

doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2014.12.006

# 评估增广立方体网络可靠性的一种新方法<sup>①</sup>

白 杨<sup>②\*</sup> 梁家荣<sup>③\*</sup> 王新阳<sup>\*\*</sup> 郭 晨<sup>\*\*\*</sup>

( \* 广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004 )

( \*\* 华南理工大学计算机科学与工程学院 广州 510006 )

( \*\*\* 广西大学电气工程学院 南宁 530004 )

**摘 要** 针对利用传统连通度评估增广立方体网络(AQn)可靠性的局限性问题进行了分析,提出了一种新的互连网络评估标准即 3-额外连通度,并将其应用到了增广立方体网络中。从增广立方体网络的结构特性出发,通过研究增广立方体网络的属性,从理论上推导出增广立方体网络的 3-额外点连通度( $k_3(AQ_n)$ )及 3-额外边连通度( $\lambda_3(AQ_n)$ )的一个上限值,从而有效地避开了传统连通度假定一个节点的所有邻居节点(或邻居链路)同时出现故障这一在真实系统中几乎不可能发生的情况。研究表明,当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) = 8n - 28$ ; 当  $n \geq 4$  时,  $\lambda_3(AQ_n) \leq 8n - 16$ 。该结果表明,增广立方体网络的可靠性可进一步提升,它会更适合用于对可靠性要求高的大规模多处理器系统中。

**关键词** 互连网络,增广立方体,可靠性,额外连通度

## 0 引 言

大规模多处理器系统随着处理单元的增多,其部分部件出错是不可避免的。系统当出现错误时仍能保持正常通信的能力,说明系统可靠。我们将大规模多处理器系统中的处理单元看作一个顶点,两个处理单元之间的连接看作一条边,则一个系统可抽象成一个无向图。于是,对大规模多处理器系统可靠性的研究可以转变为对相应图的相关属性的研究。在衡量系统可靠性的众多参数中,连通度(connectivity)一直是最为广泛关注的参数之一。连通度可以分为点连通度和边连通度,它们分别体现了网络能够容忍的最大故障节点数和最大链路数。但连

通度是在假定一个节点的所有邻居节点(或邻居链路)同时出现故障,即最坏情况下评估特定规模网络的可靠性,而这一情况在真实系统中几乎不可能发生,因此具有一定的局限性。本文分析了用传统连通度评估增广立方体网络(augmented cube network, AQn)可靠性的局限性,在此基础上提出了一种评估 AQn 可靠性的新方法,该方法能够避开传统连通度的局限性,从而提高增广立方体网络的可靠性,更加适合应用于对可靠性要求高的大规模多处理器系统中。

## 1 相关研究

针对传统连通度的问题, Fabrega 和 Fiol 等人在

① 国家自然科学基金(61363002)资助项目。  
② 男,1987 年生,硕士;研究方向:网络与并行计算;E-mail: baiyangby.66@163.com  
③ 通信作者, E-mail: gxuliangjr@163.com  
(收稿日期:2014-08-26)

1996 年提出了额外连通度 (extra connectivity) 的概念<sup>[1,2]</sup>。额外连通度的提出在一定程度上弥补了连通度的不足,极大提高了互连网络可靠性的精度,因而额外连通度的研究得到了广泛的发展。文献[3]研究了交换超立方体网络<sup>[4]</sup>的超连通度和超边连通度,它们实际上是一种特殊形式的额外连通度,即 1-额外连通度。文献[5-7]分别研究了折叠立方体<sup>[8]</sup>的 1 阶、2 阶、3 阶额外连通度,逐步提升了折叠立方体网络的可靠性精度。文献[9,10]分别研究了一类网络的 2-额外连通度和 2-额外边连通度。

增广立方体<sup>[11]</sup>是超立方体的变种网络<sup>[4,8,11-14]</sup>中极为重要和极具吸引力的网络模型之一,作为超立方体网络<sup>[15]</sup>的一个加强网络,它不仅保持了超立方体大量的优秀属性,如高对称性、递归构造性等,并且拥有某些比超立方体更好的属性,如连通度几乎是超立方体的 2 倍等。正是由于增广立方体连通度的优越性能,吸引了不少专家与学者对其可靠性的广泛研究<sup>[16-20]</sup>。文献[16]和文献[17]分别研究了在 PMC 模型和比较模型下,增广立方体的条件诊断度分别是  $8n - 27$  和  $6n - 17$ ,从而为将增广立方体转换为自诊断系统提供了理论依据。文献[11]研究了增广立方体的点连通度和边连通度均是  $2n - 2$ 。在文献[18]中, Ma 等人证明了增广立方体的超点连通度和超边连通度分别为  $4n - 8$  和  $4n - 4$ ,进而将增广立方体可靠性的精度提升了近 2 倍。Ma 等人在文献[20]中又证明了增广立方体的 2-额外点连通度和 2-额外边连通度分别为  $6n - 17$  和  $6n - 9$ ,这些结果的得出进一步提高了增广立方体可靠性的精度,并再次证明了增广立方体是可靠性较好的网络。

