

压缩感知算法的关键参数设置研究^①任建^{②*} 许会^{③*} 李邦宇^{***} 周春源^{*}

(* 沈阳工业大学信息科学与工程学院 沈阳 110870)

(** 沈阳新松机器人自动化股份有限公司 沈阳 110168)

摘 要 针对压缩感知采样率选取问题,对压缩感知理论中的关键参数稀疏度和采样率的关系进行了研究。从理论和实验两方面对压缩感知采样过程中的样本个数进行了最小值论证。并在二维图像恢复过程中,对采样次数 M 进行扫描,用图像评价常用的信噪比 (PSNR)、均方差 (MSE) 与相似度等标准检验图像的恢复效果,实现了低采样率。采用两个场景图像进行了恢复实验,实验结果证明理论推导正确,实际可行,为将来压缩感知在信号采样方面应用奠定了基础。

关键词 压缩感知 (CS), C-近似确定性算法, 采样下界, 采样率, 图像恢复

0 引 言

压缩感知技术可以实现低于信号频率本身的欠采样。对信号和图像采样的传统方法依据 1928 年由美国工程师 H. 奈奎斯特 (Nyquist) 提出,1948 年由 C. E. 香农 (Shannon) 加以说明的奈奎斯特采样定理,根据这一定理,采样速率达到信号带宽的两倍以上时,才能由采样信号精确地重建原始信号。如今,人们需要获取的信息量越来越多,信号的带宽也越来越大,采样速率的要求也越来越高,奈奎斯特采样速率有时技术上很难实现且所需的硬件成本昂贵,从而为信息的获取、处理、传输的进一步发展制造了瓶颈。另外,采样所得信号包含大量冗余的信息,采样结果的利用效率低。通常在采集大量信息后,会经过压缩来传输或保存,造成了资源的巨大浪费。压缩感知 (compressive sensing, CS) 技术能使远低于奈奎斯特采样定理标准下的采样数据实现信号的精确重构。CS 理论源于 Kashin 创立的范函分析和逼近论,2006 年由 Candès^[1,2], Romberg^[3], Tao^[4] 和 Donoho 等人构造了具体的算法。CS 采用压缩感采样和压缩在同一步骤进行。采样所得的测量值并非信号本身,而是原信号在一测量阵上的投影,所得投影数可称为采样数 M ——和采样次数等价。从数学

角度看,每个测量值是传统理论下的每个样本信号的组合函数,即一个测量值已经包含了所有样本信号的少量信息。由于所采数据包含了原信号中绝大部分信息,原信号中为零或数值很小的数据对整体信号来说不是那么重要,所以可用很少的数据进行恢复,也就是解码过程。解码过程不是编码的简单逆过程,而是在盲源分离中的求逆思想下,利用信号稀疏分解中已有的重构方法在概率意义上实现信号的精确重构或者一定误差下的近似重构。

CS 理论在图像处理、核磁共振成像^[5]、雷达探测等领域备受关注,目前 Rice 大学已成功设计出了一种基于压缩感知的新型单像素相机,为压缩感知的实际应用提供了有力支持^[6]。该理论指出:只要信号 $x(N$ 维)是可压缩的或在某个变换域是 K 稀疏的 (即稀疏度是 K),就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵 $A(M \times N, M \ll N)$ 将变换所得高维信号投影到一个低维 (M 维)空间上,然后通过求解一个优化问题从这些少量的投影中以高概率重构出原信号,可以证明这样的投影包含了重构信号的足够信息^[7,8]。在该理论框架下,采样速率不再取决于信号的带宽,而在很大程度上取决于两个基本准则:稀疏性和非相干性。 M 取值即是恢复算法所需要的感测次数,关系到采样率的大小。关于 M 的取值范围在国内还尚未有文献证明。在信号处理领域,

① 863 计划 (2013AA041005) 资助项目。

② 女,1981 年生,博士生;研究方向:无损检测与成像技术,信号处理技术,集成电路设计;E-mail: rj002691@163.com

③ 通讯作者,E-mail: xhimage@163.com

(收稿日期:2013-11-06)

采样率越大恢复效果越好,因此关注 M 取值的下界。本文对压缩感知的关键参数稀疏度和采样率的关系进行了研究。

1 采样次数下界的数学证明

压缩感知的重要组成部分是对信号的感测,采样次数是关键参数。对于 M 值的确定在文献[9]中有相关证明。稀疏恢复是存在采样次数的下限要求的,对于具有 K 稀疏度的原始信号 $x(x \in \mathbb{R}^n)$,先从简单的确定性例子说起:假如存在信号 $x = y + z$,向量 y 来自集合 Y , Y 是一个二进制误差校验码,其最短距离是 $\Omega(K)$, K 是码文的权重。另外,向量 z 来自 l_1 球(称作 B)。

