

# 分析基于失效概率的矩独立重要性测度的单层密度权重法<sup>①</sup>

赵录峰<sup>②</sup> 范冰洁 吴亚荣

(空军工程大学装备管理与安全工程学院 西安 710051)

**摘要** 为了有效地分析结构系统输入变量不确定性对结构系统失效概率的影响程度,研究了对基于失效概率的矩独立重要性测度的计算,并基于单层 Monte Carlo 计算法和密度权重计算法,建立了准确、高效求解失效概率矩独立重要性测度的单层密度权重法。工程算例表明,与已有的计算方法相比,该方法仅需较少的模型计算量就能得到足够准确的结果,极大地提高了计算效率,且具有很好的工程适用性。

**关键词** 矩独立, 权重, 重要性测度, 失效概率, 概率密度函数

## 0 引言

基于失效概率的矩独立重要性测度能较好地反映结构系统输入变量的随机不确定性对结构系统失效概率的影响程度,通过对矩独立重要性测度的分析不仅可以估计出某变量单独作用对结构系统失效概率的贡献程度,而且也可以估计出该变量与其它变量的共同作用对结构系统失效概率的贡献程度。然而,对矩独立重要性测度的计算量往往很大,无法直接应用于工程实际,尤其是针对一些具有隐式功能的复杂模型。针对这种情况,本文利用了单层 Monte Carlo 法和密度权重法的优点,提出了一种分析基于失效概率的矩独立重要性测度的单层密度权重方法,该方法能够准确、高效地求解矩独立重要性测度,其有效性和优越性通过两个算例得到了验证。

## 1 相关研究

进行矩独立重要性分析必然会涉及到灵敏度分析(sensitivity analysis)<sup>[1]</sup>。灵敏度分析是研究和分析一个系统或结构的性能或输出响应量对输入参数

的敏感程度。灵敏度通常可以分为两类:局部灵敏度和全局灵敏度。局部灵敏度定义为失效概率关于输入变量分布参数的偏导数,所以在考虑某个变量的灵敏度时不能同时考虑其他变量产生的影响。而全局灵敏度可以衡量输入变量整个不确定性对模型输出不确定性的影响,并基于影响程度的大小对输入变量进行重要性排序,因此也称为重要性测度。有了输入变量的重要性排序结果,就可以在设计和优化中着重考虑重要性程度高的变量而忽略重要性程度低的变量,为工程设计和优化提供指导。基于以上原因,学者们提出了许多重要性测度指标以分析输入变量的重要性。Sobol<sup>[2]</sup> 和 Saltelli<sup>[3]</sup> 分别提出了各自基于方差的重要性测度指标(variance-based importance measure)以衡量输入变量的不确定性对模型输出的影响。但是这一重要性分析方法隐含地假设了变量的方差能够充分地描述模型输出变量的分布特性<sup>[4]</sup>,然而随机变量的任何矩都只提供了其分布的一方面信息,随机量被其任一阶矩来替代都不可避免地会带来其分布信息的损失。为了反映输入变量对整个输出分布的影响,Liu 等<sup>[5]</sup> 和 Borgonovo<sup>[6]</sup> 提出了相应的矩独立重要性测度指标(moment-independent importance measure)。在可靠

<sup>①</sup> 国家自然科学基金(71401174)资助项目。

<sup>②</sup> 男,1973 年生,博士生,讲师;研究方向:装备安全工程;联系人,E-mail: zlf315611@126.com  
(收稿日期:2014-10-11)

性研究问题中,小失效概率的计算大多牵涉到输出响应函数分布尾部的问题,因而输入变量对输出响应函数分布的影响程度并不能完全等同于输入变量对模型失效概率的影响程度。基于以上原因,文献[7]和文献[8]分别提出和发展了基于失效概率的矩独立重要性测度指标以分析输入变量的不确定性对结构失效概率的影响。

灵敏度分析的另一重要组成部分是计算方法的研究,计算方法的好坏直接影响到求解的效率和结果的精度。目前,许多学者致力于寻求和发展合理、高效的方法以计算矩独立的重要性测度指标。最初,Borgonovo 提出了基于概率密度函数的方法计算矩独立指标,这种方法是一种计算量非常大的双重循环模拟法,而且该方法的准确性受到模型输出的无条件和条件概率密度函数交点的求解准确性的影  
响<sup>[6]</sup>。另外,Borgonovo 等还提出了用替代模型描述输入输出关系,然后基于替代模型计算矩独立重要性测度指标<sup>[9]</sup>。这种方法可以极大地提高计算效率,但是它的估计精度依赖于替代模型的精确性。如果输入-输出映射含有高阶非线性交叉关系,替代模型可能无法正确表达原模型的结构特性。文献[10]在单层 Monte Carlo 法<sup>[2]</sup>的基础之上发展出了单层重要抽样法和单层截断重要抽样法,在保证精度的条件下提高了计算效率。但是,这两种方法在计算高维小失效概率时所需的样本数仍然很大,所以亟需引入更加高效的计算方法以减小样本数和模型计算量。文献[11]提出了一种高效近似失效概率的方法,该方法能有效地降低可靠性模型的计算量,为高维小失效概率的计算提供了一种新思路。本文通过进一步研究,将单层 Monte Carlo 法和文献[11]提出的密度权重法相结合,提出了分析基于失效概率的矩独立重要性测度的单层密度权重法,为矩独立重要性测度分析提供了一条新途径。

