源控制方案的控制器的结构比电压、电流双环控制简单一些,但是它存在选择较复杂、控制系统参数较多的问题。近 20 年来,基于微分几何发展起来的精确线性化方法受到了相当重视。非线性系统通过适当的非线性反馈与状态变换,可以实现输入/输出、及状态的精确线性化,可以把非线性复杂系统的综合问题转化成线性系统的综合问题。

本研究把精确线性化状态反馈方法应用到了单相全桥逆变器上,建立了适合于微分几何方法的单相全桥逆变器的仿射非线性模型。本研究在理论证明了建立的系统模型可以满足精确线性化状态反馈的对合条件与能控条件,而且推导了状态反馈非线性控制律,实现了原系统的精确线性化状态反馈。基于无源控制理论的原理,提出了二次型的一种性能指标,推导出加权矩阵  $Q$ ,并且采用二次型最优控制,优化设计了其状态反馈系数。

## 1 仿射非线性的单相全桥逆变器模型

图 1 所示为单相全桥逆变器的主电路结构图。在图中,  $U_{in}$  是直流输入电压,  $i_L$  是电感电流,  $U_c$  是输出电压, 低通滤波器由电容  $C$  与电感  $L$  构成,  $R_L$  是等效阻性负载。

由基尔霍夫电压电流定律,可列出状态方程为

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = U_{in} - u_c \\ C \frac{du_c}{dt} = i_L - \frac{1}{R_L} u_c \end{cases} \quad Q_1, Q_4 \text{ 闭合} \quad (1)$$

① 北京市教委科技计划面上项目(KM201510858004)和北京电子科技职业学院重点课题(YZKB2014008)资助项目。

② 男,1971 年生,博士,教授;研究方向:智能控制,信息处理,新能源发电等;联系人,E-mail: xiew\_bj@hotmail.com

(收稿日期:2015-04-01)

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = -U_{in} - u_c \\ C \frac{du_c}{dt} = i_L - \frac{1}{R_L} u_c \end{cases} \quad Q_2, Q_3 \text{ 闭合} \quad (2)$$

令  $Q_1, Q_4$  导通时,  $u = 1$ ;  $Q_2, Q_3$  导通时,  $u = 0$ 。由于在一个开关周期内  $Q_2, Q_3$  与  $Q_1, Q_4$  互补导通, 则上述的  $u$  即为开关  $Q_1, Q_4$  占空比。可以把式(2)和式(1)合并写为

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = -u_c + (2u - 1) U_{in} \\ C \frac{du_c}{dt} = i_L - \frac{1}{R_L} u_c \end{cases} \quad (3)$$

如果选状态变量  $x = (x_1, x_2) = (i_L, u_c)$ , 输出变量是  $y = h(x) = x_2 - u_{ref}$ , 得到适于微分几何方法的单输入单输出的仿射非线性单相全桥逆变器的模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) = x_2 - u_{ref} \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L}(x_2 + U_{in}) \\ \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_L C}x_2 \end{pmatrix}; g(x) = \begin{pmatrix} \frac{2U_{in}}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$

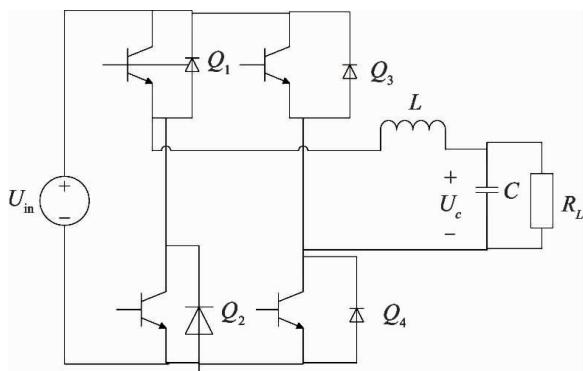


图 1 单相全桥逆变器的结构图

## 2 非线性控制的单相全桥逆变器系统设计

### 2.1 精确线性的状态反馈

**定义 1:** 假设  $\forall x \in \Omega$ , 若

$$\begin{cases} L_g L_f^i h(x) = 0 \\ L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \end{cases} \quad 0 \leq i < r-1 \quad (5)$$

