

基于 PCA 的有色噪声环境下卡尔曼滤波算法<sup>①</sup>刘楠<sup>②</sup> 宋文龙<sup>③</sup>

(东北林业大学机电学院 哈尔滨 150040)

**摘 要** 针对卡尔曼滤波处理有色噪声存在精度和可靠性不高的问题,提出了利用主成分分析(PCA)处理卡尔曼滤波的算法。该算法充分利用卡尔曼滤波的预测功能,以卡尔曼预测值为中心对接收信号进行加窗处理,对窗口内的数据进行主成分分析得到预测值,然后对预测值进行修正,在滤波过程中不断在窗口内估计修正参数,既可以减少运算复杂度,又可以避免过分依赖模型先验知识。最后给出了仿真实验,结果表明,该算法实现简单,均方误差低,稳定性好,大大减少了计算复杂度,能更为有效地对系统进行状态估计。

**关键词** 卡尔曼滤波,有色噪声,主成分分析(PCA),预测值,状态估计

## 0 引言

卡尔曼滤波越来越多地用于动态数据处理中。卡尔曼滤波是一个不断预测、修正的递推过程,求解时不需要存储大量的观测数据,当得到新数据时,可随时算出新的参数滤波值,便于得到实时的观测结果。但是,经典卡尔曼滤波理论是在状态噪声和观测噪声均为高斯白噪声假设下得到的<sup>[1]</sup>,对于实际的系统,存在观测噪声和状态噪声可能为有色噪声的情况。这时若将有色噪声作为白噪声用于卡尔曼滤波中进行数据处理,将影响结果的精度和可靠性。例如用 GPS 载波三差观测量进行动态定位,若不考虑其相关性会导致滤波发散或失真<sup>[2]</sup>,若考虑其相关性,就要研究有色噪声条件下的卡尔曼滤波问题。针对上述问题,很多文献提出了有色噪声环境下的卡尔曼滤波方法。例如文献[3]提出了 LMS 自适应滤波方法,文献[4]提出了依赖于动力学模型的先验知识的抗差滤波方法;文献[5]提出了增广卡尔曼滤波方法,该方法计算精确度较高,但是计算复杂度高,不便于实现。本文提出了基于主成分分析(Principal Components Analysis, PCA)的卡尔曼滤波算法,该算法以卡尔曼预测值为中心对接收信号进行加窗处理,对窗口内数据进行主成分分析,使得估

计范围缩小,运算量降低。同时,PCA 从统计学角度来说是一种多元统计方法,其优点是在无参限制条件下,原始数据集变化空间后使样本的相关性降至最低。将 PCA 用于卡尔曼滤波中,可以不必做动力学模型的分布假设<sup>[6]</sup>,能在较少的时间精确地进行状态估计。

## 1 基于 PCA 的卡尔曼滤波模型

卡尔曼滤波是在动态噪声和观测噪声皆为白噪声的情况下推导出来的<sup>[7]</sup>,但是动态数据处理实践中经常遇到有色噪声,这势必影响卡尔曼滤波的精度和可靠性,为此本文提出了在有色噪声环境下利用 PCA 提高卡尔曼滤波状态估计精度的方法。该方法将数据空间通过正交变换映射到低维子空间中,而相应的基向量组应满足正交性,且由其向量组成的低维子空间最优地考虑了数据的相关性<sup>[8]</sup>。所以,以卡尔曼预测值为中心对接收信号进行加窗处理,对窗口内数据进行 PCA 处理,如图 1 所示,在原数据集变换后使数据样本的互相关降低到最小。

假设  $y(k) = \{y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)\}$  表示原始数据,  $Y_{1 \times N-1} = [y(1), y(2), \dots, y(N-1)]$  表示第  $N-1$  时刻 PCA 需处理的数据,目的是希望  $M < D$  维信息近似地表达  $y(k)$ , 即

① 国家自然科学基金(31270757),高等学校博士学科点专项科研基金(20110062110002)和中央高校基本科研业务费专项资金(DL12BB11, DL12DB05)资助项目。

② 女,1980 年生,博士;研究方向:无线电导航,信号处理;联系人, E-mail: lliunan@126.com

③ 通讯作者, E-mail: liunan@126.com

(收稿日期:2013-12-04)