本文首先回顾了基于失效概率的矩独立重要性测度指标,然后以文献[2]提出的单层 Monte Carlo 法和文献[11]提出的密度权重法为基础,提出了基于失效概率的矩独立重要性分析方法——单层密度权重法。最后,给出了两个工程算例,通过与现有方法的比较以验证所提算法的可行性和优越性。

## 2 矩独立重要性测度的回顾

假设所研究的结构或系统的模型功能函数为  $g(\mathbf{x})$ , 其中  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  是随机输入变量向量,其联合概率密度函数为  $f(\mathbf{x})$ 。本文假设输入变量之间是相互独立的,则

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (1)$$

式中,  $f_i(x_i)$  是变量  $x_i$  的边缘概率密度函数。

假设失效域指示函数为

$$I_F(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in F \\ 0, & \mathbf{x} \notin F \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $F = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0\}$  是由结构系统模型功能函数定义的失效域,那么该结构的失效概率就能如下表示:

$$P_{f_Y} = E(I_F) = \int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_F f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

式中,  $E(\cdot)$  为期望求解算子。

为了分析输入变量  $x_i$  在其分布域内变化时对结构模型失效概率的影响程度,文献[7]在文献[6]的基础上发展出了一个矩独立重要性测度指标如下:

$$\delta_i^P = E(P_{f_Y} - P_{f_{Y|x_i}})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (P_{f_Y} - P_{f_{Y|x_i}})^2 f_{x_i}(x_i) dx_i \quad (4)$$

式中,  $P_{f_{Y|x_i}}$  是输入变量  $x_i$  的条件失效概率。

文献[8]证明了

$$\delta_i^P = E(P_{f_Y} - P_{f_{Y|x_i}})^2 = V(E(I_F | x_i)) \quad (5)$$

式中  $V(\cdot)$  为方差求解算子。

很明显,式(5)是一个矩独立重要性测度指标,但是如果把指示函数  $I_F$  看作是结构模型的输出量,那么式(5)也等于 Sobol 的基于方差的全局灵敏度指标<sup>[2]</sup>。基于以上原因,文献[10]定义了基于失效概率的矩独立重要性测度指标,也称为主效应指标  $S_i$  和总效应指标  $S_{Ti}$ :

$$S_i = \frac{V(E(I_F | x_i))}{V(I_F)} \quad (6)$$

$$S_{Ti} = 1 - \frac{V(E(I_F | \mathbf{x}_{-i}))}{V(I_F)} = \frac{E(V(I_F | \mathbf{x}_{-i}))}{V(I_F)} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{x}_{\sim i}$  为包含除了  $x_i$  以外所有输入变量的向量。主效应  $S_i$  表征了变量  $x_i$  单独作用时对结构失效概率的贡献,而总效应  $S_{Ti}$  为  $x_i$  的不确定性对结构失效概率的总影响程度,包含与其他所有变量的交互作用贡献。

根据全期望公式,可以得到

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{V(E(I_F | \mathbf{x}_i))}{V(I_F)} \\ &= \frac{E(E^2(I_F | \mathbf{x}_i)) - E^2(E(I_F | \mathbf{x}_i))}{P_f - P_f^2} \\ &= \frac{E(E^2(I_F | \mathbf{x}_i)) - P_f^2}{P_f - P_f^2} = \frac{D_i - P_f^2}{D} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_{Ti} &= 1 - \frac{V(E(I_F | \mathbf{x}_{\sim i}))}{V(I_F)} \\ &= 1 - \frac{E(E^2(I_F | \mathbf{x}_{\sim i})) - E^2(E(I_F | \mathbf{x}_{\sim i}))}{P_f - P_f^2} \\ &= 1 - \frac{E(E^2(I_F | \mathbf{x}_{\sim i})) - P_f^2}{P_f - P_f^2} = 1 - \frac{D_{\sim i} - P_f^2}{D} \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $D = V(I_F) = P_f - P_f^2$ ,  $D_i = E(E^2(I_F | \mathbf{x}_i))$ ,  $D_{\sim i} = E(E^2(I_F | \mathbf{x}_{\sim i}))$ 。

从上述内容可以看出,计算  $S_i$  和  $S_{Ti}$  需要先计算  $P_f$ ,  $D_i$  和  $D_{\sim i}$ , 第 3 节将介绍具体的求解上述量的方法。

### 3 基于失效概率的矩独立重要性测度的求解

#### 3.1 基于密度权重的可靠性分析

本节采用基于密度权重的方法估计失效概率  $P_f$ 。由于  $\int_{R^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ , 因此式可以表示为

$$P_f = \frac{\int_{R^n} I_F(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{R^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (10)$$