那么单输入-单输出系统就称为在  $\Omega$  上具有相对阶

$r$ 。

**定理 1:** 如果  $f(x)$  和  $g(x)$  为光滑矢量场, 非线性系统(式(4))为可精确线性化状态反馈的, 当且仅当使得下列条件成立的一个区域  $\Omega$  存在:

(1)  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  集合在  $\Omega$  上对合。

(2)  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  矢量场在  $\Omega$  上线性无关。

如满足, 则必有一个输出函数  $h(x)$  存在, 使该系统在区域  $\Omega$  上, 其相对阶  $r$  与系统阶数  $n$  相等<sup>[6-10]</sup>。

按照微分几何的理论, 对式(4)非线性系统可以求以下的李导数:

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = 0 \quad (6)$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_L C}x_2 \quad (7)$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{2}{LC} U_{in} \neq 0 \quad (8)$$

$$L_f^2 h(x) = -\frac{x_1}{R_L C^2} - \frac{x_2}{LC} + \frac{x_2}{R_L^2 C^2} - \frac{U_{in}}{LC} \quad (9)$$

从而知道, 该系统关系度  $r = 2 =$  系统维数。

另外由于

$$ad_f g(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2U_{in}}{LC} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{而矩阵 } (g(x) \ ad_f g(x)) = \begin{pmatrix} 2U_{in}/L & 0 \\ 0 & -2U_{in}/LC \end{pmatrix} \text{ 的秩}$$

是 2, 条件(2)也满足。故可得到结论: 式(4)非线性系统单相全桥逆变器能依靠状态反馈与坐标变换, 来对原系统实现精确线化的状态反馈。

可如下定义非线性坐标变换:

$$\xi = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (11)$$

在新的坐标系下, 式(4)所示系统可表示为

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (12)$$

该坐标系下,式(4)所示系统的状态反馈律是:

$$u = \frac{-L_f^2 h(x) + v}{L_g L_f h(x)} \quad (13)$$

式中,  $v$  是线性系统通过坐标变换后的新输入。

## 2.2 基于无源理论的二次型最优控制性能指标 $R$ 与 $Q$ 矩阵的选择

通过式(11)非线性坐标变换与式(13)状态反馈律,式(4)非线性仿射系统就转化成了式(12)线性系统,从而非线性系统的综合问题则转换成线性系统综合问题。

按照二次型的最优控制理论,线性定常系统是:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi(t) + Bv(t) \\ \xi(t_0) = \xi_0 \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

二次型的性能指标是:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\xi^T Q \xi + v^T R v) dt \quad (15)$$

式中,  $R$  是正定的对称矩阵;  $Q$  是正定或半正定的对称矩阵。

式(15)性能指标中,第1项显示控制过程中与终端时刻的状态误差接近为0,而第2项为对控制幅度进行限制。

欲使性能指标函数最小,那么最优控制为

$$v = -K\xi \quad (16)$$

增益反馈矩阵为

$$K = B^T P \quad (17)$$

式中  $P$  为瑞卡提代数方程  $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T + Q = 0$  的对称正定解。

控制系统无源性为稳定性概念的扩展,它包含了闭环系统稳定性。稳定性可以认为是无源性的一种特殊情况,李亚普稳定性理论正是在无源性概念基础上发展而来的。无源性控制理论的基本思想是:设计控制器时,采取注入所需阻尼项的方式,对系统能量耗散方程中的“无功力”进行适当配置,强迫系统的总能量追踪预期能量函数,而使闭环控制系统为无源。因此,系统输出误差保证能渐近稳定到零点,从而系统状态变量能渐近收敛到期望值<sup>[11-15]</sup>。

基于无源性控制理论,可构造闭环系统储能函数  $H$ ,采用使所期望的闭环系统储能函数无源,以达到控制的目标。用加权误差(状态稳定)的平方积分  $I_B$  来衡量系统的性能。经过比较发现,加权误差平方积分  $I_B$  与二次型性能指标  $J$  是完全相似的。所以,本研究基于无源性理论来构建闭环系统能量函数:

$$H = \xi^T Q \xi = \frac{1}{2} L \Delta i_L^2 + \frac{1}{2} C \Delta u_c^2 \quad (18)$$

从式(11)得到:

$$\begin{cases} \xi_1 = h(x) = x_2 - u_{ref} = \Delta u_c \\ \xi_2 = L_f h(x) = \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_L C} x_2 = \frac{1}{C} \left( \Delta i_L - \frac{\Delta u_c}{R_L} \right) \\ \Delta i_L = x_1 - \frac{u_{ref}}{R_L} \end{cases} \quad (19)$$

