

基于分位点的全局灵敏度及其求解方法^①

肖思男^② 吕震宙^③ 张磊刚

(西北工业大学航空学院 西安 710072)

摘要 为探讨输入变量在随机不确定性环境下对产品的分位点(产品满足一定概率要求的输出性能的上限值)的影响,定义了基于分位点的输入变量的全局灵敏度分析(GSA)指标。该指标能够在给定的概率要求下全面衡量输入变量在其分布域中变化时对输出性能分位点的平均影响程度。揭示了该指标与已有的基于分布函数的全局灵敏度指标和基于失效概率的全局灵敏度指标的内在联系,并利用维度缩减方法和基于分数阶矩的极大熵算法以及 Nataf 变换来高效求解所提指标。通过数值和工程算例说明了基于分位点的全局灵敏度指标的物理意义,并验证了求解方法的精度和效率。

关键词 灵敏度分析, 分位点, 分数阶矩, 极大熵, 维度缩减, Nataf 变换

0 引言

灵敏度分析是指研究模型输出响应量对输入变量和周围条件的敏感程度^[1]。灵敏度分析可以指出各输入变量的不确定性对系统响应量的不确定性的影响的大小,继而指导研究者确定各输入变量的重要性次序,从而有效地减小模型输出的不确定性,提高工程结构的可靠性以及降低决策的风险,因此它会在各个领域发挥重要作用。按照分析目的的不同,可以将灵敏度分析分为局部灵敏度分析和全局灵敏度分析。有关全局灵敏度的研究已经取得了不少的成果,如基于方差的全局灵敏度指标^[2,3],基于概率密度函数(probability function, PDF)的全局灵敏度指标^[4],基于导数的全局灵敏度指标^[5],基于分布函数(distribution function, DF)的全局灵敏度^[6]、基于失效概率的全局灵敏度^[7]等。基于分布函数的全局灵敏度描述了输入变量在其分布域内变化时对响应量的分布函数的平均影响,基于失效概率的全局灵敏度描述了输入变量在其分布域内变化时对系统失效概率的平均影响。由于响应量的分布函数和系统的失效概率往往是实际问题中所重点关注的目标,因此这两种全局灵敏度具有较高的工程应用价值。

本研究给出了基于分位点的全局灵敏度指标。分位点是描述产品满足一定概率要求的输出性能上限值,是用来衡量产品性能优劣的一个重要指标。基于分位点的全局灵敏度指标能够描述输入变量在其分布域内变化时对响应量在给定概率水平 α 时的分位点的平均影响,即能够反映在给定概率水平要求下各输入变量对响应性能平均影响的大小,从而可以更加合理地指导研究者重点关注哪些输入变量,这是基于分布函数和基于失效概率的全局灵敏度指标所做不到的。由于响应量的分布函数、失效概率以及分位点之间存在一定的关系,因此本文在提出基于分位点的全局灵敏度指标的基础上还将揭示基于分位点的全局灵敏度指标与基于分布函数以及基于失效概率的全局灵敏度指标存在内在的联系,进而更全面地掌握输入量对输出性能统计特征的影响,达到有效地对输出性能进行设计的目的。

1 基于分位点的全局灵敏度指标的定义及其性质

1.1 定义

本文所定义的基于分位点的输入变量 X_i 的全局灵敏度指标 δ_{X_i} 如下式所示:

$$\delta_{X_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y_{\alpha} - y_{\alpha|X_i}| f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (1)$$

① 国家自然科学基金(51175425)资助项目。

② 男,1990年生,博士生;研究方向:结构可靠性研究;E-mail: bruce1209@163.com

③ 通讯作者, E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

(收稿日期:2014-04-28)

其中, $y_\alpha = F_Y^{-1}(\alpha)$ 表示响应量的上侧 α 分位点, 它表达的是给定概率水平下输出性能的上限值, $F_Y^{-1}(\cdot)$ 表示响应量的逆分布函数, $y_{\alpha|X_i} = F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)$ 表示响应量相对于输入变量 X_i 的条件上侧 α 分位点, $F_{Y|X_i}^{-1}(\cdot)$ 表示响应量相对于输入变量 X_i 的逆条件分布函数, $f_{X_i}(x_i)$ 表示输入变量 X_i 的概率密度函数。