一个节点或者一条链路失效的概率被称为失效率。假定每个节点(或每条链路)的失效率均相同,记为  $p$ (或  $q$ )。在增广立方体中,令  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ (或  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ ) 分别表示任何节点、任何链路、任何包含三个节点的连通分支的所有邻居节点(或邻居链路)同时失效的事件,则根据增广立方体的结构可

得失效率分别为  $prob(\xi_1) \leq 2^n \times p^{2n-1}, prob(\xi_2) \leq (2n - 1) \times 2^{n-1} \times p^{4n-8}, prob(\xi_3) \leq 2^n \times C_{2n-1}^2 \times p^{6n-17}$  (或  $prob(\xi'_1) \leq 2^n \times p^{2n-1}, prob(\xi'_2) \leq (2n - 1) \times 2^{n-1} \times p^{4n-4}, prob(\xi'_3) \leq 2^n \times C_{2n-1}^2 \times p^{6n-9}$ )。当令  $p = 0.1, n = 5$  时至多包含三个节点的连通分支失效概率为  $prob(\xi_1 \cup \xi_2 \cup \xi_3) \leq prob(\xi_1) + prob(\xi_2) + prob(\xi_3) = 2^n \times p^{p+1} + (2n - 1) \times 2^{n-1} \times p^{4n-8} + 2^n \times C_{2n-1}^2 \times p^{6n-17} < 10^6$ , 并且随着  $n$  的增大,这一事件的概率会越来越小。因此,开展对增广立方体网络 3-额外点连通度和 3-额外边连通度的研究是一件相对合理和极具现实意义的工作。

本文在上述背景下研究了增广立方体的 3-额外点连通度 ( $k_3(AQ_n)$ ), 证明了当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) = 8n - 28$ 。同时研究了增广立方体的 3-额外边连通度 ( $\lambda_3(AQ_n)$ ) 的一个上限值,即当  $n \geq 4$  时,  $\lambda_3(AQ_n) \leq 8n - 16$ 。

## 2 预备知识

本文中没有定义的理论术语与符号描述,我们将参照文献[21]中的相关定义。在一无向图  $G = (V(G), E(G))$  中,  $V(G)$  和  $E(G)$  分别表示图  $G$  的顶点集和边集。对于图  $G$  中的任意两顶点  $u, v, (u, v) \in E(G)$  表示图  $G$  中任意一条边。对于任意的  $u \in V(G)$ , 令  $N_G(u)$  和  $E_G(u)$  分别表示图  $G$  中邻接于  $u$  的顶点集、边集,记为  $N_G(u) = \{v \in V(G) \mid \forall (u, v) \in E(G)\}$  和  $E_G(u) = \{(u, v) \in E(G) \mid \forall v \in V(G)\}$ 。任取  $G$  中一顶点  $v$  和一连通分支  $S, |S|$  表示  $S$  中所有元素的个数;  $S \setminus \{v\}$  表示  $S$  中移除顶点  $v$  后剩余的子图;  $N_G(S)$  表示邻接于  $S$  的所有邻居点集,记为  $N_G(S) = (\cup_{u \in V(S)} N_G(u)) - V(S)$ , 而  $N_G[S] = N_G(S) \cup V(S)$ ;  $E_G(S)$  表示邻接于  $S$  的所有邻居边集,记为  $E_G(S) = (\cup_{u \in V(S)} E_G(u)) - E(S)$ ;  $G - S$  表示图  $G$  在移除了  $S$  中所有元素之后所形成的子图。图  $G$  中的一条路  $P_k = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  ( $k \geq 2$ ) 是  $k$  个不同顶点的一个序列,该序列中任何

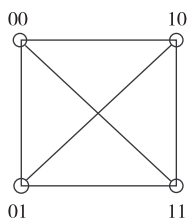
两个连续的顶点相邻。图  $G$  中的一个圈  $C_k = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$  ( $k \geq 3$ ) 是一个顶点序列,该序列中任何两个连续的顶点相邻且  $v_1, v_2, \dots, v_k$  均不相同。令  $K_n$  表示包含  $n$  个顶点的完全图。在以下的讨论中,做如下规定:令  $u'_i$  (或  $\bar{u}'_i$ ) 表示二进制字符串中的某一位,令  $u_i$  (或  $\bar{u}_i$ ) 表示一个长度为  $n$  的二进制字符串。

**定义 1**<sup>[15]</sup>  $N$  维超立方体是这样图:包括  $2^n$  个顶点,每个顶点可以用  $n$  位二进制串  $u_1 u_2 \dots u_n$  标记,其中对于所有的  $i \in [1, n]$ , 均有  $u_i \in \{0, 1\}$ ; 两个顶点是相邻的,如果两个顶点的二进制字符串仅在一位不同。

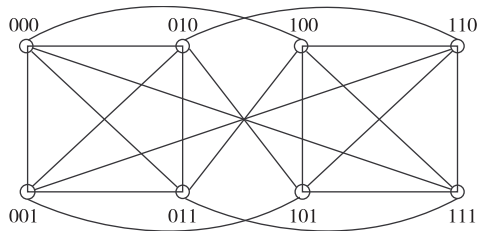
$n$  维增广立方体  $AQ_n$  ( $n \geq 1$ ) 递归定义如下:

**定义 2**<sup>[18]</sup>  $AQ_1$  是一个包含两个顶点  $\{0, 1\}$  的完全图  $K_2$ 。当  $n \geq 2$  时,  $AQ_n$  可由两个分别被标记为  $AQ_{n-1}^0$  和  $AQ_{n-1}^1$  的  $n-1$  阶增广立方体通过增加它们之间的  $2 \times 2^{n-1}$  条边获得,增加这些边的规则如下:

令  $V(AQ_{n-1}^0) = \{0u'_{n-1} \dots u'_2 u'_1 : u'_i \in \{0, 1\}\}$ ,



$AQ_2$



$AQ_3$

图 1 增广立方体  $AQ_2$  和  $AQ_3$

(1) 对于任意的正整数  $i \in [1, n-1]$ ,  $w = u_i$ 。如此情况下,该边被称为第  $i$  维超立方体边,用  $(u, u_i)$  标记;或

(2) 对于任意的正整数  $i \in [2, n-1]$ ,  $w = \bar{u}_i$ 。如此情况下,该边被称为第  $i$  维补边,用  $(u, \bar{u}_i)$  标记。

**性质 1**<sup>[18]</sup> 如果  $(u, u_i)$  是第  $i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) 维超立方体边,那么有

$V(AQ_{n-1}^1) = \{1u'_{n-1} \dots u'_2 u'_1 : u'_i \in \{0, 1\}\} \circ AQ_{n-1}^0$  中的顶点  $u = 0u'_{n-1} \dots u'_2 u'_1$  与  $AQ_{n-1}^1$  中的顶点  $w = 1w'_{n-1} \dots w'_2 w'_1$  相邻接当且仅当或者对于所有的  $i \in [1, n-1]$ , 有  $u'_i = w'_i$ ; 或者对于所有的  $i \in [1, n-1]$ , 有  $u'_i = \bar{w}'_i$ 。

$AQ_2$  和  $AQ_3$  的连接情况如图 1 所示。

根据定义 1,  $AQ_n$  的递归构造过程被描述为  $AQ_n = L \oplus R$ , 其中  $L \cong AQ_{n-1}^0, R \cong AQ_{n-1}^1$ 。  $L$  与  $R$  之间的边被称为交叉边,显然  $AQ_n$  中每个顶点均邻接于两个交叉边。对于一个  $n$  位的二进制字符串  $u = u'_n u'_{n-1} \dots u'_2 u'_1$ , 令  $u_i$  (或  $\bar{u}_i$ ) 表示二进制字符串  $u'_n \dots u'_{i+1} \bar{u}'_i u'_{i-1} \dots u'_1$  (或  $u'_n \dots u'_{i+1} \bar{u}'_i \bar{u}'_{i-1} \dots \bar{u}'_1$ ), 显然  $u_i = \bar{u}_i$ 。

$AQ_n$  ( $n \geq 1$ ) 非递归定义如下:

**定义 3**<sup>[18]</sup>  $n$  维增广立方体  $AQ_n$  有  $2^n$  个顶点。每个顶点用一个  $n$  位二进制字符串标记。两个顶点  $u = u'_n u'_{n-1} \dots u'_1$  与  $w = w'_n w'_{n-1} \dots w'_1$  是相邻的,当且仅当:

$$N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(u_i) = \begin{cases} \{\bar{u}_i, \bar{u}_{i-1}\}, & \text{如果 } i > 1 \\ \{\bar{u}_2, u_2\}, & \text{如果 } i = 1 \end{cases}$$

如此,  $u$  与  $u_i$  恰好有两个公共邻居,且  $|N_{AQ_n}(\{u, u_i\})| = 4n - 6$ , 其中  $\cap$  表示两个集合的并。

**性质 2**<sup>[18]</sup> 如果  $(u, \bar{u}_i)$  是第  $i$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 维的补边,那么  $N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}_i) = \{u_i, u_{i+1}, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_{i+1}\}$ 。

如此,  $u$  与  $\bar{u}_i$  恰好有 4 个公共邻居, 且  $|N_{AQ_n}(\{u, \bar{u}_i\})| = 4n - 8$ ; 如果  $(u, \bar{u}_n)$  是第  $n$  维的补边, 那么  $N_{AQ_n}(u) \cap N_{AQ_n}(\bar{u}_n) = \{u_n, \bar{u}_{n-1}\}$ , 如此,  $u$  与  $\bar{u}_n$  恰好有两个公共邻居, 且  $|N_{AQ_n}(\{u, \bar{u}_n\})| = 4n - 6$ 。

**性质 3**<sup>[18]</sup> 如果  $L$  (或  $R$ ) 中的两个顶点  $u$  和  $w$  在  $R$  (或  $L$ ) 中有公共邻居, 那么  $w = \bar{u}_{n-1}$  且它们在  $R$  (或  $L$ ) 中恰好有两个公共邻居, 分别为  $u_n$  和  $\bar{u}_n$ 。

**性质 4**<sup>[18]</sup> 当  $n \geq 3$  时,  $AQ_n$  中任意两点至多有 4 个公共邻居。

**性质 5**<sup>[16]</sup> 对于  $AQ_n$  中的一对顶点  $(u, v)$ , 如果  $v = \bar{u}_n$ , 那么该对顶点被称为互补对, 且  $AQ_n$  有  $2^{n-1}$  个互补对。