进一步写为矩阵的形式:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_L C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta i_L \\ \Delta u_c \end{pmatrix} \quad (20)$$

进而与式(15)对应的  $Q$  为

$$Q = \begin{pmatrix} \left( \frac{L}{2R_L^2} + \frac{C}{2} \right) & \frac{LC}{2R_L} \\ \frac{LC}{2R_L} & \frac{LC^2}{2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

权矩阵可以选为

$$R = T(LC)^2 \quad (22)$$

把  $A$ 、 $B$  矩阵及式(21)、(22)一起代入瑞卡提代数方程,就可求解出反馈增益矩阵  $K$  与矩阵  $P$ 。再把得出的反馈增益矩阵  $K$  代入式(13)、(16),可以进一步求出式(2)原非线性系统的反馈控制律  $u$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{LC}{2U_{in}} \left[ \frac{1}{R_L C^2} x_1 - \left( -\frac{1}{LC} + \frac{1}{R_L^2 C^2} \right) x_2 + \frac{1}{LC} U_{in} + v \right] \\ &= \frac{LC}{2U_{in}} \left[ \frac{1}{R_L C^2} x_1 - \left( -\frac{1}{LC} + \frac{1}{R_L^2 C^2} \right) x_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{LC} U_{in} - k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

根据上述分析,可以绘制出如图 2 所示的控制系统原理框图。

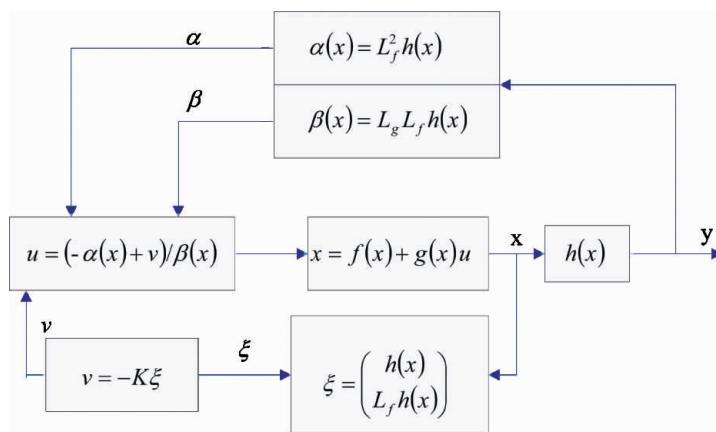


图 2 控制系统原理框图

### 3 系统仿真结果

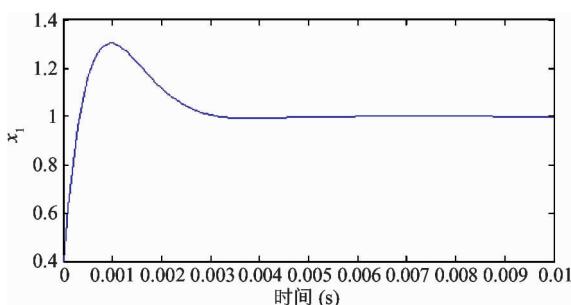
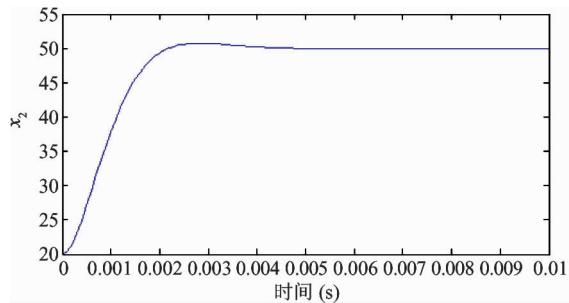
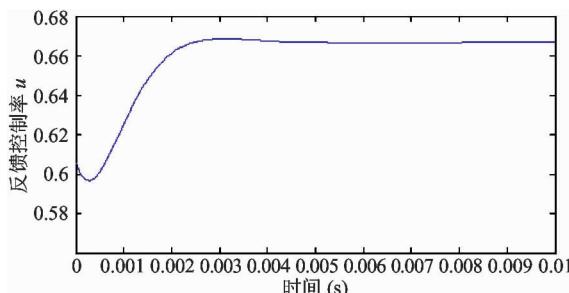
#### 3.1 状态与反馈系数仿真结果