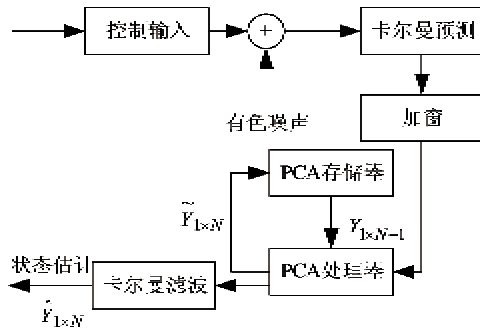


图1 卡尔曼滤波模型

$$\tilde{y}(k) = \sum_{i=1}^N z r_i u_i + \sum_{i=m+1}^D b_i u_i \quad (1)$$

其中,  $z r_i$  表示数据的特征分量;  $b_i$  表示数据的共有分量;  $u_i$  为正交基向量组。

构造目标函数

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|y(k) - \hat{y}(k)\|^2 \quad (2)$$

为了最优化目标函数,需要分解原始数据的协方差矩阵,将其转换为非相关的数据集  $\hat{y}(k)$ 。

## 2 算法描述

卡尔曼滤波对多个测量数据和多个参数进行处理,给出无偏最小的均方差估计,在每次运算时,必须考虑前一个估计值和最近一个测量值来估计当前值<sup>[9]</sup>。卡尔曼滤波的状态方程和量测方程为

$$x(n+1) = Ax(n) + \Gamma \xi(n) \quad (3)$$

$$y(n) = Cx(n) + \eta(n)$$

式中,  $x(n)$ 、 $y(n)$  为状态矢量和测量矢量;  $A$ 、 $\Gamma$  和  $C$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times p$  和  $q \times n$  常数矩阵。另外,有

$$\xi(n) = M\xi(n-1) + \beta(n) \quad (4)$$

$$\eta(n) = N\eta(n-1) + \gamma(n) \quad (5)$$

式中,  $\xi(-1) = \eta(-1) = 0$ ,  $\beta(n)$  和  $\gamma(n)$  为均值为零的不相关高斯白噪声,  $M$  和  $N$  为  $p \times p$  和  $q \times q$  常数矩阵,利用噪声序列  $\xi(n)$  和  $\eta(n)$  满足式(4)和(5)构造有色噪声。

经过测量更新阶段后的卡尔曼滤波方程为

$$\hat{x}(n) = A\hat{x}(n-1) + G(n)[y(n) - Ny(n-1) - H\hat{x}(n-1)] \quad (6)$$

式中,

$$\begin{cases} G(n) = AP(n-1)H^T(HP(n-1)H^T + R)^{-1} \\ P(n) = (A - G(n)H)P(n-1)A^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \\ H = CA + NC \end{cases}$$

最佳预测为

$$\hat{y}(n) = C\hat{x}(n) + \eta(n) \quad (8)$$

以  $\hat{y}(n)$  为中心加窗,对窗口内的接收信号进行 PCA 计算估计出测量值  $y(n)$ ,再进一步计算  $\hat{x}(n)$ ,再对  $x(n+1)$  进行最佳估计,这种计算方法避免了对全部信号进行主成分分析,从式(7)、(8)可以看出,参数迭代过程没有过分依赖先验知识,同时计算量控制在窗口内循环。具体算法如下:

步骤1:系统信号输入,并根据式(4)、(5)加入有色噪声。

步骤2:产生零均值数据  $\bar{Y}$ ,初始化卡尔曼滤波各项参数,  $Q$  由系统状态方程决定,  $R$  为 PCA 测量误差方差。

步骤3:根据(7)计算  $P(n)$ 、 $G(n)$ 、 $\xi(n)$ 。

步骤4:根据式(8)预测  $\hat{y}(n)$ 。

步骤5:以  $\hat{y}(n)$  为中心对信号加窗。

步骤6:对  $\bar{Y}$  进行主成分分析,对相关矩阵进行特征分解,其各特征值  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$  构成矩阵  $P_{1 \times k}$ 。