上述 δ_{X_i} 的表达式也可以改写为数学期望的形式, 即

$$\delta_{X_i} = E[|y_\alpha - y_{\alpha|X_i}|] \quad (2)$$

其中, $E[\cdot]$ 为数学期望算子。从上式可以看出 δ_{X_i} 表示的是在给定概率水平 α 时, X_i 在其整个分布域内变化的情况下, 对响应量性能的上侧分位点的平均影响。以下则探讨 δ_{X_i} 与已有的基于分布函数和基于失效概率的全局灵敏度指标的关系。

1.2 基于分位点的全局灵敏度指标与基于分布函数的全局灵敏度指标的关系

基于累计分布函数(cumulative distribution function, CDF)的全局灵敏度指标 $\delta_{X_i}^{\text{CDF}[6]}$ 定义为

$$\delta_{X_i}^{\text{CDF}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_Y(y) - F_{Y|X_i}(y)| dy f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (3)$$

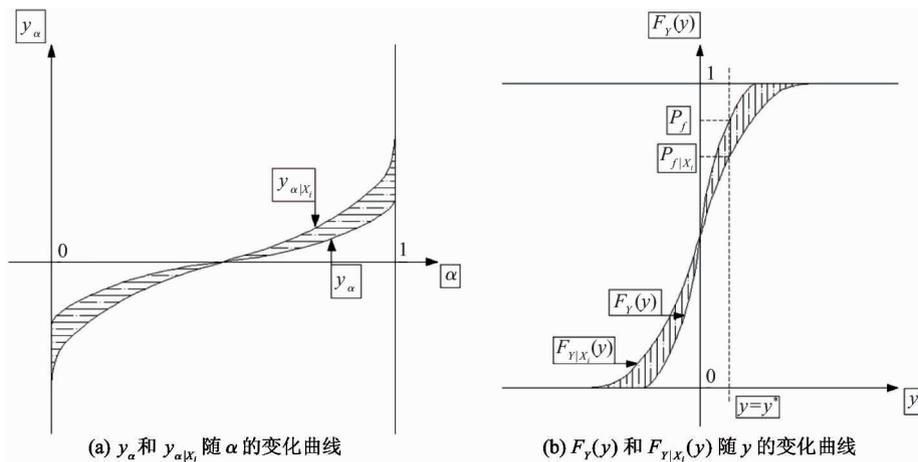


图1 δ_{X_i} 与 $\delta_{X_i}^{\text{CDF}}$ 、 $\delta_{X_i}^{P_f}$ 的关系示意图

1.3 基于分位点的全局灵敏度指标与基于失效概率的全局灵敏度指标的关系

基于失效概率(failure probability)的全局灵敏度指标 $\delta_{X_i}^{P_f[7]}$ 定义为

$$\delta_{X_i}^{P_f} = \int_{-\infty}^{+\infty} |P_f - P_{f|X_i}| f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (5)$$

其中, P_f 表示结构系统的无条件失效概率, $P_{f|X_i}$ 表示结构系统关于输入变量 X_i 的条件失效概率,

其中, $F_Y(y)$ 表示响应量的分布函数, $F_{Y|X_i}(y)$ 表示响应量相对于输入变量 X_i 的条件分布函数, $f_{X_i}(x_i)$ 表示输入变量 X_i 的概率密度函数。该指标反映了输入变量 X_i 对响应量的分布函数的平均影响。

为探讨 δ_{X_i} 与基于分布函数的全局灵敏度的关系, 将响应量的上侧分位点 y_α 和条件上侧分位点 $y_{\alpha|X_i}$ 随 α 变化的曲线绘制出来, 如图 1(a) 所示, 将该图形关于 I、III 象限的对角线对称翻转, 并且注意到 $F_Y(y) = \alpha$, 从而可得到图 1(b)。图 1(b) 中的曲线表示响应量的分布函数 $F_Y(y)$ 和条件分布函数 $F_{Y|X_i}(y)$ 随响应量 y 的变化关系。可以看出 $\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$ 表示图 1(a) 中阴影部分面积的平均值, 而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_Y(y) - F_{Y|X_i}(y)| dy f_{X_i}(x_i) dx_i$ 表示图 1(b) 中阴影部分面积的平均值, 而两图中阴影部分的面积是相等的, 从而可得

$$\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_Y(y) - F_{Y|X_i}(y)| dy f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (4)$$

即 $\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$ 也表示输入变量 X_i 对响应量的分布函数的平均影响。