若采用 Monte Carlo 法计算式(3)所表示的失效概率,计算量将会很大。Monte Carlo 法之所以计算效率低是由于计算时采用了伪随机序列抽样,其误差阶的平均数量级是  $O(N^{-1/2})$ , 其中  $N$  为抽样样本数。因此若要提高一位数字的精度, Monte Carlo 法就要增加百倍的工作量。而计算若是采用确定性的

低偏差样本代替伪随机数序列样本,误差阶将降低为  $O(N^{-1} (\lg N)^{n-1})$ , 其中  $n$  为问题变量的维数,可渐进近似为  $O(N^{-1})$ 。低偏差样本点除去了随机数的偶然性,更致力于均匀性,从而极大地改善了抽样点的质量,计算效率也因此大大提高。此外,具有均匀性的样本还可以保证在结构失效概率很小的情况下有更多的点落入失效域中,从而在样本量较少的情况下也能得到近似解。

在可靠性分析中,对变量选择合适的区间,然后在区间中利用低偏差抽样抽取  $N$  组样本,那么失效概率即可通过下式估计:

$$P_f = \frac{\sum_{k=1}^N I_F(\mathbf{x}_k) W_k}{\sum_{k=1}^N W_k} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{x}_k$  为第  $k$  组样本,  $W_k = f(\mathbf{x}_k)$  定义为样本点  $\mathbf{x}_k$  的权重,  $f(\mathbf{x}_k)$  为样本点  $\mathbf{x}_k$  的联合概率密度函数。不难看出,式(11)为式(10)的估计式,因此确保了所求结果收敛于准确解。本文采用确定性的低偏差均匀抽样,如 Sobol 序列<sup>[2]</sup>, 计算效率高,无需重复计算,效果更好。

#### 3.2 计算矩独立重要性测度的单层密度权重法

3.1 节采用密度权重法可以估计出结构的失效概率,因此估算结构模型的矩独立重要性测度指标  $S_i$  和  $S_{Ti}$  可以归结为估算  $D_i$  和  $D_{\sim i}$ 。文献[10]给出的估计  $D_i$  和  $D_{\sim i}$  的积分表达式为

$$D_i = \int \cdots \int I_F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot I_F(x'_1, \dots, x_i, \dots, x'_n)$$

$$\prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (f_j(x'_j) dx'_j) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_{\sim i} &= \int \cdots \int I_F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot I_F(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \\ &\quad \prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) f_i(x'_i) dx'_i \end{aligned} \quad (13)$$

由于  $\int \cdots \int \prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) \prod_{j=1}^n (f_j(x'_j) dx'_j) = 1$  和  $\int f_i(x'_i) dx'_i = 1$ , 并且结合上述基于密度权重的可靠性分析方法可以得到:

$$\begin{aligned} D_i &= \int \cdots \int I_F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot I_F(x'_1, \dots, x_i, \dots, x'_n) \\ &\quad \prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) \prod_{j=1}^n (f_j(x'_j) dx'_j) / \end{aligned}$$

$$\int \cdots \int \prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) \prod_{j=1}^n (f_j(x'_j) dx'_j) \quad (14)$$

$$D_{\sim i} = \int \cdots \int I_F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot I_F(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \quad (15)$$

$$\prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) \prod_{j=1}^n (f_j(x'_j) dx'_j) / \int \cdots \int \prod_{j=1}^n (f_j(x_j) dx_j) \prod_{j=1}^n (f_j(x'_j) dx'_j) \quad (15)$$

定义权重  $W_D = \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \prod_{j=1}^n f_j(x'_j)$ 。根据各变量的区间, 分别生成两个  $N$  组低偏差均匀样本, 即  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  和  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_N\}$ , 式(14)和(15)可以通过下式进行估计:

$$\hat{D}_i = \frac{\sum_{k=1}^N I_F(x_{ki}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{kn}) \cdot I_F(x'_{ki}, \dots, x'_{ki}, \dots, x'_{kn}) \cdot W_{D_k}}{\sum_{k=1}^N W_{D_k}} \quad (16)$$

$$\hat{D}_{\sim i} = \frac{\sum_{k=1}^N I_F(x_{ki}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{kn}) \cdot I_F(x_{ki}, \dots, x'_{ki}, \dots, x_{kn}) \cdot W_{D_k}}{\sum_{k=1}^N W_{D_k}} \quad (17)$$

式中,  $x_{ki}$  和  $x'_{ki}$  分别代表向量  $x_k$  和  $x'_k$  的第  $i$  个元素,  $W_{D_k}$  为  $x_k$  和  $x'_k$  对应的密度权重。

综上所述, 将以上估计的  $\hat{P}_f$ 、 $\hat{D}_i$  和  $\hat{D}_{\sim i}$  代入式(8)和式(9)就可以方便地估计出基于失效概率的矩独立重要性测度, 而无需采用多层积分。本文将采用区间均匀抽样和单层 Monte Carlo 法<sup>[2]</sup>实现上述的单层密度权重法, 其具体的计算步骤如下:

**步骤 1:** 选择合适的区间。在选择每个变量的区间时, 有两种方法可供选择: 一种是, 根据变量  $x_j$  的概率密度函数  $f_j(x_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), 通过简单随机抽样法抽取一定量的样本, 然后以样本中的最大、最小值作为此变量的区间上下界; 另一种是, 根据变量  $x_j$  的分布函数  $F_j(x_j)$  求得区间。假设对变量  $x_j$  所选区间需包含其分布的  $(1 - 2\alpha)\%$  的数据, 则  $x_j$  的区间为  $[F_j^{-1}(\alpha), F_j^{-1}(1 - \alpha)]$  ( $0 \leq \alpha \leq 0.5$  为实数)。以一个包含二维变量的问题为例, 变量  $x_1, x_2$  服从正态分布, 即  $x_1 \sim N(2, 1^2)$ ,  $x_2 \sim N(1, 2^2)$ , 要使所选  $x_1, x_2$  的区间能涵盖其分布 99.99% 的数

据, 则变量  $x_1$  的区间为  $[F_1^{-1}(0.00005), F_1^{-1}(0.99995)]$ 。图 1 所示为  $x_1$  概率密度函数图, 阴影部分表示的概率为 0.9999。经过转化进一步得到  $x_1$  区间具体为  $[-1.9, 5.9]$ , 同理可得  $x_2$  区间为  $[-6.8, 8.8]$ 。

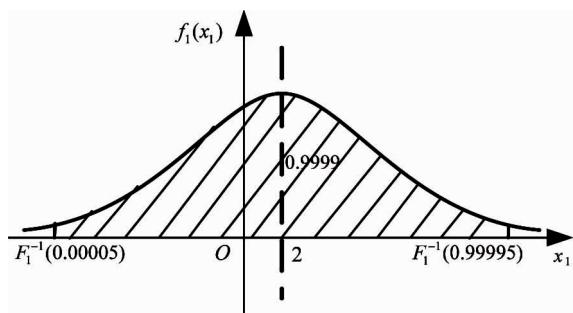


图 1  $x_1$  的概率密度函数图

**步骤 2:** 采用 Sobol 提出的单层 Mone Carlo 法<sup>[2]</sup> 计算主效应和总效应。通过步骤 1 中的方法得到各变量  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 的区间后, 无论变量服从何种分布, 均在变量的区间中采用 Sobol 序列<sup>[2]</sup> 进行低偏差均匀抽样, 得到  $2N$  组样本, 并把它们分别放在两个样本矩阵中。那么可以得到:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_i^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_i^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \cdots & x_i^{(N)} & \cdots & x_n^{(N)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_1^{(N+1)} & x_2^{(N+1)} & \cdots & x_i^{(N+1)} & \cdots & x_n^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & x_2^{(N+2)} & \cdots & x_i^{(N+2)} & \cdots & x_n^{(N+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(2N)} & x_2^{(2N)} & \cdots & x_i^{(2N)} & \cdots & x_n^{(2N)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

用矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  列替代矩阵  $\mathbf{B}$  的第  $i$  列可以得到矩阵

$$\mathbf{C}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(N+1)} & x_2^{(N+1)} & \cdots & x_i^{(1)} & \cdots & x_n^{(N+1)} \\ x_1^{(N+2)} & x_2^{(N+2)} & \vdots & x_i^{(2)} & \cdots & x_n^{(N+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(2N)} & x_2^{(2N)} & \cdots & x_i^{(N)} & \cdots & x_n^{(2N)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

以步骤1中提到的二变量问题为例,抽取2000个样本。图2为传统可靠性计算中根据变量的密度函数采用简单随机抽样得到的样本。图3为根据步骤1中第二种方法得到区间 $x_1 \in [-1.9, 5.9]$ , $x_2 \in [-6.8, 8.8]$ 后,通过Sobol序列得到的均匀样本。