步骤7:对滑窗内接收信号做主成分分析,估计  $y(n)$ 。

步骤8:  $n = n + 1$ ,若  $n < N$ ,则转至步骤3,否则转至下一步。

步骤9:进行状态估计,输出结果。

## 3 计算机仿真

为了检验卡尔曼滤波的可行性,作为一个过程要给出具体实施定量和定性分析。设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h & h^2/2 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

式中,  $h > 0$  为采样时间。根据系统可行性定义<sup>[10]</sup>,计算  $M_A = [\Gamma \ A\Gamma \ A^2\Gamma] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & h & h^2/2 & 1 & 2h & 2h^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & h & 0 & 1 & 2h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_A =$$

$$[C \ CA \ CA^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2/2 \\ 1 & 2h & 2h^2 \end{bmatrix} \text{ 的秩都是 3, 系统}$$

是可控的和可实现的。为了验证所给算法的有效性,在主频 3.5GHz 的 Intel i7 4770K CPU, 双通道 DDR3 的 32GB 内存环境下利用 Matlab 软件进行了

计算机仿真。

实验一:给定某导航系统模型为

$$x(k+1) = Ax(k) + B\bar{u}(k) + B_1w(k) \quad (9)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0.008 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0077 \\ 0 & 0 & 0.9231 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0003 \\ 0.0769 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.007 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

$x(k)$  中的变量依次记为  $x_1, x_2, x_3$ 。将基于 PCA 的卡尔曼滤波与增广卡尔曼运用于上述问题进行比较,结果如表 1 所示。

表 1 均方误差对比分析

| 滤波方式          | 均方误差   |        |        | 最大绝对误差 |        |        |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|               | $x_1$  | $x_2$  | $x_3$  | $x_1$  | $x_2$  | $x_3$  |
| 增广卡尔曼滤波       | 0.0763 | 0.1257 | 0.2035 | 0.1510 | 0.2103 | 0.3002 |
| 基于 PCA 的卡尔曼滤波 | 0.0176 | 0.0270 | 0.0258 | 0.0281 | 0.0386 | 0.0392 |