**引理 1**<sup>[11]</sup> 当  $n \geq 4$  时,  $k(AQ_n) = \lambda(AQ_n) = 2n - 1$ 。

**引理 2**<sup>[18]</sup> 当  $n \geq 6$  时,  $k'(AQ_n) = 4n - 8$ ; 当  $n \geq 2$  时,  $\lambda'(AQ_n) = 4n - 4$ 。

**引理 3**<sup>[20]</sup> 当  $n \geq 9$  时,  $k_2(AQ_n) = 6n - 17$ ; 当  $n \geq 4$  时,  $\lambda_2(AQ_n) = 6n - 9$ 。

**引理 4**<sup>[16]</sup> 当  $n \geq 3$  时, 对于  $AQ_n$  中任意 4 个顶点  $u, v, x, y$ , 若其中包含两个互补对, 那么  $|N_{AQ_n}(\{u, v, x, y\})| \geq 8n - 24$ 。

**引理 5**<sup>[16]</sup> 当  $n \geq 3$  时, 对于  $AQ_n$  中任意 4 个顶点  $u, v, x, y$ , 若其中至少包含一个互补对, 那么  $|N_{AQ_n}(\{u, v, x, y\})| \geq 8n - 26$ 。

**引理 6**<sup>[16]</sup> 当  $n \geq 4$  时, 令  $u, v, x, y$  为  $AQ_n$  中的任意 4 个顶点, 那么  $|N_{AQ_n}(\{u, v, x, y\})| \geq 8n - 28$ 。

**引理 7**<sup>[16]</sup> 当  $n \geq 4$  时, 对于  $AQ_n$  中任意 5 个顶点  $u, v, x, y, w$ , 若其中至少包含一个互补对, 那么  $|N_{AQ_n}(\{u, v, x, y, w\})| \geq 10n - 39$ 。

**引理 8**<sup>[16]</sup> 当  $n \geq 5$  时,  $AQ_n$  中 4 个顶点形成一个环  $C_4: u \rightarrow v \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow u$ , 其中令  $v = \bar{u}_2, x = \bar{u}_4, y = \bar{x}_2$ , 则  $|N_{AQ_n}(C_4)| = 8n - 28$ 。

### 3 $AQ_n$ 的 3-额外点连通度

在增广立方体网络的运行中, 出现故障结点是不可避免的, 存在故障结点的增广立方体网络仍能保持通信是网络分析中重要考虑的问题之一。下面我们考虑至少存在 4 个非故障节点的连通分支在其大部分邻居节点均失效情况下, 增广立方体网络的连通性问题, 即增广立方体网络的 3-额外点连通度问题。

**定理 1** 当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) \leq 8n - 28$ 。

证明: 取  $AQ_n$  中一个环  $C_4: u \rightarrow v \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow u$ , 令  $v = \bar{u}_2, x = \bar{u}_4, y = \bar{x}_2$ 。当  $n \geq 5$  时, 上述条件恰好满足引理 8, 如此由引理 8 可得  $|N_{AQ_n}(C_4)| = 8n - 28$ , 且  $N_{AQ_n}(C_4)$  为一点割集。若证该定理成立, 只需证  $N_{AQ_n}(C_4)$  为 3-额外点割集。

设  $w, e, T$  分别为  $C_4$  外任一点、任一边、任一包含 3 个顶点的连通分支。因为  $AQ_n$  中任意两点的公共邻居数不超过 4, 且对  $AQ_n$  的连通度、超连通度、2-额外连通度的分析, 结合性质 4 及引理 1、2、3 的结论, 可得如下不等式:

$$|N_{AQ_n}(w) \cap N_{AQ_n}[C_4]| \leq 20 < 2n - 1 \\ = k(AQ_n) (n \geq 11)$$

$$|N_{AQ_n}(e) \cap N_{AQ_n}[C_4]| \leq 36 < 4n - 8 \\ = k'(AQ_n) (n \geq 12)$$

$$|N_{AQ_n}(T) \cap N_{AQ_n}[C_4]| \leq 52 < 6n - 17 \\ = k_2(AQ_n) (n \geq 12)$$

如此  $AQ_n - N_{AQ_n}[C_4]$  不包含  $K_1, K_2, P_3, C_3$ , 则  $N_{AQ_n}[C_4]$  为一 3-额外点割集。由 3-额外点连通度的定义知, 当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) \leq 8n - 28$ 。

**定理 2** 对于任意的  $F \subseteq V(AQ_n)$  且  $|F| \leq 8n - 29$ , 令  $F_l = F \cap V(L), F_r = F \cap V(R)$ 。若在  $AQ_n - F$  中不存在  $K_1, K_2, P_3, C_3$ , 则  $R - F_r$  中每一个顶点均与  $L - F_l$  中一个顶点连接且  $L - F_l$  中每一个顶点均与  $R - F_r$  中一个顶点连接。