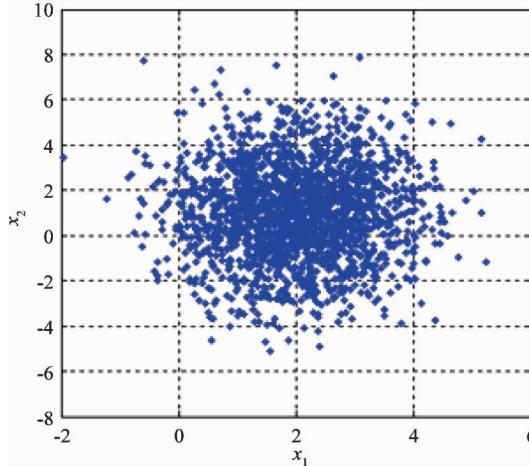


图2 根据变量密度函数由简单随机抽样得到的样本

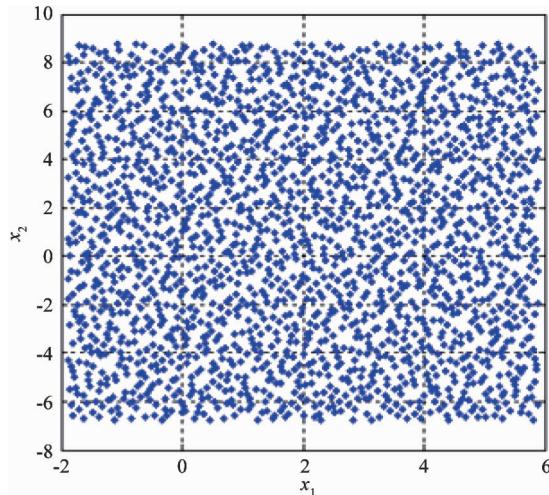


图3 本文方法得到的二维变量均匀样本

**步骤3:**分别计算矩阵 $\mathbf{A}$ , $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}^{(i)}$ 中每个样本对应的失效域指示函数值,得到以下3个 $N$ 维向量:

$$\mathbf{I}_A = I_F(\mathbf{A}), \mathbf{I}_B = I_F(\mathbf{B}), \mathbf{I}_{C^{(i)}} = I_F(\mathbf{C}^{(i)}) \quad (21)$$

分别计算矩阵 $\mathbf{A}$ , $\mathbf{B}$ 中每个样本向量对应的联合概率密度函数值,得到两个样本矩阵对应的密度

权重为

$$\mathbf{W}_A = \prod_{j=1}^n f_j(x_j^{(A)}), \mathbf{W}_B = \prod_{j=1}^n f_j(x_j^{(B)}) \quad (22)$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ , $\mathbf{B}$ 中第 $k$ 个向量对应的总权重 $\mathbf{W}_D^{(k)}$ 为:

$$\mathbf{W}_D^{(k)} = \mathbf{W}_A^{(k)} \cdot \mathbf{W}_B^{(k)} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (23)$$

**步骤4:**由上述内容得到估算 $D_i$ 和 $D_{\sim i}$ 的计算式:

$$\hat{D}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{I}_A^{(k)} \cdot \mathbf{I}_{C^{(i)}}^{(k)} \cdot \mathbf{W}_D^{(k)}}{\sum_{k=1}^N \mathbf{W}_D^{(k)}} \quad (24)$$

$$\hat{D}_{\sim i} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{I}_B^{(k)} \cdot \mathbf{I}_{C^{(i)}}^{(k)} \cdot \mathbf{W}_D^{(k)}}{\sum_{k=1}^N \mathbf{W}_D^{(k)}} \quad (25)$$

式中, $\mathbf{I}_A^{(k)}$ , $\mathbf{I}_B^{(k)}$ 和 $\mathbf{I}_{C^{(i)}}^{(k)}$ 分别为向量 $\mathbf{I}_A$ , $\mathbf{I}_B$ 和 $\mathbf{I}_{C^{(i)}}$ 的第 $k$ 个元素。类似的,3.1节中失效概率的估计值式(11)也可以由上述样本同时估计得:

$$\hat{P}_f = \frac{\sum_{k=1}^{2N} \mathbf{I}_{A+B}^{(k)} \mathbf{W}_{A+B}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{2N} \mathbf{W}_{A+B}^{(k)}} \quad (26)$$

式中, $\mathbf{I}_{A+B}$ 为由 $\mathbf{I}_A$ 和 $\mathbf{I}_B$ 组成的 $2N$ 维向量, $\mathbf{W}_{A+B}$ 为由 $\mathbf{W}_A$ 和 $\mathbf{W}_B$ 组成的 $2N$ 维向量。同上,上标 $(k)$ 表示向量的第 $k$ 个元素。

经过上述计算步骤,实现了单层密度权重法对用基于失效概率的矩独立重要性测度的求解。该方法相对其他分析方法具有许多优点:第一,在计算过程中采用确定性低偏差均匀抽样的方式,使得误差阶更小,并且在小失效概率条件下均匀样本点落入失效域的可能性更大,提高了计算效率,在样本量很小的情况下就能得到近似解;第二,由样本点处的联合概率密度函数值构造权重,计算精确度高,收敛性和稳健性好等。下面通过算例证明本文方法在基于失效概率的重要性测度计算中的优越性。

#### 4 算例分析

本文使用两个显式工程算例和一个隐式工程算例说明所提算法的合理性和高效性。在结果对比中,使用双层抽样的Monte Carlo(MC)方法在大样本情况下的结果作为精确解,并与单层重要抽样(IS)法<sup>[10]</sup>进行结果比较,以说明所提算法的精度和高效性。

**算例 1:**如图 4 所示的三跨度梁结构,其中单跨长度  $L = 5\text{m}$  为确定值。考虑三跨度梁扰度的最大允许值为  $L/360$ , 可以建立功能函数为  $g(w, E, I) = L/360 - 0.0069wL^4/(EI)$ 。其中基本随机变量  $w$  为分布载荷(服从对数正态分布);  $E$  为弹性模量、 $I$  为惯性矩,它们服从正态分布。所有变量相互独立,各变量的均值和变异系数参见表 1。每种方法计算基于失效概率的矩独立重要性测度的结果见表 2。