在压缩感知的常用恢复算法中,等效的 l_1 范数最小化方法较为常用。 $M \times N$ 测量阵 Θ , 恢复信号为 x' , 现定义 $\hat{x}$ 如下式所示:

$$\hat{x} = \underset{x': \Theta x' = \Theta x}{\operatorname{argmin}} \|x'\|_1 \quad (1)$$

定义一个常数 C 使其保证稀疏参数 K 时服从下面 C 近似 l_1/l_1 的恢复稀疏近似 $\hat{x}$, 即等式

$$\|x - \hat{x}\|_1 \leq C \min_{K\text{-sparse } x'} \|x - x'\|_1 \quad (2)$$

定义一个 C -近似确定性 l_1/l_1 恢复算法为一对 $(\Theta, \mathcal{A})$, 其中 Θ 是一个 $M \times N$ 观测矩阵并且 $\mathcal{A}$ 是一个对任何 x , 并映射在一些服从式(2)的 Θx 的算法。

现定义一个 C -近似随机 l_1/l_1 恢复算法为一对 $(\Theta, \mathcal{A})$, 其中 Θ 是从 $M \times N$ 测量矩阵分布中选取的随机变量, 并且 $\mathcal{A}$ 是一个对任何 x , 至少有 $3/4$ 可能性服从式(2)的映射算法。 $(\Theta, \Theta x)$ 的算法用 $B_p^n(r)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 内半径为 r 的 l_p 球; 如果内容清楚, 可以忽略上标 n 。

现在要推导对于所有 C -近似确定性算法 M 取值的下界。首先我们用离散体量界(引理1)找到一个所有点之间距离都至少为 K 的大集合 Y 。然后我们在 Y 中每个点周围小 l_1 球的图像上用另一个体量界(引理2)。如果 M 取值很小, 其中的某两个图像会碰撞。碰撞区域中点的恢复算法必须产生接近 Y 中这两点的值。这是不可能的, 所以 M 取值必须大。

引理1 (Gilbert-Varshamov) 对任何 $q, K \in \mathbb{Z}^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon < 1 - 1/q$, 存在一个 K 个1的二进制向量的集合 $Y \subset \{0, 1\}^{qK}$, 使 Y 有最小汉明距离 $2\varepsilon K$ 和 $\log |Y| > (1 - H_q(\varepsilon))K \log q$, 其中 H_q 是 q 元熵函

$$\text{数 } H_q(x) = -x \log_q \frac{x}{q-1} - (1-x) \log_q (1-x)。$$

引理2 取一个 $M \times N$ 实数矩阵 Θ , 正实数 ε , p, λ 和 $Y \subset B_p^n(\lambda)$ 。如果 $|Y| > (1 + 1/\varepsilon)^M$, 存在 $z, \bar{z} \in B_p^n(\varepsilon \lambda)$ 和 $y, \bar{y} \in Y$, 使得 $y \neq \bar{y}$ 和 $\Theta(y + z) = \Theta(\bar{y} + \bar{z})$ 。

定理 任何 C 近似确定性恢复算法, 必须有式

$$M \geq \frac{1 - H_{\lfloor N/K \rfloor}(1/2)}{\log(4 + 2C)} k \log \lfloor \frac{N}{K} \rfloor \quad (3)$$

下面通过两个引理对定理进行证明。令 Y 是一个最小汉明距离为 K 的 K 稀疏 N 维二进制向量的最大集, 并且令 $\gamma = 1/(3 + 2C)$ 通过引理1, 当 $q = \lfloor N/K \rfloor$, 得 $\log |Y| > \left(1 - H_{\lfloor \frac{N}{K} \rfloor}\left(\frac{1}{2}\right)\right) k \log \lfloor \frac{N}{K} \rfloor$ 。

假设这个定理不成立, 那么 $M < \log |Y| / \log(4 + 2C) = \log |Y| / \log(1 + 1/\gamma)$, 或者 $|Y| > (1 + 1/\gamma)^M$ 。因此引理2告诉我们在 $\Theta(y + z) = \Theta(\bar{y} + \bar{z})$ 时, $y, \bar{y} \in Y$ 和 $z, \bar{z} \in B_1(\gamma K)$ 。

