

机械手动力学建模与负载轨迹优化研究^①

杨玉维^{②*,**} 赵新华^{*,**} 牛兴华^{**} 徐一春^{**}

(* 天津理工大学天津市复杂系统控制理论及应用重点实验室 天津 300384)

(** 天津理工大学机械工程学院 天津 300384)

摘 要 对机械手动力学模型和两点间系统最大负载轨迹优化问题进行了研究。具体以多体动力学为基础,根据 Chasles 定理采用罗德里格公式(Rodriguez formula)定义了系统构件旋转矩阵,进而采用拉格朗日原理构建了系统动力学模型,以此为基础,采用线性迭代(ILP)法获取了机械手可以实现的最大负载工况下的优化轨迹,并采用系统动力学方程校证了 ILP 法的有效性与正确性。最后,对三自由度空间机械手进行了最大负载轨迹优化仿真,并对仿真结果进行了分析。

关键词 动力学建模,轨迹优化,最大负载

0 引 言

为适应高性能计算机及先进数据算法的发展进行新的具有程式化、高效率的动力学建模方法研究,是复杂多体系统动力学领域研究的重点之一^[1]。同时寻求通用、高效且适用于计算机数值仿真的机械手动力学建模方法,对机械手后续研究有着重要意义。文献[2]以虚功原理为指导,构建了 2 自由度球面并联机械手动力学模型;文献[3]研究了空间机械手与飞行器之间动力学耦合建模问题;文献[4]提出了被引用到多体系统动力学计算中直接面向计算机的并行计算;文献[5]提出了程式化高、计算速度快的多体系统传递矩阵法;文献[6]提出了具有占计算机内存空间小、计算效率高的基于伪速度的动力学建模法。空间构件姿态通常采用 3 个彼此独立的 Euler 角、Rodriguez 参数或 4 个 Euler 参数等来描述,同时还要考虑运动副等约束构建系统动力学方程,构建方法比较繁冗,计算量比较大。本文针对机械手本身构型的特点,以多体动力学理论为基础,采用系统关节坐标变量作为独立广义坐标变量描述构件空间位姿。为了表述清晰,针对每个构件引入 3 个体坐标系,进而采用 Lagrangian 法准

确地构建系统动力学方程。

针对机械手两点间高效重复工作,如何最大限度地提高负载能力是一项非常重要的课题。文献[7,8]将工业机械手在给定工况下的最大承载力转化为轨迹优化问题,但该动力学模型以关节坐标变量为系统变量,缺乏通用性,同时所采用的线性迭代法(iterative linear programming, ILP)收敛与否,未加以校正,存在争议。在此基础上,文献[9]采用模态法,考虑了机械手柔性(构件和关节柔性),确定了机械手最大承载能力;文献[10]给出了工业机械手动载特性准则(用于描述机械手加速度和力),在此基础上研究了用于选择机械手驱动器的 2 种方法。文献[11]针对给定末端执行器跟踪轨迹,并施加冗余约束,研究了轮式移动机械手最大承载力问题。文献[12]采用有限元法(应用悬臂梁离散边界条件)并以关节驱动力矩和轨迹跟踪精度为约束条件,研究了移动(移动载体在给定轨道上运行)柔性机械手末端执行器跟踪给定轨迹时最大承载力问题。文献[13]应用间接法将移动机械手给定 2 点轨迹优化转化为最优控制问题。文献[14]以零力矩点为系统稳定性评价准则,并考虑非完整约束,将在结构化环境内工作的移动机械手给定 2 点轨迹优化转化为最优控制问题。文献[15]采用分级优化

① 国家自然科学基金(51275353;51205289),天津市应用基础及前沿技术研究计划(12JCYBJC12200)和天津市高等学校科技发展基金计划(20100401)资助项目。

② 男,1975 年生,博士生;研究方向:机器人技术,多体动力学;联系人,E-mail:buddhawei@126.com
(收稿日期:2012-10-11)

控制对轮式移动机械手进行最大承载力和轨迹优化研究。由于系统高性能的发展,准确构建通用、完备的系统动力学模型,是实现准确轨迹跟踪的基础。本文针对系统非线性,采用关节坐标与广义坐标^[16]相统一的方法,进而基于多体动力学准确构建了系统动力学模型,并以此为基础,针对上述文献中 ILP 法的不足,采用 ILP 与动力学模型校正相结合的方法,获取系统末端执行器最优轨迹以及与之相应的运动副关节驱动力矩等的数值解。

1 运动学、动力学模型建立

鉴于机械手自身构型特性,同时考虑罗德里格公式(Rodriguez formula),机械手构件变换矩阵可以用旋转角度与旋转轴方向单位向量来综合描述(见式(3))。

图 1 为一 3 自由度工业机械手,其中 $O - X^0 Y^0$ 、 $O^i - X^i Y^i$ 、 $O^i - X_c^i Y_c^i$ ($i = 1, 2, 3$) 分别为系统全局坐标系、固结于构件 i 上的关节体坐标系和固结于构件 i 上的质心体坐标系。依据 Chales 定理^[17],构件 i 任一点位置矢量 $\mathbf{r}^i$ 可以描述为

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_c^i \quad (1)$$

其中 $\mathbf{R}^i$ 为构件 i 质心 p_c^i 位置矢量, $\bar{\mathbf{u}}_c^i$ ($\bar{\mathbf{u}}^i$) 为构件 i 任一点位置矢量,上横线($\bar{}$)表示其度量于 $O^i - X_c^i Y_c^i$ ($O^i - X^i Y^i$),反之度量于 $O - X^0 Y^0$; $\mathbf{A}^i$ 为 $O^i - X_c^i Y_c^i$ 向对全局坐标系的姿态变换矩阵。