$f_{X_i}(x_i)$ 表示输入变量 X_i 的概率密度函数。该指标反映了输入变量 X_i 对系统失效概率的平均影响。

若定义系统的失效概率为 $P_f = P\{\eta(x) \leq y^*\}$, 其中 $y = \eta(x)$ 为系统的响应函数, 设定结构输出性能安全的下限为 y^* , 也即 $\eta(x) \leq y^*$ 时, 结构系统将失效, 则无条件和有条件失效概率可以分别表达为 $P_f = F_Y(y^*)$ 和 $P_{f|X_i} = F_{Y|X_i}(y^*)$, 如图 1(b) 所示, 且 $\delta_{X_i}^{P_f}$ 可以改写为下式:

$$\delta_{X_i}^{P_f} = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_Y(y^*) - F_{Y|X_i}(y^*)| f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (6)$$

其中, $F_Y(y^*)$ 为响应量 Y 的分布函数在 $y = y^*$ 处的取值, $F_{Y|X_i}(y^*)$ 为响应量 Y 的条件分布函数在 $y = y^*$ 处的取值。此时 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{P_f} dy^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_Y(y^*) - F_{Y|X_i}(y^*)| f_{X_i}(x_i) dx_i dy^*$ 也表示阴影部分的面积, 从而可得

$$\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{P_f} dy^* \quad (7)$$

2 δ_{X_i} 的求解方法

为了计算 δ_{X_i} , 根据式(1)可以看出, 首先需要计算响应量的上侧 α 分位点和条件上侧 α 分位点, 即计算响应量的逆分布函数和条件逆分布函数。逆分布函数可由分布函数得到的, 因此需要先计算响应量的分布函数和条件分布函数; 而分布函数又可以根据概率密度函数得到, 所以首先应计算响应量的概率密度函数和条件概率密度函数。

对于系统响应量的概率密度函数的求解, 本文采用了维度缩减方法^[8,9]和基于分数阶矩的极大熵算法^[10]。维度缩减方法能够有效地减小响应函数的计算次数, 而基于分数阶矩的极大熵算法可以有效地估计出响应量的概率密度函数。对于系统响应量的条件概率密度函数的求解, 本文采用 Nataf 变换^[11,12]的方法, 该方法不会增加响应函数的计算次数。

2.1 计算响应量的概率密度函数(PDF)

一个正随机变量 X 的分数阶矩定义为

$$E[X^\alpha] = \int_X x^\alpha f_X(x) dx \quad (8)$$

其中, α 是实数。文献[13,14] 讨论了有关分数阶矩的数学性质和应用。

对于上面的分数阶矩的计算, 往往是比较困难的, 本文采用基于高维模型展开的乘积形式的维度缩减方法^[10]来计算分数阶矩。

响应函数的乘积形式的近似表达式为

$$\eta(x) \approx [\eta(c)]^{1-n} \prod_{i=1}^n \eta\{c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n\} \quad (9)$$

其中, c_i 为 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的均值, $\eta(x)$ 为系统的响应函数, $\eta(c)$ 为响应函数在输入变量均值 c 处

的取值, $\eta\{c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n\}$ 表示除第 i 个变量外, 其它变量都取其均值时的响应函数。

此时, 系统响应量的 α 阶分数阶矩可以近似表示为

$$\begin{aligned} M_Y^\alpha &= \int_X [\eta(x)]^\alpha f_X(x) dx \\ &\approx \int_X [[\eta(c)]^{1-n} \prod_{i=1}^n \eta(x_i, c_{-i})]^\alpha [\prod_{i=1}^n f_i(x_i)] dx \\ &= [\eta(c)]^{\alpha(1-n)} \prod_{i=1}^n \left\{ \int_{X_i} [\eta(x_i, c_{-i})]^\alpha f_i(x_i) dx_i \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, c_{-i} 表示除第 i 个变量外由其它变量的均值组成的向量。这样就将相应量的 α 阶分数阶矩近似表示为 n 个单变量函数的积分的连乘积形式, 而每个单变量函数的积分都可以比较容易地得到高精度的计算结果。

求得响应量的分数阶矩后, 就可以利用极大熵算法估计出响应量的概率密度函数。所得到的概率密度函数的估计值 $\hat{f}_Y(y)$ 的一般形式为

$$\hat{f}_Y(y) = \exp\left(-\sum_{k=0}^m \lambda_k y^{\alpha_k}\right) \quad (11)$$

其中, $\alpha_0 = 0, \lambda_0 = \log\left[\int_Y \exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k y^{\alpha_k}\right) dy\right]$ 。