令 ω 为在 $\Theta(y + z)$ 上进行恢复算法运算的结果。根据确定性恢复算法的定义得到下式:

$$\|y + z - \omega\|_1 \leq C \min_{K\text{-sparse } y'} \|y + z - y'\|_1 \quad (4)$$

$$\|y - \omega\|_1 - \|z\|_1 \leq C \|z\|_1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|y - \omega\|_1 &\leq (1 + C) \|z\|_1 \\ &\leq (1 + C) \gamma K = \frac{1 + C}{3 + 2C} K \end{aligned} \quad (6)$$

相似地, $\|\bar{y} - \omega\|_1 \leq \frac{1 + C}{3 + 2C} K$, 所以 $\|y - \bar{y}\|_1 \leq$

$$\|y - \omega\|_1 + \|\bar{y} - \omega\|_1 = \frac{2 + 2C}{3 + 2C} K < K。$$

但这与 Y 的定义冲突, 所以 M 取值必须足够大。

如果 C 是个非零常数, 那么 $M = O(K \log(N/K))$ 。该值确定了压缩感知算法中感测次数的下界。也就是每次算法恢复中所需要的最少测量值。

2 基于压缩感知的图像恢复

压缩感知理论之所以能够颠覆奈奎斯特准则的采样速率, 根本上是因为它能够通过一定算法, 将原始信号从极少的采样值中重构出来。重构算法归纳起来可以分为两类: 凸松弛法和贪婪追踪算法。贪婪迭代算法为: 先寻找到所有位置中的极大值, 把它的值和位置记录下来; 下一次迭代, 再记录此次迭代中的极大值和位置; 继续迭代直到此极大值已经小

于设定阈值就停止迭代。通过在每次迭代时选择一个局部最优解来逐渐逼近原始信号,最终在规定的误差下实现对原始信号的最佳估计。相当于求解 l_0 范数最小化问题。如匹配追踪(MP)算法、正交匹配追踪(OMP)算法、分段正交匹配追踪算法(StOMP)和正则化 OMP(ROMP)算法等。

凸松弛法是将非凸优化问题转化成凸优化问题,把 l_0 范数最小化直接转化为 l_1 范数最小化问题,并通过凸优化方法求解^[10],得到原始信号的最佳逼近。这是线性规划类算法,如基追踪算法(BP)、内点法、梯度追踪算法和迭代阈值法^[11]。

贪婪迭代类算法比凸松弛算法所需要的计算复杂度低,但相对需要更多的观测值。

针对于感测次数下界的理论结果,仿真实验采用二维图像恢复的方法进行验证。两个场景均使用计算复杂度较低的正交匹配追踪法(OMP)恢复。图片均是 8 位灰度图像,每个像素由 0 到 255 个灰阶组成,实际上可以看作是 256×256 的矩阵,矩阵中每个元素数字范围是 0 到 255 的整数。对于大多数图像在小波上是稀疏的特点,将图像进行小波变换,即稀疏化过程。再用高斯白噪声矩阵作为测量矩阵,稀疏后的矩阵乘上 $M \times 256$ 的测量矩阵使之降到 M 维,即压缩过程。用得到的测量值进行最小 l_1 范数求解,再进行小波逆变换,得到重构后的图像,即恢复过程。压缩感知图像处理的整体流程图如图 1 所示。

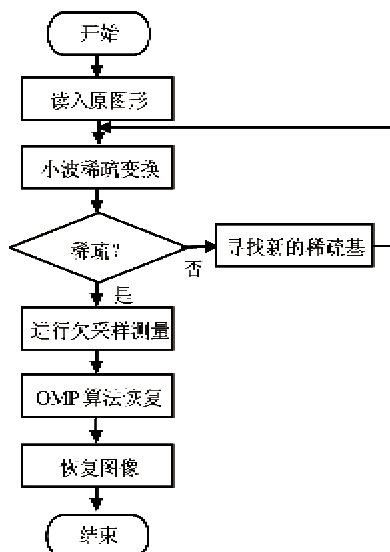


图1 压缩感知图像处理流程图

本次恢复图像实验采用的各种参数包括:小波变换作为稀疏基,高斯白噪声作为 OMP 算法的测量

阵,采样次数 M 的扫描次数是 40、60、80、100、120、140、160、180。

验证仿真的硬件环境如下: Intel Duo CPU 2.80Hz,内存2.96GB,采用的操作系统为 MS Windows XP。采用 Matlab 软件进行仿真。图 2 显示的是软件操作界面。