证明: 不失一般性, 只需证明  $L - F_l$  中每一个顶

点均与  $R - F_r$  中一个顶点连接即可。

设  $u$  为  $L - F_l$  中任一点, 则依据性质 3,  $u$  在  $R$  中有两个公共邻居  $u_n$  和  $\bar{u}_n$ 。若  $u_n \notin F_r$  或  $\bar{u}_n \notin F_r$ , 则定理得证。否则  $\{u_n, \bar{u}_n\} \subseteq F_r$ 。

情形 1  $\bar{u}_{n-1} \notin F_l$ 。

由于  $AQ_n - F$  中不存在  $K_2$ , 因此存在  $\{u, \bar{u}_{n-1}\}$  的邻居  $v \in L - F_l$ 。若  $v_n \notin F_r$  或  $\bar{v}_n \notin F_r$ , 则定理得证。否则  $\{v_n, \bar{v}_n\} \subseteq F_r$ 。

情形 1.1  $\bar{v}_{n-1} \notin F_l$ 。

此时在  $L$  中, 由 4 个顶点所形成的路径  $\bar{u}_{n-1} \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow \bar{v}_{n-1}$  包含两个互补对 (性质 5), 则由引理 4 得  $|N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, \bar{v}_{n-1}\})| \geq 8(n-1) - 24 = 8n - 32$ 。对于任意的  $w^i \in N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, \bar{v}_{n-1}\})$ , 其中  $0 \leq i \leq |N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, \bar{v}_{n-1}\})|$ , 令路径  $P'_i = (w^i, w_n^i)$ , 且  $P' = \{P'_i\}$ , 则  $|P'| \geq 8n - 32$ 。容易验证  $V(P') \cap \{\bar{u}_n, u_n, v_n, \bar{v}_n\} = \phi$ 。由于  $|F - \{\bar{u}_n, u_n, v_n, \bar{v}_n\}| \leq 8n - 29 - 4 = 8n - 33 < |P'|$ , 因此总存在一条路径使  $u$  连通至  $R - F_r$ , 定理得证。

情形 1.2  $\bar{v}_{n-1} \in F_l$ 。

由于在  $AQ_n - F$  中不存在  $P_3, C_3$ , 因此存在  $\{\bar{u}_{n-1}, u, v\}$  的邻居  $x \in L - F_l$ , 若  $x_n \notin F_r$  或  $\bar{x}_n \notin F_r$ , 则定理得证。否则  $\{x_n, \bar{x}_n\} \subseteq F_r$ 。

情形 1.2.1  $\bar{x}_{n-1} \notin F_l$ 。

该情形下, 由于  $L$  中 5 个顶点包含两个互补对  $(\bar{u}_{n-1}, u)$  和  $(x, \bar{x}_{n-1})$  (性质 5), 则由引理 7 得  $|N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, x, \bar{x}_{n-1}\})| \geq 10(n-1) - 39 = 10n - 49$ 。对于任意的  $w^i \in N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, x, \bar{x}_{n-1}\}) \setminus \{\bar{v}_{n-1}\}$ , 其中  $0 \leq i \leq |N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, x, \bar{x}_{n-1}\}) \setminus \{\bar{v}_{n-1}\}|$ , 令路径  $P'_i = (w^i, w_n^i)$ , 且  $P' = \{P'_i\}$ , 则  $|P'| \geq 10n - 50$ 。而  $|F| \leq 8n - 29 < 10n - 50 \leq |P'|$ , 因此至少存在一条路径使  $u$  连通至  $R - F_r$ , 定理得证。

情形 1.2.2  $\bar{x}_{n-1} \in F_l$ 。

该情形下, 在  $L$  中形成一条 4 个顶点的路径  $\bar{u}_{n-1} \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x$ , 其满足引理 5 的条件, 则由引理 5 得  $|N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, x\})| \geq 8(n-1) - 26 = 8n - 34$ 。

令  $S = \{\bar{u}_n, u_n, \bar{v}_n, v_n, \bar{x}_n, x_n, \bar{v}_{n-1}, \bar{x}_{n-1}\}$ 。对于任意的  $w^i \in N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, x\}) \setminus \{\bar{v}_{n-1}, \bar{x}_{n-1}\}$ , 其中  $0 \leq i \leq |N_L(\{\bar{u}_{n-1}, u, v, x\}) \setminus \{\bar{v}_{n-1}, \bar{x}_{n-1}\}|$ , 令路径  $P'_i = (w^i, w_n^i)$ , 且  $P' = \{P'_i\}$ , 则  $|P'| \geq 8n - 36$ 。容易验证  $V(P') \cap S = \phi$ 。而  $|F - S| \leq 8n - 29 - 8 = 8n - 37 < 8n - 36$ , 因此至少存在一条路径, 使  $u$  连通至  $R - F_r$ 。

情形 2  $\bar{u}_{n-1} \in F_l$ 。

由于  $AQ_n - F$  中不存在  $K_1$ , 因此存在顶点  $v \notin F_l$ , 使  $(u, v) \in E(L - F_l)$ 。若  $v_n \notin F_r$  或  $\bar{v}_n \notin F_r$ , 定理得证。否则  $\{v_n, \bar{v}_n\} \subseteq F_r$ 。