求解参数 $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m]$ 和 $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m]$ 的具体过程见文献[10]。最终将所求问题转化为下面的优化问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{目标: } \begin{cases} \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T \\ \lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T \end{cases} \\ \text{最小化: } \tau(\lambda, \alpha) = \log\left[\int_Y \exp\left(-\sum_{k=1}^m \lambda_k y^{\alpha_k}\right) dy\right] \\ \quad + \sum_{k=1}^m \lambda_k M_Y^{\alpha_k} \end{array} \right. \quad (12)$$

其中 $M_Y^{\alpha_k}$ 是 Y 的 α_k 阶分数阶矩, 可采用式(10)进行计算。最终求得参数 $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m]$ 和 $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m]$ 后, 将其带入式(11)即可求得响应量的概率密度函数。

2.2 应用 Nataf 变换求得响应量的条件概率密度函数

根据概率论的相关知识可知, 响应量 Y 对输入变量 X_i 的条件概率密度函数 $f_{Y|X_i}(y)$ 可以表示为

$$f_{Y|X_i}(y) = \frac{f_{Y, X_i}(y, x_i)}{f_{X_i}(x_i)} \quad (13)$$

其中, $f_{Y, X_i}(y, x_i)$ 为 Y 和 X_i 的联合概率密度函数, $f_{X_i}(x_i)$ 为 X_i 的概率密度函数。

Nataf 变换^[11,12]是完成原始变量空间到独立标准正态空间转换过程的一个数学模型,可以用来求解 $f_{Y, X_i}(y, x_i)$ ($i = 1, \dots, n$), 它需要已知每个随机变量的边缘概率密度函数和随机变量之间的相关系数。前面已经求得了响应量的概率密度函数, 因此需求 Y 和 X_i 的相关系数:

$$\rho_i = \frac{\text{Cov}(Y, X_i)}{\sigma_Y \sigma_{X_i}} \quad (14)$$

其中, $\text{Cov}(Y, X_i)$ 为 Y 和 X_i 的协方差, σ_Y 和 σ_{X_i} 分别为 Y 和 X_i 的标准差。进一步展开得

$$\rho_i = \frac{E(YX_i) - E(Y)E(X_i)}{\sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)} \cdot \sigma_{X_i}} \quad (15)$$

其中, $E(\cdot)$ 是数学期望算子。

计算 $E(Y)$ 和 $E(Y^2)$ 时, 只需在式(10)中令 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$ 即可。而计算 $E(YX_i)$ 时, 采用下式:

$$\begin{aligned} E(YX_i) &= M_{YX_i}^1 = \int_X [\eta(x) \cdot x_i] f_X(x) dx \\ &\approx \int_X [[\eta(c)]^{1-n} [x_i \cdot \eta(x_i, c_{-i})] \\ &\quad \prod_{j=1, j \neq i}^n \eta(x_j, c_{-j})] [\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)] dx \\ &= [\eta(c)]^{1-n} \int_{X_i} x_i \cdot \eta(x_i, c_{-i}) f_{X_i}(x_i) dx_i \\ &\quad \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^n [\int_{X_j} \eta(x_j, c_{-j}) f_{X_j}(x_j) dx_j] \quad (16) \end{aligned}$$

需要指出的是在计算 $E(Y)$ 、 $E(Y^2)$ 和 $E(YX_i)$ 时, $\eta(x_i, c_{-i})$ 已经在计算 M_Y^0 时得到了, 因此没有增加响应函数的计算次数。

当得到 Y 和 X_i 的相关系数后, 就可以应用 Nataf 变换求得它们的联合概率密度函数。具体求解过程可以参考文献[15]。在求得 Y 和 X_i 的联合概率密度函数后, 就可以根据式(13)求得响应量 Y 对输入变量 X_i 的条件概率密度函数 $f_{Y|X_i}(y)$ 。

至此, 我们已经求得了响应量的概率密度函数和条件概率密度函数, 从而可以得到响应量的上侧 α 分位点和条件上侧 α 分位点。根据式(1)即可求得基于分位点的全局灵敏度指标。