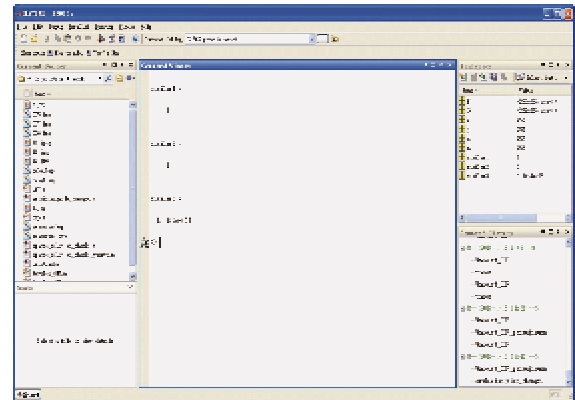


图2 Matlab 操作界面

图片恢复首先要验证其稀疏度,先对被恢复图像进行稀疏测试,验证其是否具有稀疏性。本文图像稀疏度定义为小波系数中非零元素的个数。稀疏度仿真过程如图 3 所示。

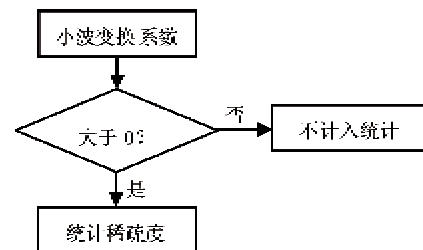


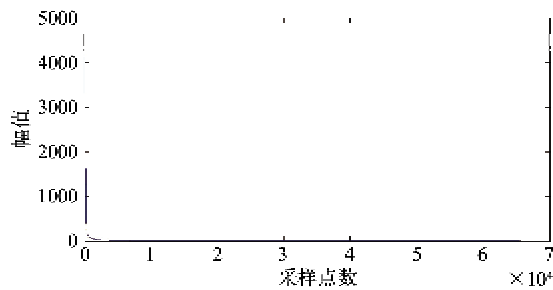
图3 稀疏度仿真说明

场景一的稀疏度仿真如图 4 所示,可见此二维图像在小波基上是稀疏的。图 4(a)是整体稀疏后的结果,放大以后得到图 4(b),表示不稀疏部分。从结果可见像素总点数是 65536,变换以后的二维稀疏度 $K \approx 6000$ 。

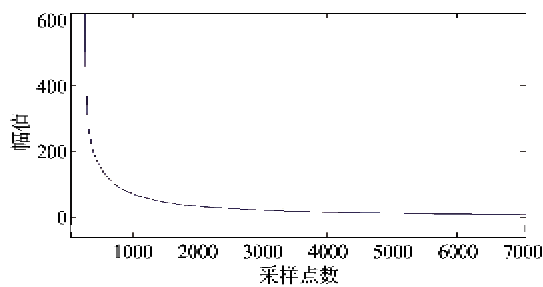
场景一实验结果如图 5 所示,图 5(b)采样次数为 120。

采样率定义为采样次数与像素点的比值,在不同采样率下对图像的 MSE 、 $PSNR$ 和相似度(SIMILARITY)进行分析,结果如表 1、表 2、图 6 所示。