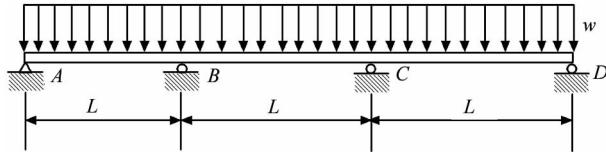


图 4 三跨度梁示意图

表 1 三跨度梁输入变量的分布参数

随机变量	$w$	$E$	$I$
均值	40kN/m	$2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$	$8 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
变异系数	0.04	0.075	0.05

表 2 算例 1 基于失效概率的矩独立重要性测度计算结果

方法		$w$	$E$	$I$
MC	$S_i$	0.0111(3)	0.2023(1)	0.0309(2)
	$S_{Ti}$	0.5389(3)	0.9375(1)	0.6772(2)
IS	$S_i$	0.0103(3)	0.2050(1)	0.0293(2)
	$S_{Ti}$	0.5245(3)	0.9389(1)	0.6767(2)
密度权重法	$S_i$	0.0127(3)	0.2080(1)	0.0321(2)
	$S_{Ti}$	0.5718(3)	0.9341(1)	0.6841(2)

注:表中数值后面括号里面的数字代表该变量的重要性测度排序

双层 Monte Carlo 法每层抽取 3000 个样本, 调用功能函数大于  $2.7 \times 10^{-7}$ , 其计算结果可以作为参考解。对比表 2 中结果数据可以看出, 本文提出的单层密度权重法的结果足够准确, 由此证明了该方法的有效性。IS 法的函数估计次数为 15026, 相比于 Monte Carlo 方法计算效率明显提高。而本文所提出的密度权重法每个矩阵抽取 1000 个样本, 因此仅需 5000 次的函数估计量就可以得到较为准确的结果, 从而显示了本文方法的高效性。

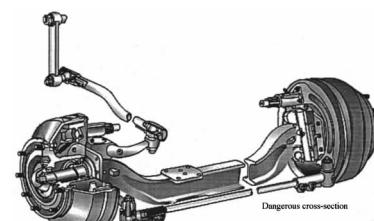
通过对基本变量基于失效概率的矩独立重要性分析可以得到, 这 3 个变量的主效应指标  $S_i$  和总效应指标  $S_{Ti}$  有相同的重要性等级:  $E > I > w$ 。这说明通过降低变量  $E$  的不确定性可以最大化地减小三跨度梁结构的失效概率。通过表 2 还可以看出, 每个变量的主效应指标和总效应指标有着很大的差别, 这说明相关性的因素对结构的失效概率有着很大的影响。

**算例 2:**图 5 所示为一汽车前轴示意图。由于汽车前轴需要承受汽车前部分的重量, 故危险截面常发生在工字梁上, 其截面形状如图 5(b)所示。已知危险截面的最大正应力为  $\sigma = M/W_x$  和  $\tau = T/W_p$ , 其中  $M$  和  $T$  分别为前轴所受的弯矩和转矩,  $W_x$  和  $W_p$  分别为结构的截面系数和极截面系数, 且有

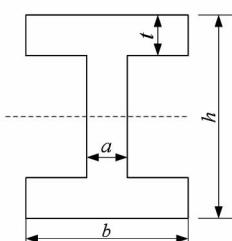
$$W_x = \frac{a(h-2t)^3}{6h} + \frac{b}{6h}[h^3 - (h-2t)^3] \quad (27)$$

$$W_p = 0.8bt^2 + 0.4[a^3(h-2t)/t] \quad (28)$$

根据前轴的材料特性, 给定前轴的静强度极限为  $\sigma_s = 460\text{ MPa}$ , 由静强度分析, 构件模型的功能函数为  $g = \sigma_s / \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ , 工字梁的几何参数  $a, b, t, h$  和前轴所受的弯矩  $M$  和转矩  $T$  为相互独立服从正态分布的输入变量, 其分布参数如表 3 所示。基于失效概率的矩独立重要性测度的求解结果如表 4 所示。



(a)



(b)

图 5 汽车前轴示意图

同算例 1一样, Monte Carlo 方法每层抽样 3000 次, 多于  $5.4 \times 10^7$  的函数估计使其计算结果已经完全收敛, 该结果可以作为参照解。其他两种方法的计算结果均和参照解吻合得较好, 再次说明了本文提出的单层密度权重法的正确性和有效性。IS 法的计算量为 24032, 而本文所提出的密度权重法每个矩阵抽取 1000 个样本, 仅需 8000 次的函数估计量就可以得到接近参照解的结果。