由表 1 可见,PCA 滤波效果优于增广滤波,PCA 滤波能较好地处理有色噪声干扰问题,状态变量均方误差曲线如图 2~图 4 所示。

由图 2~图 4 曲线可知,采用 PCA 方法能更准确地对系统状态进行估计,通过 PCA 处理,使得噪声干扰降低,获得更加准确的状态估计结果。

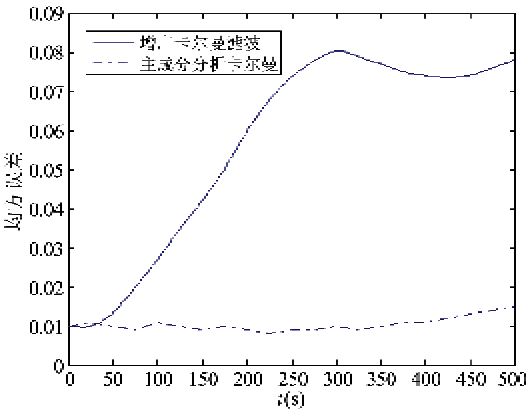


图 2  $x_1$  均方误差曲线

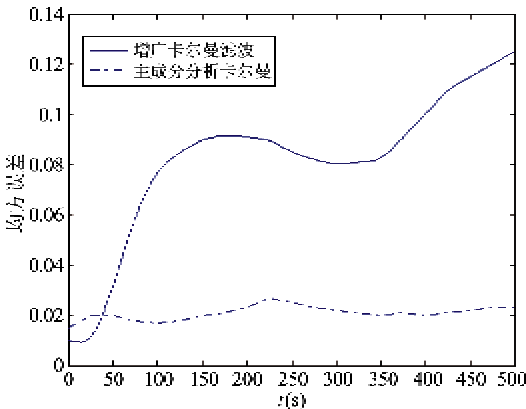


图 3  $x_2$  均方误差曲线

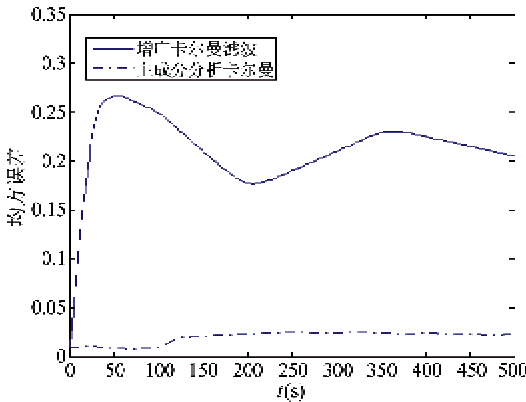


图 4  $x_3$  均方误差曲线

实验二:给定某飞行器俯仰运动模型为

$$A = \begin{bmatrix} -0.5680 & 17.9800 \\ 1.0000 & -1.2370 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1750 & 0.1750 \\ -0.0010 & -0.0010 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 17.9800 \\ -1.2370 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

$x(k)$  中的变量  $x_4$  为俯仰角速,  $x_5$  为俯冲角,  $w$  为风均干扰,色噪声方差为 0.001。将 PCA 与抗差卡尔曼滤波用于上述问题进行比较,仿真结果如图 5 和图 6 所示,图 7 为信噪比恒定时三种方法的归一化估计误差的概率分布。

传统的卡尔曼滤波算法的计算复杂度为  $O(N^2)$ , 而利用 PCA 方法后其计算复杂度为  $O(N \log N)$ 。同时,基于 PCA 的卡尔曼滤波曲线更平稳,说明 PCA 方法的稳定性更好,适应性更强。PCA 算法的均方误差比抗差卡尔曼滤波及增广卡尔曼滤波低 2 到 3 个数量级,这是由于信噪比的变

化对抗差卡尔曼滤波及增广卡尔曼滤波的影响较大,本文算法在对接收信号使用主成分分析之后,通过得到的信息对预测值进行修正,降低了信噪比对估计精度的影响。从仿真图中可以看出,基于PCA方法的卡尔曼滤波估计误差小于0.02的概率为90.13%,而抗差卡尔曼滤波和增广卡尔曼滤波的误差概率分别为79.35%和61.68%,这是因为抗差卡尔曼滤波和增广卡尔曼滤波没有对测量值进行加窗