3 算例分析

3.1 数值算例

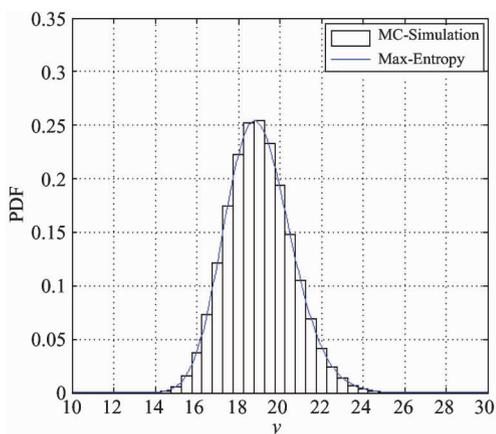
设响应函数为

$$Y = 2X_1 + X_2 + 3X_3 \quad (17)$$

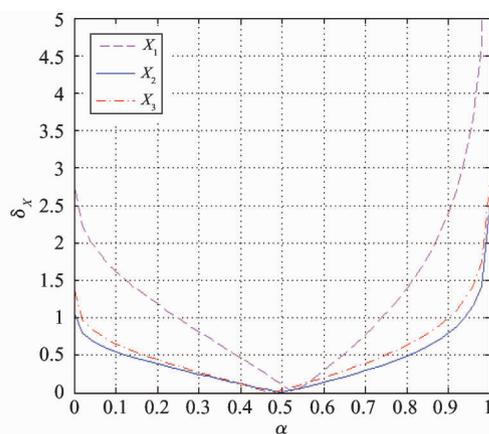
其中各个输入变量的分布类型以及分布参数见表1。计算所得结果如图2、表2所示。

表1 算例1中的各输入变量的分布

输入变量	分布类型	均值	变异系数
X_1	对数正态	2	0.2
X_2	对数正态	3	0.2
X_3	对数正态	4	0.1



(a) Monte Carlo 法和文中方法得到的 Y 的 PDF



(b) X_i 对 Y_α 的平均影响情况

图2 算例1的结果

图2(a)表示分别采用 Monte Carlo 模拟(MC-Simulation)方法和基于分数阶矩的极大熵(Max-Entropy)算法所得到的响应量的概率密度函数(PDF),

Monte Carlo 模拟方法所抽取的样本量为 10^5 , 图2(b)表示输入变量 X_1 、 X_2 、 X_3 对响应量 Y 的上侧 α 分位点的平均影响情况。表2比较了 $\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$ 与

$\delta_{X_i}^{CDF} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{P_f} dy^* \right)$ 的结果。

表2 算例1的结果

	X_1	X_2	X_3
$\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$	1.2884	0.4248	0.5217
$\delta_{X_i}^{CDF} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{P_f} dy^* \right)$	1.2986	0.4386	0.5506

从表2的结果可以看出各个输入变量对响应量的平均影响大小顺序为 $X_1 > X_3 > X_2$, 同时也验证了本文的基于分位点的全局灵敏度指标 δ_{X_i} 与基于分布函数和基于失效概率的全局灵敏度指标 $\delta_{X_i}^{CDF}$ 、 $\delta_{X_i}^{P_f}$ 的关系。

从图2中还可以得到给定概率水平 α 时, 各输入变量对响应量上侧分位点的平均影响大小顺序, 如 $\alpha = 0.4$ 时, $\delta_{X_1} = 0.4674$, $\delta_{X_2} = 0.1214$, $\delta_{X_3} = 0.1179$, 大小关系为 $\delta_{X_1} > \delta_{X_2} > \delta_{X_3}$, 此时 X_2 比 X_3 更重要。

本文采用 Nataf 变换所需响应函数的调用次数为 $n \times m + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16$; 若直接计算条件概率密度函数, 所需响应函数的调用次数为 $((n - 1) \times m + 1) \times m = (2 \times 5 + 1) \times 5 = 55$, 其中 n 是输入变量的维数, m 是积分点的个数。本文所用方法调用响应函数的次数较少。

3.2 工程算例1

如图3所示的屋架结构, 屋架的上弦杆和其它压杆采用钢筋混凝土杆, 下弦杆和其它拉杆采用钢杆。设均布载荷 q 作用于屋架结构, 根据结构力学的相关知识可以得到C点沿铅垂方向的位移为

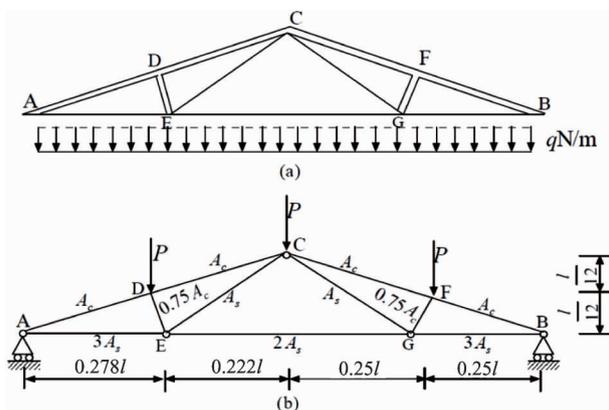


图3 屋架结构的简单示意图

$\Delta_c = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{3.81}{A_c E_c} + \frac{1.13}{A_s E_s} \right)$, 其中 A_c 和 E_c 为混凝土杆的横截面积和弹性模量, A_s 和 E_s 为钢杆的横截面积和弹性模量, l 为下弦杆的长度。考虑屋架的安全性和适用性, 以屋架顶端C点的向下挠度不大于3cm为约束条件, 由于分数阶矩仅适用于正的随机变量, 故而建立功能函数 $g(X) = 0.03/\Delta_c$ 。各输入变量的分布类型及其分布参数见表3。