情形 2.1  $\bar{v}_{n-1} \notin F_l$ 。

因为  $AQ_n - F$  中不存在  $P_3, C_3$ , 因此存在  $\{u, v, \bar{v}_{n-1}\}$  的邻居  $x$ 。如此类似于情形 1.2, 可证得  $u$  连通至  $R - F_r$ 。

情形 2.2  $\bar{v}_{n-1} \in F_l$ 。

因为  $AQ_n - F$  中不存在  $K_2$ , 则存在  $\{u, v\}$  的邻居  $x$ 。若  $x_n \notin F_r$  或  $\bar{x}_n \notin F_r$ , 定理得证。否则  $\{x_n, \bar{x}_n\} \subseteq F_r$ 。

情形 2.2.1  $\bar{x}_{n-1} \notin F_l$ 。

此种情形类似于情形 1.2.2, 可证得  $u$  与  $R - F_r$  中一点连通。

情形 2.2.2  $\bar{x}_{n-1} \in F_l$ 。

在  $AQ_n - F$  中不存在  $P_3, C_3$ , 则存在  $\{u, v, x\}$  的邻居  $y$ 。若  $y_n \notin F_r$  或  $\bar{y}_n \notin F_r$ , 则定理得证。否则  $\{y_n, \bar{y}_n\} \subseteq F_r$ 。若  $\bar{y}_{n-1} \notin F_l$ , 类似情形 1.2.2, 定理成立。否则  $\bar{y}_{n-1} \in F_l$ , 令  $S = \{u_n, \bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}, v_n, \bar{v}_n, \bar{v}_{n-1}, x_n, \bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, y_n, \bar{y}_n, \bar{y}_{n-1}\}$ 。此时, 对于  $L$  中 4 个顶点  $u, v, x, y$ , 由引理 6 得  $|N_L(u, v, x, y)| \geq 8(n-1) - 28 = 8n - 36$ 。对于任意的  $w^i \in N_L(\{u, v, x, y\}) \setminus \{\bar{u}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}, \bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}\}$ , 其中  $0 \leq i \leq |N_L(\{u, v, x, y\}) \setminus \{\bar{u}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}, \bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}\}|$ , 令路径  $P'_i = (w^i, w_n^i)$ , 且  $P' = \{P'_i\}$ , 则  $|P'| \geq 8n - 40$ 。容易验证  $V(P') \cap S = \phi$ 。由于  $|F - S| \leq 8n - 29 - 12 = 8n - 41$ , 因此总存在一条路径使  $u$  与  $R - F_r$  连通。

综上所述, 定理得证。

根据上述两定理的结论,下面我们来给出增广立方体网络的 3-额外点连通度的相关结果。

**定理 3** 当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) = 8n - 28$ 。

证明:当  $n \geq 12$  时,由定理 1 知  $k_3(AQ_n) \leq 8n - 28$ 。下面只需证  $k_3(AQ_n) \geq 8n - 28$  即可,即证对于任意的顶点集  $F \subseteq V(AQ_n)$ , 当  $|F| = 8n - 29$  且不存在  $K_1, K_2, P_3, C_3$  时,  $AQ_n - F$  是连通的。图 2 给出了定理 3 情形 2 的 3 种子情形。

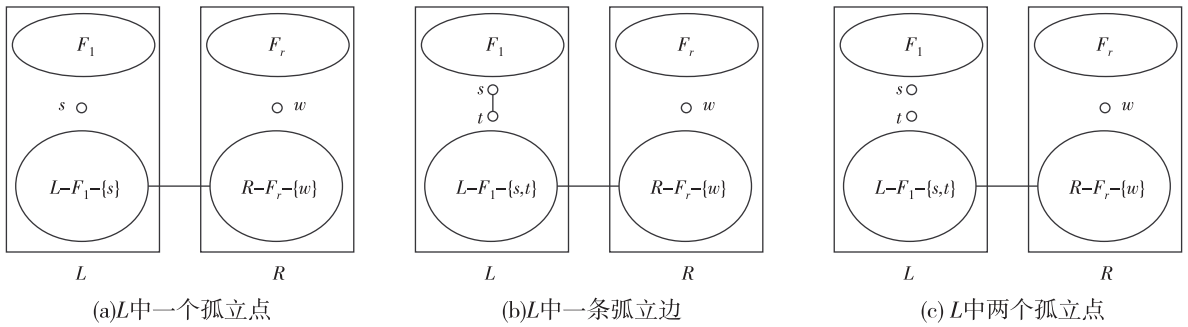


图 2 定理 3 情形 2 的 3 种子情形

**情形 2** 如果  $R - F_r$  是不连通的。由  $|F_r| \leq 4n - 15 < 4n - 12 = k'(R)$  与  $|F_r| \leq 4n - 15 < 6n - 23 = k_2(R)$  ( $n \geq 5$ ) 知  $R - F_r$  中不包含  $K_2$  和  $P_3, C_3$ , 因此  $R - F_r$  中只包含孤立点。因为在  $R$  中任意两点至多有 4 个公共邻居 (性质 4), 结合性质 1 和性质 2 可知至少移出  $4n - 10$  个顶点才能得到两个孤立点, 如此  $R - F_r$  中只有一个孤立点, 设为  $w$ 。此时,  $N_R(w) \subseteq F_r$ , 则  $|N_R(w)| = 2n - 3 \leq |F_r|$ 。由于  $|F_l| = |F| - |F_r| \leq 6n - 26$  且  $|F_l| < 6n - 23 = k_2(L)$ ,  $L - F_l$  可分以下 4 种情况: (1) 连通的; (2) 存在一个孤立点; (3) 存在一条孤立边; (4) 存在两个孤立点。