对系统采用 Matlab 软件进行仿真, 设定的系统参数如下: 输入电压为  $U_{in} = 150V$ ; 输出工频电压为  $uref$ , 其峰值为 50V; 开关频率为  $fs = 10kHz$ ; 额定负载为  $R_L = 50\Omega$ ; 输出电容为  $C = 28.2\mu F$ , 输出滤波电感为  $L = 5mH$ 。

把以上的系统参数均代入式(21)、(22), 使用 Matlab 的指令  $K = lqr(A \ B \ Q \ R)$ , 求解出反馈增益矩阵  $K = (k_1 \ k_2)^T = (2860100 \ 2600)^T$ 。

通过 MATLAB 编写程序, 运行 MATLAB 的 M 文件得到系统仿真图形如图 3~图 5 所示。

由以上 3 图可知原非线性系统经过精确反馈线性化后性能得到很好的改善, 反馈控制率  $u$  的最优曲线能够绘制出来, 反馈控制率最终会稳定在 0.67 左右。经过反馈线性化将非线性系统转化成了线性

图 3 线性化最优  $x_1 = i_L$  曲线图 4 线性化最优  $x_2 = u_c$  曲线图 5 线性化最优反馈控制率  $u$  曲线

系统进行处理, 然后又利用二次型的最优控制绘出了最优曲线。使得系统具有良好的稳态性能和动态性能。

#### 3.2 交流输出仿真运行结果

##### 3.2.1 负载稳态响应仿真

在额定负载条件下, 负载电流与输出电压的运行波形如图 6 所示, 其中负载电流放大了 10 倍显示以方便观察。通过快速傅氏变换分析,  $i_{THD}$  仅 0.97%。可以看出采用文中所提控制方案, 单相全桥逆变器谐波畸变率小, 输出稳定, 其输出交流量的幅

值和频率都没有稳态误差。

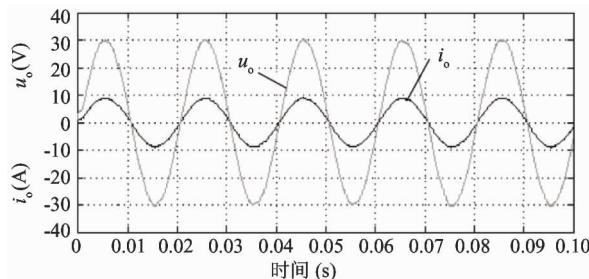
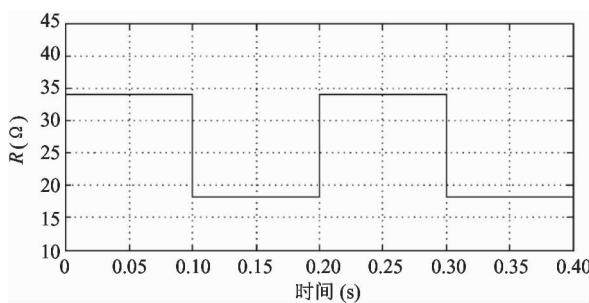


图 6 负载输出电压、电流响应曲线

### 3.2.2 瞬态响应仿真

图 7 所示为周期性地在额定  $34\Omega$  负载上来回投切到  $18\Omega$  负载的系统响应曲线分析,图 7(a)是输出负载的变化曲线,图 7(b)是相应的负载电流与输出电压波形。从图 7 中可以看到,利用二次型最优控制及状态反馈线性化的方式,当负载发生突变时,负载电流能迅速地响应,平滑地过渡到新稳定状态运行;而输出电压波形稳定,凸显出其抗负载扰动性很强。