场景二实验恢复结果如图 7 所示,采样次数取 100。

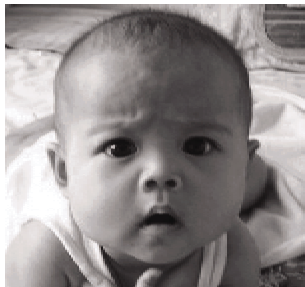


(a) 小波变换后稀疏检测



(b) 稀疏检测放大后的结果

图 4 图片稀疏度测试



(a) 原图像



(b) 恢复图像

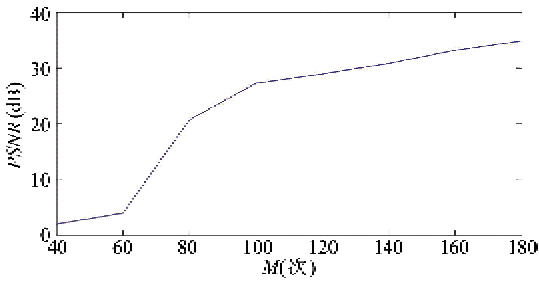
图 5 CS 实验场景一恢复图像

表 1 场景一测量次数 M 与 MSE 、 $PSNR$ 和相似度数据

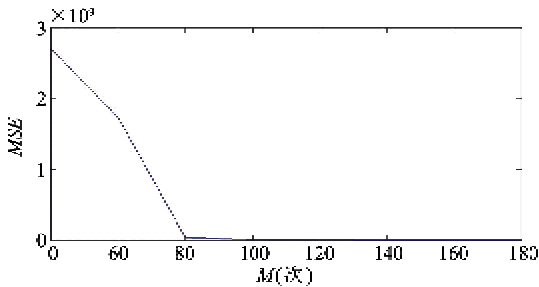
M	采样率 (%)	MSE ($\times 10^9$)	$PSNR$ (dB)	$SIMILARITY$ (%)
40	2.441	2.7007	1.9808	15.41
60	5.493	1.7299	3.9155	21.03
80	9.765	0.0362	20.7057	65.86

(续表)

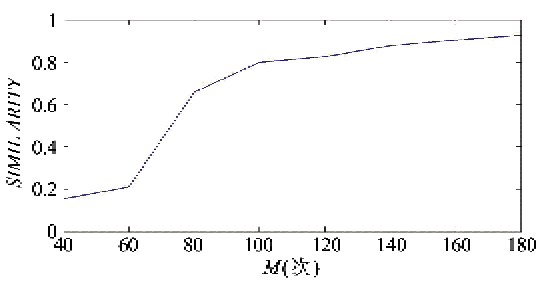
100	15.259	0.0080	27.2542	79.93
120	21.973	0.0054	28.9995	82.60
140	29.907	0.0035	30.8498	87.85
160	39.063	0.0020	33.2168	90.44
180	49.438	0.0014	34.9076	92.76



(a) PSNR 扫描图像



(b) MSE 扫描图像



(c) 相似度扫描图像

图 6 场景一测量次数 M 与 MSE 、 $PSNR$ 和相似度关系



(a) 原图像



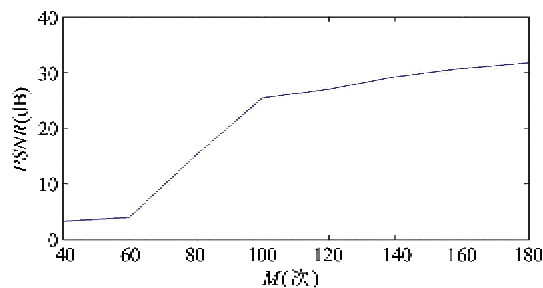
(b) 恢复图像

图 7 CS 实验场景二恢复图像

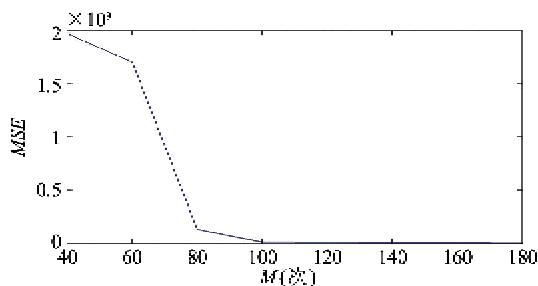
场景二在不同采样率下对图像的 MSE 、 $PSNR$ 和相似度进行分析,结果如表 2、图 8 所示。

表 2 场景二测量次数 M 与 MSE 、 $PSNR$ 和相似度数据

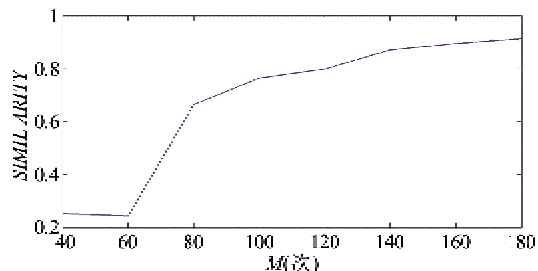
M	采样率 (%)	MSE ($\times 10^3$)	$PSNR$ (dB)	$SIMILARITY$ (%)
40	2.441	1.9668	3.3581	25.29
60	5.493	1.7006	3.9895	24.38
80	9.765	0.1310	15.1224	66.38
100	15.259	0.0121	25.4684	76.46
120	21.973	0.0085	26.9879	79.85
140	29.907	0.0050	29.2680	87.04
160	39.063	0.0036	30.6917	89.45
180	49.438	0.0029	31.7445	91.26