(1)  $L - F_l$  连通的, 由定理 2 知  $w$  和  $R - F_r - \{w\}$  均与  $L - F_l$  连通, 因此  $AQ_n - F$  是连通的, 定理得证。

(2)  $L - F_l$  中存在一个孤立点  $s$  (图 2(a) 所示)。不考虑  $L$  与  $R$  之间的补边, 则两者之间的顶点是一一对一连接的, 又由于  $2^{n-1} - |F_r \cup \{w\}| > |F_l|$

令  $F_l = F \cap V(L), F_r = F \cap V(R)$ 。不妨设  $|F_r| \leq |F_l|$ , 则  $|F_r| \leq \lfloor |F|/2 \rfloor = \lfloor (8n - 29)/2 \rfloor = 4n - 15$ 。

**情形 1** 如果  $R - F_r$  是连通的, 那么根据定理 2 有  $L - F_l$  中每一个顶点均与  $R - F_r$  中一个顶点连接, 因此  $AQ_n - F$  是连通的, 定理得证。

$\cup \{s\}|$ , 因此  $L - F_l - \{s\}$  与  $R - F_r - \{w\}$  是连通的。 $AQ_n - F$  不存在  $K_1$ , 若  $w$  连通至  $L - F_l - \{s\}$ , 则无论  $s$  连通至  $w$  还是连通至  $R - F_r - \{w\}$ , 均可证  $AQ_n - F$  连通。否则  $w$  不与  $L - F_l - \{s\}$  连通, 则  $w$  必定与  $s$  连通。由于  $AQ_n - F$  中不存在  $K_2$ ,  $s$  必定连通至  $R - F_r - \{w\}$ , 定理得证。

(3)  $L - F_l$  中存在一条孤立边  $(s, t)$  (图 2(b) 所示)。不考虑  $L$  与  $R$  之间的补边, 则两者之间的顶点是一一对一连接的, 又由于  $2^{n-1} - |F_r \cup \{w\}| > |F_l \cup \{s, t\}|$ , 因此  $L - F_l - \{s, t\}$  与  $R - F_r - \{w\}$  是连通的。 $AQ_n - F$  不存在  $K_1, K_2$ , 若  $w$  连通至  $L - F_l - \{s, t\}$ , 则无论  $(s, t)$  连通至  $w$  还是连通至  $R - F_r - \{w\}$ , 均可证  $AQ_n - F$  连通。否则  $w$  不与  $L - F_l - \{s, t\}$  连通, 则  $w$  必定与边  $(s, t)$  连通。由于  $AQ_n - F$  中不存在  $P_3, C_3$ , 边  $(s, t)$  必定连通至  $R - F_r - \{w\}$ , 定理得证。

(4)  $L - F_l$  中存在两个孤立点 (图 2(c) 所示), 同理可证得  $AQ_n - F$  为连通的。

综上可得当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) = 8n - 28$ 。

## 4 $AQ_n$ 的 3-额外边连通度的上限值

该节给出了增广立方体网络的 3-额外边连通度的一个上限值。

**定理 4** 当  $n \geq 4$  时,  $\lambda_3(AQ_n) \leq 8n - 16$ 。

证明:任取  $AQ_n$  中连通分支  $A$  且  $V(A) = 4$ 。令  $A$  为  $K_4$ , 如图 1 中  $AQ_2$ , 则  $E_{AQ_n}(A) = (2n - 1 - 3) \times 4 = 8n - 16$ 。设  $w, e, T$  分别为  $A$  外任一点、任一边、任一包含 3 个顶点的连通分支, 则在  $AQ_n$  中通过对其边连通度、超边连通度、2-额外边连通度(即引理 1、2、3)的分析知, 分别有如下不等式:

$$\begin{aligned} |E_{AQ_n}(w) \cap E_{AQ_n}(A)| &\leq 4 < 2n - 1 \\ &= \lambda(AQ_n)(n \geq 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E_{AQ_n}(e) \cap E_{AQ_n}(A)| &\leq 8 < 4n - 4 \\ &= \lambda'(AQ_n)(n \geq 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E_{AQ_n}(T) \cap E_{AQ_n}(A)| &\leq 12 < 6n - 9 \\ &= \lambda_2(AQ_n)(n \geq 4) \end{aligned}$$

因此  $AQ_n - E_{AQ_n}(A)$  不包含任意  $K_1, K_2, P_3, C_3$ , 则  $E_{AQ_n}(A)$  为一 3-额外边割集。由 3-额外边连通度的定义可得  $\lambda_3(AQ_n) \leq 8n - 16 (n \geq 4)$ 。