表 4 算例 2 基于失效概率的矩独立重要性测度计算结果

方法		$a$	$b$	$t$	$h$	$M$	$T$
MC	$S_i$	0.0573(4)	0.0808(3)	0.2100(1)	0.0165(5)	0.0008(6)	0.1198(2)
	$S_{Ti}$	0.3771(4)	0.4254(3)	0.6627(1)	0.1980(5)	0.0400(6)	0.5213(2)
IS	$S_i$	0.0570(4)	0.0805(3)	0.2106(1)	0.0162(5)	0.0008(6)	0.1196(2)
	$S_{Ti}$	0.3768(4)	0.4249(3)	0.6609(1)	0.1976(5)	0.0410(6)	0.5163(2)
密度权重法	$S_i$	0.0580(4)	0.0824(3)	0.2201(1)	0.0158(5)	0.0009(6)	0.1201(2)
	$S_{Ti}$	0.3776(4)	0.4321(3)	0.6722(1)	0.1992(5)	0.0434(6)	0.5244(2)

通过对基本变量的重要性分析可以得到, 这 6 个变量的主效应指标  $S_i$  和总效应指标  $S_{Ti}$  有相同的重要性等级:  $t > T > b > a > h > M$ , 这说明通过降低变量  $t$  和  $T$  的不确定性可以最大化地减小汽车前轴结构的失效概率, 而降低弯矩  $M$  的不确定性对结构失效概率的影响很小。通过表 4 还可以看出, 每个变量的主效应指标和总效应指标有着很大的差别, 这说明变量与其他变量的相互作用对结构的失效概率有着很大的影响。

**算例 3:**为了更好地验证本文所提方法的工程适用性, 本算例中将其应用于一个具有隐式输入输出关系的平面十杆桁架结构中, 结构概图如图 6 所示。水平和竖直杆的长度和弹性模量均为  $L$  和  $E$ , 每根杆的横截面积为  $A_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 。作用在节点处的载荷  $P_i (i = 1, 2, 3)$  如图 6 所示。设  $L, A_i$

表 3 汽车前轴模型输入变量分布参数

随机变量	均值	标准差
$a$	12	0.60
$b$	65	3.25
$t$	14	0.70
$h$	85	4.25
$M$	$3.5 \times 10^6$	$1.75 \times 10^5$
$T$	$3.1 \times 10^6$	$1.55 \times 10^5$

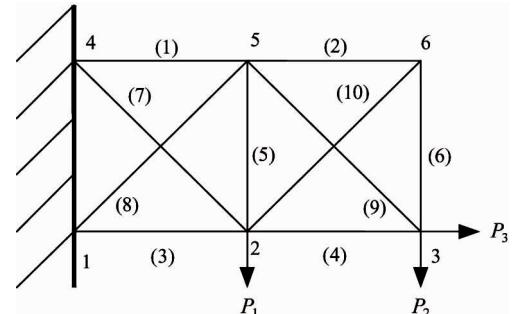


图 6 算例 3 平面十杆桁架结构示意图

( $i = 1, 2, \dots, 10$ )、 $E$  和  $P_i (i = 1, 2, 3)$  为 15 个服从正态分布的基本随机变量, 分布参数如表 5 所示。图 7 为经 Ansys 13.0 分析的十杆结构的有限元结果。根据分析结果, 以 3 节点纵向位移不超过 0.0035m 为约束条件, 设该模型的功能函数为  $g = 0.0035 - \Delta_y$ , 其中  $\Delta_y$  为节点 3 纵向的位移。

表 5 算例 3 十杆桁架结构输入变量分布信息

分布信息	$A_i (\text{m}^2)$	$L (\text{m})$	$E (\text{GPa})$	$P_1 (\text{kN})$	$P_2 (\text{kN})$	$P_3 (\text{kN})$
均值	0.001	1	100	80	10	10
变异系数	0.15	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

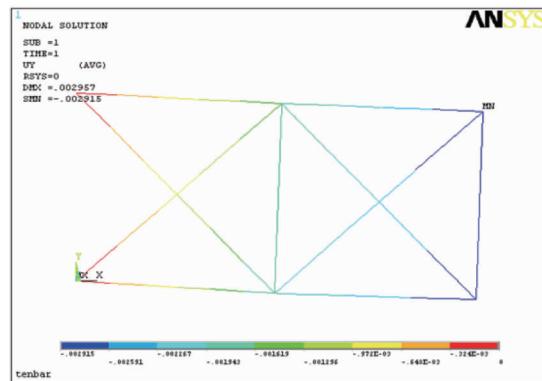


图 7 算例 3 平面十杆桁架结构 Ansys 有限元分析结果图

由于本算例是一个具有隐式输出响应函数的模型,调用一次有限元模型需要数秒钟时间,故按照指标定义采用基于双层抽样的 Monte Carlo 方法的计算代价太大。前面两个算例已经验证了 IS 方法的精确性,故本算例只采用 IS 方法进行对比。从图 8 和图 9 的主效应与总效应结果可以看出,本文所提方法的计算结果是正确的。然后 IS 方法调用有限元模型 51035 次,计算效率比较低。而本文的密度权重法同前面算例抽取相同的样本量,其调用有限元模型 17000 次,计算效率有很大提升。