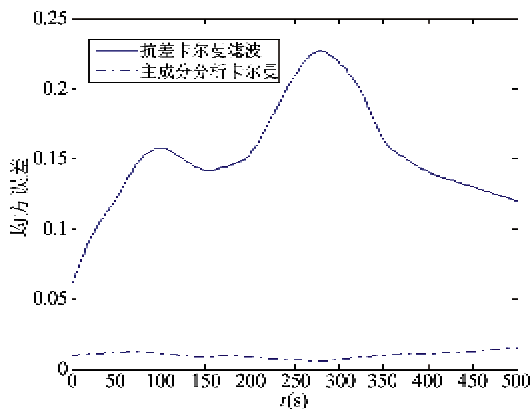


图5  $x_4$  均方误差曲线

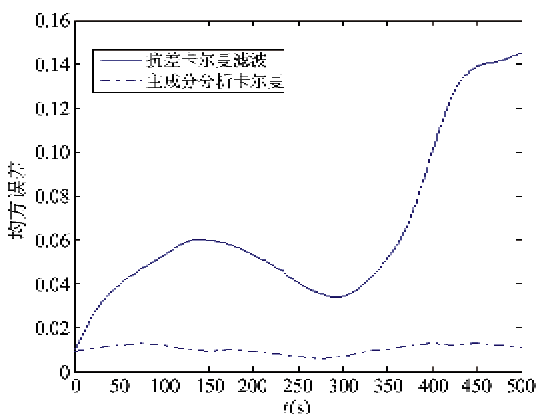


图6  $x_5$  均方误差曲线

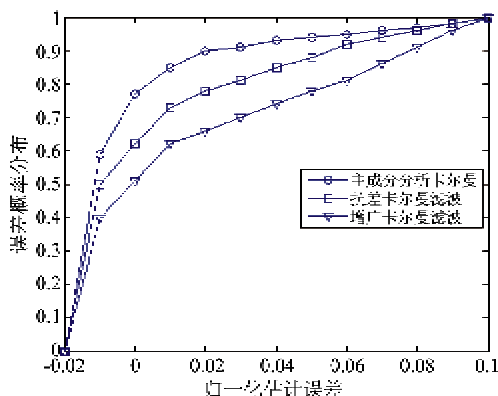


图7 估计误差概率分布

和PCA处理,而基于PCA的卡尔曼滤波对预测值进行修正,通过不断迭代,对测量值进行平滑,进一步减少了测量误差对估计值的影响。

## 4 结论

有色噪声对参数估计的影响不容忽视。关于有色噪声的处理方法,目前已经给出了采用噪声白化技术的经典解决方案,但是在大多数情况下,确定白化滤波器涉及到很复杂的方程求解,因而十分困难,经典的卡尔曼滤波也不具有抑制有色观测噪声影响的能力。本文利用主成分分析方法处理有色噪声环境下的卡尔曼滤波问题,通过对预测数据的加窗处理,克服了运算速度慢和结果不稳定问题,通过主成分分析方法的运算,克服了过分依赖动力学模型的先验知识问题。对两类实际系统模型利用算法进行计算机仿真,通过均方误差的对比说明利用主成分分析方法的准确性,利用计算复杂度和估计误差概率分布说明窗口内迭代的有效性。通过理论推导和实验,证实了PCA滤波具有较好的适应环境能力,能够有效地对有色噪声进行处理。仿真结果表明,PCA卡尔曼滤波能得到更准确的状态估计结果。本文算法对观测噪声呈有色性而不是零均值白噪声的实际情况更具有工程实用意义。本文研究的仿真建立在经典色噪声产生环境下,涉及的实际环境下的有色噪声的拟合是下一步有待研究的问题。

## 参考文献

- [1] 李川. 基于Kalman的滤波目标精确跟踪技术研究. 通信技术, 2009, 42(6): 205-207
- [2] Yeh W C, Chang W W, Chung Y Y. A new hybrid approach for mining breast cancer pattern using discrete particle swarm optimization and statistical method. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(4): 8204-8211
- [3] Xu G W, Ma S Q, Wei S P. Research to RLS algorithm of adaptive filter and its DSP realization. *Computer Technology and Development*, 2010, 12(10): 35-38
- [4] 张双成, 杨元喜, 张勤. 一种基于抗差自校正Kalman滤波的GPS导航算法. 武汉大学学报, 2009, 30(10): 881-884
- [5] 曹璐, 陈小前. 基于近似思想的增广PF研究. 系统仿真学报, 2012, 24(7): 1401-1403
- [6] Yang X, Xing K, Shi K. Joint state and parameter estimation in particle filtering and stochastic optimization. *Control Theory Apply*, 2008, 6(2): 215-220
- [7] Zhao C S, Tao B Z. Robust Kalman filtering of linear sys-

- tem with colored noises. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(10) : 880-882
- [ 8 ] 许国威,马胜前,危淑平. 基于 LabVIEW 与 MATLAB 的自适应滤波器设计研究. 计算机技术与发展, 2011, 21(1) : 226-229
- [ 9 ] A rasaratnam I, Haykin S, Hurd T R. Cubature Kalman filtering for continuous discrete systems: theory and simulations. *IEEE Trans on Signal Processing* , 2010, 58(10) : 4977-4993
- [ 10 ] 黄贤源,隋立芬,范澎湃. 基于随机模型改正的有色状态噪声处理新方法. 测绘学报, 2008, 37(3) : 361-366

## A PCA-based algorithm for Kalman filtering in colored noise environments

Liu Nan, Song Wenlong

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Northeast Forestry University, Harbin 150040)

### Abstract

Principal component analysis (PCA) was used to improve Kalman filtering's precision and reliability performance in a colored noise environment. With the predictive function of Kalman filters, this method processes the signal in a window which determines the Kalman predictive center. Then the PCA is used in the data of the window, and the prediction value is corrected. In the process of filtering, the parameters are continually estimated in the window. This method does not depend on the future knowledge of noise dynamics and heavy computational effort needed. The simulation results show that the algorithm can be easily implemented, and it has low mean square and good stability. Experimental results show that the PCA Kalman filtering model could perform better for the state estimation with low complexity.

**Key words:** Kalman filter, colored noise, principal component analysis (PCA), prediction value, state estimation