## 5 结 论

本文在增广立方体网络传统连通度、超连通度、2-额外连通度的基础上进行了深入研究, 进一步证明了 3-额外点连通度: 当  $n \geq 12$  时,  $k_3(AQ_n) = 8n - 28$ 。也就是说, 当  $n \geq 12$  时, 增广立方体至少删除  $8n - 28$  个顶点, 才能得到不包含  $K_1, K_2, P_3, C_3$  的非连通图。该结果的得出进一步提升了增广立方体网络的可靠性精度, 使增广立方体网络更加适合应用在对可靠性要求高的大规模多处理器系统中。此外, 本文还给出了增广立方体网络 3-额外边连通度的一个上限值, 即当  $n \geq 4$  时,  $\lambda_3(AQ_n) \leq 8n - 16$ , 这为今后进一步研究增广立方体网络的 3-额

外边连通度提供了理论基础。

## 参考文献

- [1] Fàbrega J, Fiol M A. Extraconnectivity of graphs with large girth. *Discrete Mathematics*, 1994, 127(1): 163-170
- [2] Fàbrega J, Fiol M A. On the extraconnectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, 1996, 155(1): 49-57
- [3] Ma M J, Zhu L Y. The super connectivity of exchanged hypercubes. *Information Processing Letters*, 2011, 111(8): 360-364
- [4] Loh P K K, Hsu W J, Pan Y. The exchanged hypercube. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2005, 16(9): 866-874
- [5] Xu J M, Zhu Q. On restricted connectivity and extra-connectivity of hypercubes and folded hypercubes. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2005, 10(2): 203-207
- [6] Zhu Q, Xu J M, Hou X, et al. On reliability of the folded hypercubes. *Information Sciences*, 2007, 177(8): 1782-1788
- [7] Chang N, Tsai C, Hsieh S. On 3-extra connectivity and 3-extra edge connectivity of folded hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, 2013, 63(6): 1594-1600
- [8] El-Amawy A, Latifi S. Properties and performance of folded hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1991, 2(1): 31-42
- [9] Xu J M, Zhu Q, Xu M. Fault-tolerant analysis of a class of networks. *Information Processing Letters*, 2007, 103(6): 222-226
- [10] Zhu Q, Xu J M, Lv M. Edge fault tolerance analysis of a class of interconnection networks. *Applied mathematics and computation*, 2006, 172(1): 111-121
- [11] Choudum S A, Sunitha V. Augmented cubes. *Networks*, 2002, 40(2): 71-84
- [12] Chen J C, Lai C J, Tsai C H, et al. A lower bound on the number of Hamiltonian cycles through a prescribed edge in a crossed cube. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(19): 9885-9892
- [13] Cheng B, Fan J, Jia X, et al. Parallel construction of independent spanning trees and an application in diagnosis on

Möbius cubes. *The Journal of Supercomputing*, 2013, 65 (3):1279-1301

[14] Yang X F, Evans D J, Megson G M. The locally twisted cubes. *International Journal of Computer Mathematics*, 2005, 82(4):401-413

[15] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hyper-cubes. *IEEE Transactions on Computers*, 1988, 37(7):867-872

[16] Chang N W, Hsieh S Y. Conditional diagnosability of augmented cubes under the PMC model. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 2012, 9(1):46-60

[17] Hong W S, Hsieh S Y. Strong diagnosability and conditional diagnosability of augmented cubes under the comparison diagnosis model. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(1):140-148

[18] Ma M, Liu G, Xu J M. The super connectivity of augmented cubes. *Information Processing Letters*, 2008, 106(2):59-63

[19] Ma M, Tan X, Xu J M, et al. A note on “The super connectivity of augmented cubes”. *Information Processing Letters*, 2009, 109(12):592-593

[20] Ma M, Song Y, Xu J M. Fault-tolerant analysis of augmented cubes. *arXiv preprint arXiv:1204.4251*, 2012

[21] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan, 1976. 10-24

A new method for evaluating  
augmented cube networks’ reliability

Bai Yang\*, Liang Jiarong\*, Wang Xinyang\*\*, Guo Chen\*\*\*

( \* School of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004 )

( \*\* School of Computer Science & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510006 )

( \*\*\* College of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004 )

Abstract

Through the analysis of the limitation of the technique of using the traditional connectivity to assess the reliability of an augmented cube network(  $AQ_n$  ), a new network assessment criterion, called the 3-extra connectivity, was presented and applied to an augmented cube network. The attributes of the augmented cube network were researched according to its structural characteristics, and then the network’s 3-extra vertex connectivity(  $k_3(AQ_n)$  ) and an upper bound of the network’s 3-extra edge connectivity(  $\lambda_3(AQ_n)$  ), were deduced theoretically, thus the situation that the traditional connectivity assumes that a node’s all neighbor vertices( or neighbor links ) are in malfunction at the same time, which is almost impossible in real systems, was avoided effectively. The results showed that the  $k_3(AQ_n)$  was  $8n - 28$  for  $n \geq 12$ , and the  $\lambda_3(AQ_n) \leq 8n - 16$  for  $n \geq 4$ , indicating that the reliability of augmented cube networks can be further improved, and the networks can be applied to large-scae multi-processor systems needing a high reliability.

**Key words:** Interconnection network, augmented cube, reliability, extra connectivity