表3 算例2中各输入变量的分布

输入变量	分布类型	均值	变异系数
均布载荷 (X_1) q (N/m)	正态分布	20000	0.07
杆长 (X_2) l (m)	正态分布	12	0.01
截面积 (X_3) A_c (m ²)	正态分布	0.04	0.12
截面积 (X_4) A_s (m ²)	正态分布	9.82×10^{-4}	0.06
弹性模量 (X_5) E_c (N/m ²)	正态分布	2×10^{10}	0.06
弹性模量 (X_6) E_s (N/m ²)	正态分布	1×10^{11}	0.06

计算所得结果如图4、表4所示。图4(a)表示分别采用 Monte Carlo 模拟方法和基于分数阶矩的极大熵算法所得到的响应量的概率密度函数, Monte Carlo 模拟方法抽取的样本量为 10^5 。图4(b)表示各个输入变量对响应量的上侧 α 分位点的平均影响情况。表4比较了 $\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$ 与 $\delta_{X_i}^{CDF} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{P_f} dy^* \right)$ 的结果。

从表4的结果可以看出各输入变量对响应量的平均影响大小顺序为 $X_1 > X_3 > X_4 > X_6 > X_2 > X_5$, 也验证了本文的基于分位点的全局灵敏度指标 δ_{X_i} 与基于分布函数和基于失效概率的全局灵敏度指标 $\delta_{X_i}^{CDF}$ 、 $\delta_{X_i}^{P_f}$ 的关系。

根据图4还可以得到给定概率水平 α 时, 各输入变量对响应量上侧分位点的平均影响大小顺序, 如 $\alpha = 0.4$ 时, $\delta_{X_1} = 0.006457$, $\delta_{X_2} = 0.003581$, $\delta_{X_3} = 0.006958$, $\delta_{X_4} = 0.003244$, $\delta_{X_5} = 0.003112$, $\delta_{X_6} = 0.003241$, 大小顺序为 $\delta_{X_3} > \delta_{X_1} > \delta_{X_2} > \delta_{X_4} > \delta_{X_6} > \delta_{X_5}$ 。此时 X_3 对响应量的影响最大。

采用 Nataf 变换调用响应函数的次数为 $n \times m + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$; 直接计算响应量的条件概率密度函数时所需响应函数的调用次数为 $((n - 1) \times m + 1) \times m = (5 \times 5 + 1) \times 5 = 130$, m, n 的含义与算例1中的相同。本文所采用的方法对响应函数的调用次数较少。

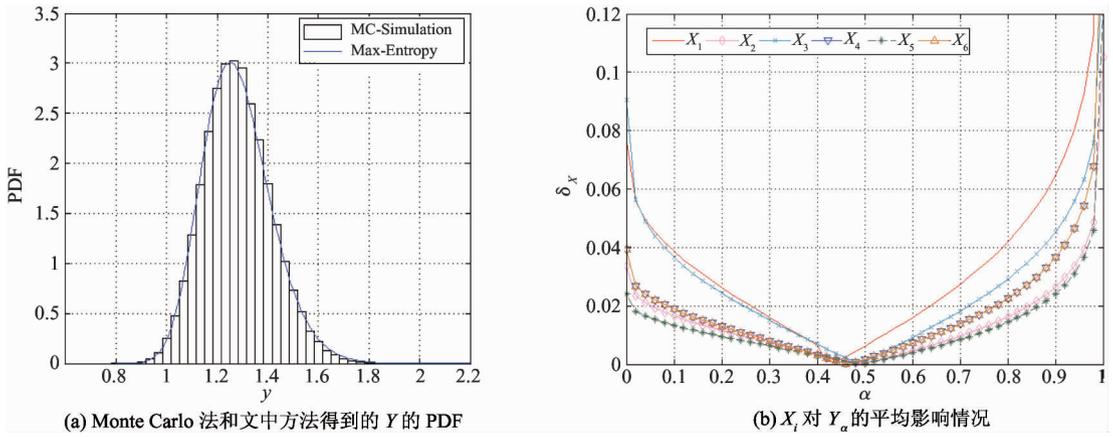


图4 算例2的结果

表4 算例2的结果

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$	0.0338	0.0138	0.0260	0.0182	0.0123	0.0181
$\delta_{X_i}^{CDF} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{PF} dy^* \right)$	0.0347	0.0146	0.0273	0.0187	0.0129	0.0195