(a) 负载变化波形

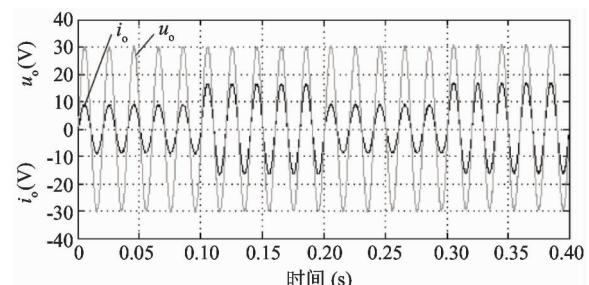


图 7 负载发生突变的瞬态响应曲线

## 4 结论

单相全桥逆变器的设计在实际的工业过程中是非常有意义的,因此它也在实际生产中得到了广泛的应用。文中把状态反馈精确线性化方案应用到了单相全桥逆变器的设计中。把非线性系统转换为线性系统进行研究,使得对系统的研究变得更加简单。通过建立系统的非线性仿射模型,并进一步求解了状态反馈控制律  $u$  与非线性坐标变换矩阵  $K$ ,完成了对原非线性系统进行精确线性化。基于无源性控制理论的方法,提出一种二次型性能指标,利用二次型最优控制对状态反馈系数  $u$  进行优化。通过 Matlab 软件仿真验证了通过状态反馈线性化的方法对非线性系统进行线性化有良好的控制效果,且证明了其可行性、实用性。通过采用该方法,使控制系统具有良好的动态与稳态特性。

### 参考文献

- [1] 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用. 北京: 国防工业出版社, 2005. 70-110
- [2] 龚会茹, 易灵芝, 沈建飞. 基于最优控制的快速光伏并网孤岛检测研究. 电源技术, 2014, 38(4): 694-646,
- [3] 于长官. 现代控制理论及应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2007. 190-200
- [4] 卢伟国, 栗安鑫, 赵乃宽等. 改进的 Lyapunov 直接法控制单相 Buck 型逆变器. 电机与控制学报, 2014, 18(7): 18-23
- [5] 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 2002. 22-31
- [6] 董峰斌, 钟彦儒. 三相电压型逆变器的精确线性化控制. 电工技术学报, 2013, 28(10): 143-149
- [7] 熊健, 周亮, 张凯等. 一种高性能的单相逆变器多环控制方案. 电工技术学报, 2006, 21(12): 78-82
- [8] 陆明科, 揭贵生, 王恒利等. 基于线性二次型调节器的三相逆变器积分状态反馈控制. 电网技术, 2013, 37(7): 1941-1947
- [9] 邓卫华, 张波, 丘东元等. 三相电压型 PWM 整流器状态反馈精确线性化解耦控制研究. 中国电机工程学报, 2005, 25(7): 97-103

- [10] 王恒利,付立军,揭贵生等. 采用比例谐振和状态反馈的三相逆变器最优控制. 西安交通大学学报,2013,47(8):127-132
- [11] 高朝晖,林辉,张晓斌. Boost 变换器带恒功率负载状态反馈精确线性化与最优跟踪控制技术研究. 中国电机工程学报,2007,27(13): 70-75
- [12] 董峰斌,钟彦儒. 基于状态反馈精确线性化的三相四桥臂逆变器的控制. 信息与控制,2012,41(5):544-
- [13] 孙孝峰,魏坤,邬伟扬等. 三相变流器最优控制研究. 中国电机工程学报,2004,24(7):168-172
- [14] 张平化,杨贵杰,李铁才. 三相 PWM 整流器的反馈线性化直接电压控制. 中国电机工程学报,2010,30(18):39-46
- [15] 解学书. 最优控制——理论与应用. 北京:清华大学出版社,1986:27-60

## Optimal control of single-phase full bridge inverters based on state-feedback linearization

Xie Wei<sup>\* \*\*\*</sup>, Duan Jianmin<sup>\*</sup>

(<sup>\*</sup> Beijing Key Laboratory of Traffic Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

(<sup>\*\*</sup> Beijing Polytechnic, Beijing 100176)

### Abstract

Based on the state-feedback linearization and the optimal control of quadratic type, a new nonlinear control strategy for single-phase inverters was proposed. The affine nonlinear model for single-phase full bridge inverters was established. By using the method for exact linearization of state feedback, the nonlinear state feedback expression was derived, and the linearization of nonlinear systems was realized. According to the passivity-based control idea, a performance index of quadratic form was put forward, and the design of the state feedback coefficient was optimized by the quadratic form optimal control. The proposed control system has the advantages of low cost, simple structure, and easy to implement by digital signal processing, which makes an inverter system have the advantages of no steady state error, strong robustness to load disturbance, and small harmonic distortion rate in output voltage.

**Key words:** state feedback, exact linearization, single-phase full bridge inverter, optimal control