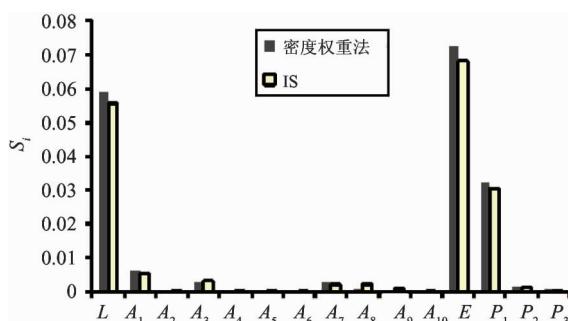


图 8 平面十杆桁架结构主效应计算结果

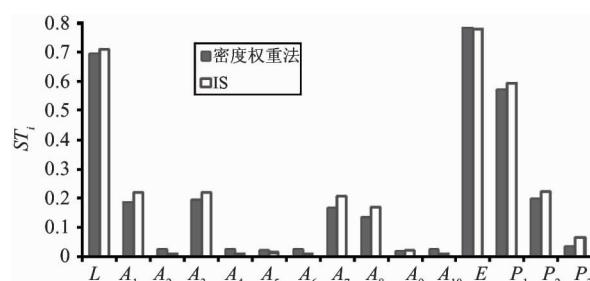


图 9 平面十杆桁架结构总效应计算结果

效应值比较大,且排序为  $E > L > P_1$ , 而其他的变量的主效应值都接近于 0,从而说明了减少变量  $E$  的不确定性可以最大程度地减小失效概率。从图 9 中的结果可以看出,变量  $A_2, A_4, A_5, A_6, A_9, A_{10}$  和  $P_3$  的总效应值很小并接近于 0,说明减小它们的不确定性不能明显地减小结构的失效概率。从图 8 和图 9 的纵坐标值也可以看出,主效应值相对都比较大,说明变量之间的交互作用对结构失效概率具有重大影响。

## 5 结 论

本研究针对计算基于失效概率的矩独立重要性测度计算量往往很大(尤其是针对一些具有隐式功能函数的复杂模型)这一问题,利用单层 Monte Carlo 法和密度权重法的优点,提出了能够准确、高效地求解矩独立重要性测度的单层密度权重法。该方法在计算过程中采用确定性低偏差均匀抽样的方式,使得误差价更小,并在小失效概率条件下均匀样本点落入失效域的可能性更大,从而提高了计算效率;另外由样本点处的联合概率密度函数值构造权重,从而计算精度高,收敛性和稳健性好。算例验证了该方法的优越性。

## 参 考 文 献

- [1] Castillo E, Minguez R, Castillo C. Sensitivity analysis in optimization and reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety*, 2008, 93(12):1788-1800
- [2] Sobol I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematical Computation and Simulation*, 2001, 55(1):221-280
- [3] Satelli A. Sensitivity analysis for importance assessment. *Risk Analysis*, 2002, 22(3): 579-590
- [4] Iman R L, Hora S C. A robust measure of uncertainty importance for use in fault tree system analysis. *Risk Analysis*, 1990, 10(3):401-406
- [5] Liu H B, Chen W, Sudjianto A. Relative entropy based method for probabilistic sensitivity analysis in engineering design. *Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(3): 326-333

从图 8 的主效应结果可以看出,  $L, E$  和  $P_1$  的主

- [ 6 ] Borgonovo E. A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771-784
- [ 7 ] Cui L J, Lu Z Z, Zhao X P. Moment-independent Importance Measure of Basic Random Variable and its Probability Density Evolution Solution. *Science China Technological Sciences*, 2010, 53(4): 1138-1145
- [ 8 ] Li L Y, Lu Z Z, Feng J, et al. Moment-independent Importance Measure of Basic Random Variable and its state dependent parameter solution. *Structural Safety*, 2012, 38:40-47
- [ 9 ] Borgonovo E, Castaings W, Tarantola S. Model emulation and moment-independent sensitivity analysis: An application to environment modeling. *Environmental Modelling & Software*, 2012, 34:105-115
- [ 10 ] Wei P F, Lu Z Z, Hao W R, et al. Efficient sampling methods for global reliability sensitivity analysis. *Computer Physics Communication*, 2012, 183:1728-1743
- [ 11 ] Rashki M, Miri M, Moghaddam M A. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point. *Structural Safety*, 2012, 39: 22-29

## A single-loop density weight method for analysis of failure probability based moment-independent importance measure

Zhao Lufeng, Fan Bingjie, Wu Yarong

( School of equipment management and safety engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710051 )

### Abstract

To efficiently analyze the influence of the input variable uncertainty of a structural system on the system's failure probability, the calculation of the failure probability based moment-independent importance measure was studied, and a single-loop density weight method for accurate, efficient calculation of the failure probability based moment-independent importance measure was constructed based on the single-loop Monte Carlo method and the density weight method. Two engineering examples for the new method demonstrate that, compared with the existing methods, the proposed method can obtain very accurate calculation results with less model evaluations. Thus it greatly improves the computational efficiency, and shows its good engineering applicability.

**Key words:** moment-independent, weight index, importance measure, failure probability, Probability density function