3.3 工程算例2

如图5所示,矩形截面悬臂梁受到均布载荷,以其自由端的挠度为响应量的响应函数为 $g(\omega, b, L) = \omega b L^4 / (8EI)$ 。式中 ω, b, L, E, I 分别为单位载荷、截面尺寸、梁的长度、弹性模量、截面惯性矩。其中 E 为已知常量, $E = 26\text{GPa}$, I 是 b 的函数, 式为 $I = b^4/12$, 各变量的分布参数如表5所示。

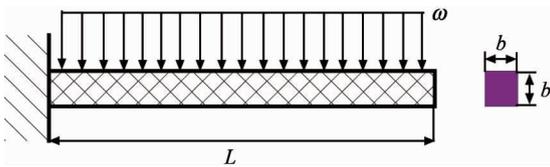


图5 悬臂梁结构

表5 算例3中各输入变量的分布参数

变量	均值 μ	标准差 σ	分布类型
ω (kN/m ²)	1000	80	正态
L (m)	6	0.9	正态
b (mm)	250	30	正态

计算结果如图6、表6所示。图6(a)表示分别采用 Monte Carlo 模拟方法和基于分数阶矩的极大熵算法所得到的响应量的概率密度函数, Monte Carlo 模拟方法抽取的样本量为 10^5 。图6(b)表示各个输入变量对响应量的上侧 α 分位点的平均影响情况。表6比较了 $\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$ 与 $\delta_{X_i}^{CDF} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{PF} dy^* \right)$ 的结果。

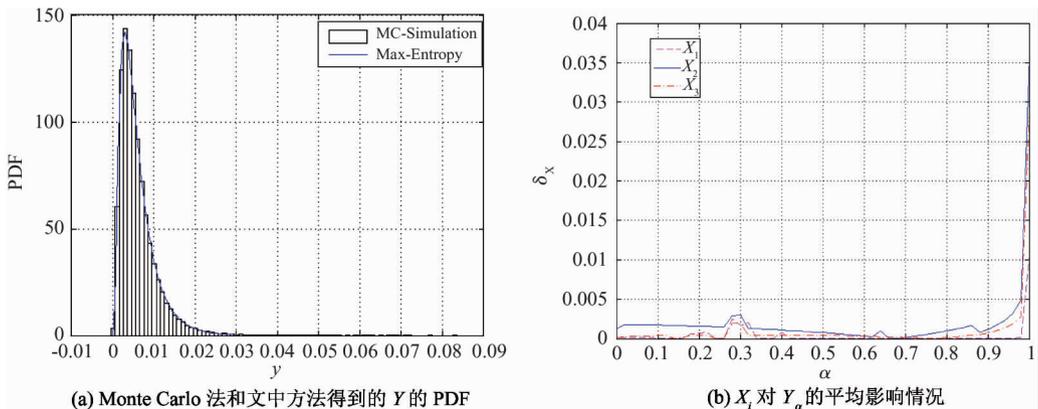


图6 算例3的结果

根据表6的结果可以看出,各输入变量对响应量的平均影响大小顺序为 $X_2 > X_3 > X_1$,同时也验证了 δ_{X_i} 与 $\delta_{X_i}^{CDF}$, $\delta_{X_i}^{Pf}$ 的关系。

从图6中还可以得到对于给定的概率水平 α ,各输入变量对响应量上侧分位点的平均影响大小顺序。如 $\alpha = 0.32$ 时, $\delta_{X_1} = 0.002078$, $\delta_{X_2} = 0.001311$, $\delta_{X_3} = 0.000471$,大小顺序为 $\delta_{X_1} > \delta_{X_2} > \delta_{X_3}$,此时 X_1 对响应量的上侧分位点的平均影响最大。

采用 Nataf 变换对响应函数的调用次数为 $n \times m + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16$,而直接计算响应量的条件概率密度函数需调用响应函数的次数为 $((n - 1) \times m + 1) \times m = (2 \times 5 + 1) \times 5 = 55$, m 和 n 的含义与算例1中的相同。