(a) PSNR 扫描图像



(b) MSE 扫描图像



(c) 相似度扫描图像

图 8 场景二测量次数 M 与 MSE 、 $PSNR$ 和相似度关系

从实验结果可见,测量次数 M 取值越大: $PSNR$ 越大, MSE 越小,相似度越高,恢复效果越好。根据样本图像的直观扫描结果,场景一 M 取值在 80 左右时,恢复效果有明显的提高。与推导结果 $M = K$

$\log(N/K)$, 换算到一维的采样次数 $M \approx 79$ 相符合。场景二图片大小仍然为 256×256 , 位深为 8。稀疏度结果为 6800, 计算结果显示 81 为采样值下界, 与实验结果相符合。场景一、二实验证明计算结果是最小下界, 实际算法中应该略大于此值, 恢复效果质量才较高。

3 结论

压缩感知(CS)作为采样和压缩同时进行的一种新型信号获取方式具有广泛的应用场景,其感测次数 M 的取值决定了恢复信号所解方程的个数。 N 是需要求解的未知数个数,CS 理论的先进思想在于 $N \gg M$, 这是一个病态问题。在被恢复对象稀疏先验的已知条件下,利用 l_1 范数最小化求解来解决由非凸的 l_0 范数所带来的高计算复杂度困难。采用所需方程最少的情况下得到最佳的恢复效果就是寻找最小 M 值的过程。本论文寻找一种 C -近似确定性算法的方法求证了 M 取值的下界 $M = O(K \log(N/K))$ 。最后采用 OMP 算法进行图片恢复实验证明了该值是恢复算法感测的最少次数。

采样率虽然是有理论下限值,但在压缩感知的实际应用领域仍然存在着工程上的不同的有效恢复标准。这样就需要具体问题具体分析。在遵循最小值的基础上微调感测次数,要求既达到 CS 的欠采样目的,又能实现较好的数据还原。一般在 OMP 算法恢复的过程中可以设置停止条件,这样能较好地控制还原标准。另外对于压缩感知采样次数的上界的理论研究还没有开始。随着压缩感知的应用推广以及领域的拓展,采样率最大值的选取仍然具备实际意义,其理论推导和数值确定可以作为日后研究的一个方向。

参考文献

- [1] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans Information Theory*, 2006, 52(4): 489-509
- [2] Candès E, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223
- [3] Candès E, Romberg J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions. *Foundations of Compute Math*, 2006, 6(2): 227-254

- [4] Candès E, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52 (12): 5410-5415
- [5] Wainwright M. Information-theoretic bounds on sparsity recovery in the high-dimensional and noisy setting. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, 2007. 961-965
- [6] Kremer I, Nisan N, Ron D. On randomized one-round communication complexity. *Computational Complexity*, 1999, 8(1): 21-49
- [7] Kane D, Nelson J, Woodruff D. On the exact space complexity of sketching and streaming small norms. In: *SO-DA '10 Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, PA, USA, 2010. 1161-1178
- [8] Strohmer, Thomas. Measure what should be measured: progress and challenges in Compressive Sensing. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(12): 887-893
- [9] Piotr I, Eric P. Lower bounds for sparse recovery. In: *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. PA, USA, 2010. 1190-1197
- [10] 端木春江, 肖艳丽. 压缩感知重构匹配类算法分析. *计算机时代*, 2012, (4): 16-17
- [11] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33-61

Study on key parameters of compressed sensing algorithm

Ren Jian*, Xu Hui*, Li Bangyu**, Zhou Chunyuan*

(* Faculty of Information Science & Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870)

(** SIASUN Robot & Automation Co., Ltd, Shenyang 110168)

Abstract

The relationship between the key parameter sparsity and the sampling rate in the compressive sensing (CS) theory was studied for the determination of the CS sampling rate. The minimum number of sampling times in a CS sampling process was carried out and proved theoretically and experimentally. In the two-dimensional image recovery process, the number of sampling times, called M , was scanned, and the parameters including peak signal to noise ratio (PSNR), mean square error (MSE) and the similarity, were used to test the effect of image recovery evaluation to achieve the low sampling rate. Two images were used in the restoration experiment, and the results show that the theoretical derivation is correct and practical, and it is of significance for future application of compressive sensing in signal sampling.

Key words: compressive sensing (CS), C-approximate deterministic recovery algorithm, sampling lower bound, sampling rate, image recovery