表6 算例3的结果

	X_1	X_2	X_3
$\int_0^1 \delta_{X_i} d\alpha$	0.000346	0.001908	0.000789
$\delta_{X_i}^{CDF} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{X_i}^{Pf} dy^* \right)$	0.000302	0.001623	0.000831

4 结论

灵敏度分析是研究模型各输入变量的不确定性对响应量的不确定性影响的相对大小,分析结果能够指导研究者如何有效地减小模型输出的不确定性。本文提出了一种基于分位点的全局灵敏度指标 δ_{X_i} ,它能够反映某个输入变量在其分布域内变化且给定概率水平 α 时,对响应量性能的上侧分位点的平均影响,从而可以指导研究者如何有效地控制各个输入变量。本文揭示了基于分位点的全局灵敏度指标与已有的基于分布函数和基于失效概率的全局灵敏度指标之间的关系,并采用维度缩减方法和基于分数阶矩的极大熵算法以及 Nataf 变换求解所提指标。最后将本文所提出的指标用于数值和工程算例,验证了本文的基于分位点的全局灵敏度指标与基于分布函数和基于失效概率的全局灵敏度指标的关系,得到了各个输入变量对响应量的上侧 α 分位点的平均影响程度,为设计者提供了参考依据。

参考文献

[1] Castillo E, Minguez R, Castillo C. Sensitivity analysis in optimization and reliability problems. *Reliab Eng Sys Saf*,

2008, 93(12): 1788-1800

[2] Sobol I M. Sensitivity analysis for non-linear mathematical models, *Mathematical Modeling and Computational Experiment*, 1993, 1: 407-414

[3] Saltelli A, Annoni P, Azzini P, et al. Variance-based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 2010, 181: 259-270

[4] Borgonovo E. A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771-784

[5] Sobol I M, Kucherenko S. Derivative based Global Sensitivity Measures and their link with global sensitivity indices. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, 79: 3009-3017

[6] Liu Q, Homma T. A new importance measure for sensitivity analysis. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 2010, 47(1): 53-61

[7] Cui L J, Lü Z Z, Zhao X P. Moment-independent importance measure of basic random variable and its probability density evolution solution. *Sci China Tech Sci*, 2010, 53: 1138-1145

[8] Rahman S, Xu H. A univariate dimension-reduction method for multidimensional integration instochastic mechanics. *Probab Eng Mech*, 2004, 19(4): 393-408

[9] Xu H, Rahman S. A generalized dimension-reduction method for multidimensional integration in stochastic mechanics. *Int J Numer Meth Eng*, 2004, 61(12): 1992-2019

[10] Zhang X F, Pandey M D. Structural reliability analysis based on the concepts of entropy, fractional moment and dimensional reduction method. *Structural Safety*, 2013, 43: 28-40

[11] Liu P L, Der Kiureghian A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1986, 1(2): 105-112

[12] Der Kiureghian A, Liu P L. Structural reliability under incomplete probability information. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(1): 85-104

[13] Inverardi P, Tagliani A. Maximum entropy density estimation from fractional moments. *Commun Stat Theory Meth*, 2003, 32(2): 327-45

[14] Tagliani A. Hausdorff moment problem and maximum entropy: a unified approach. *Appl Math Comput*, 1999, 105(2-3): 291-305

[15] 吕震宙,宋述芳,李洪双等. 结构机构可靠性分析及可靠性灵敏度. 北京:科学出版社,2009. 57-59

The global sensitivity based on quantile fractile and its solution

Xiao Sinan, Lu Zhenzhou, Zhang Leigang

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract

In order to investigate the effect of uncertainties of input variables on the quantile fractile the upper limit of the output performance of the products which satisfy a given probabilistic request, a global sensitivity analysis (GSA) index of the input variables based on the quantile fractile was defined. Under a given specific probability value, this sensitivity index can be used to completely assess the average effect of the input variables on the quantile fractile of the output performance when the input variables vary in their distribution ranges. Furthermore, the inherent relationship between the defined index and the existing distribution function (DF) based GSA index and the existing failure probability based GSA index was derived, and a method based on the concept of dimension reduction, a maximum entropy algorithm using fractional moments and the Nataf transformation method were used to efficiently calculate the proposed index. At last, one numerical example and two engineering examples were introduced to show the significant meaning of the proposed GSA index and demonstrate the precision and the efficiency of the proposed computational method simultaneously.

Key words: sensitivity analysis, quantile fractile, fractional moment, maximum entropy, dimension reduction, Nataf transformation