本文采用关节坐标描述矩阵 $\mathbf{A}^i$:

$$\mathbf{A}^i = \prod_{j=1}^i \mathbf{A}^{j(j-1)} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{A}^{j(j-1)}$ 为坐标系 $O^j - X_c^j Y_c^j$ 相对 $O^{j-1} - X_c^{j-1} Y_c^{j-1}$ 姿态变换矩阵^[17]:

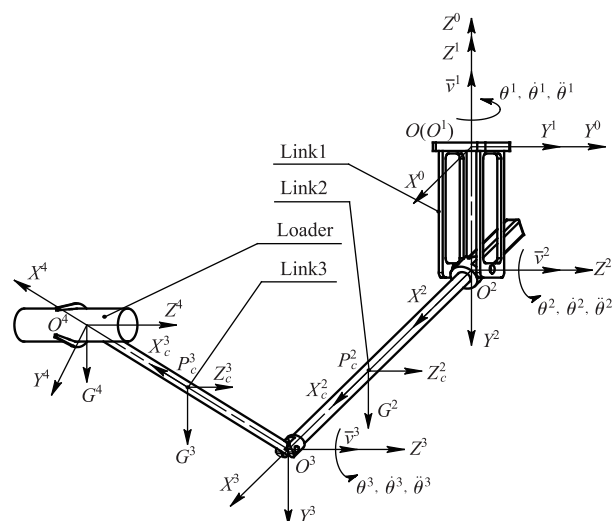
$$\mathbf{A}^{j(j-1)} = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{v}}^j \sin \theta^j + 2(\bar{\mathbf{v}}^j)^2 \sin^2(\theta^j/2) \quad (3)$$

其中 $\bar{\mathbf{v}}^j$ 为关节转动轴线单位矢量,即与 $O^j Z^j$ 同向,如图 1 所示, $\bar{\mathbf{v}}^j$ 是其矩阵表述形式; θ^j 为关节 j 转角变量。对式(2)两侧同时对时间求导,可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}}^i &= \mathbf{A}^{10} \bar{\omega}^{10} (\mathbf{A}^{10})^T + \mathbf{A}^{10} \mathbf{A}^{21} \bar{\omega}^{21} (\mathbf{A}^{10} \mathbf{A}^{21})^T + \dots \\ &+ \mathbf{A}^i \bar{\omega}^{i(i-1)} (\mathbf{A}^i)^T \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\bar{\omega}^i$ 为构建 i 绝对角速度矩阵表达式, $\bar{\omega}^{i(i-1)}$ 为构件 i 相对构件 $i-1$ 角速度矩阵表达式,其向量形式为

$$\bar{\omega}^{i(i-1)} = 2\bar{\mathbf{v}}^i \times \dot{\bar{\mathbf{v}}}^i \sin^2 \frac{\theta^i}{2} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}^i \sin \theta^i + \bar{\mathbf{v}}^i \dot{\theta}^i \quad (5)$$



$G^{2,3}$ - 构件 2、3 重量; G^4 - 负载重量; $p^{2,3}$ - 构件 2、3 质心

图 1 3 自由度工业机械手简图

由于 $\bar{\mathbf{v}}^i$ 为常量,式(5)可简化为

$$\bar{\omega}^{i(i-1)} = \bar{\mathbf{v}}^i \dot{\theta}^i \quad (6)$$

将式(6)代入到式(4)可得

$$\bar{\omega}^i = (\mathbf{A}^i)^T \mathbf{A}_v^i \dot{\theta} \quad (7)$$

其中 n 为系统自由度, $\dot{\theta} = [\dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 \dots \dot{\theta}^n]^T$, $\mathbf{A}_v^i = [\mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{v}}^1 \dots \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{v}}^i \mathbf{0}_{3 \times (n-i)}] 1$ 为系统关节变量向构件 i 的绝对角速度变换的桥梁,同时便于系统动力学模型矩阵简约的形式表达。建立在以上分析基础之上,采用牛顿-欧拉动力学方法,可得杆件 i 动力学方程:

$$\mathbf{K}^i = \frac{1}{2} m^i (\mathbf{v}_c^i)^T \mathbf{v}_c^i + \frac{1}{2} (\bar{\omega}^i)^T \mathbf{I}^i \bar{\omega}^i \quad (8)$$

其中 m^i 、 $\mathbf{I}^i$ 、 $\mathbf{v}_c^i$ 依次为构件 i 质量、转动惯量、质心速度。 $\mathbf{v}_c^i$ 可由式(1)求导获得,表达式为

$$\mathbf{v}_c^i = \mathbf{v}_{o^i}^i + \mathbf{A}^i \bar{\omega}^{i(i-1)} o^i p_c^i \quad (9)$$

其中 $\mathbf{v}_{o^i}^i = \mathbf{v}_{o^{i-1}}^{i-1} + \mathbf{A}^{i-1} \bar{\omega}^{(i-1)(i-2)} o^{i-1} o^i$

化简后可得

$$\mathbf{v}_c^i = \mathbf{A}_v^i \dot{\theta} \quad (10)$$

将式(10)、(4)和(6)代入式(8),经过化简整理可得系统动力学模型:

$$\mathbf{K}^i = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathbf{M} \dot{\theta} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_v^i)^T \mathbf{A}_v^i + \sum_{i=1}^n ((\mathbf{A}^i)^T \mathbf{A}_v^i)^T \mathbf{I}^i (\mathbf{A}^i)^T \mathbf{A}_v^i$ 。

依据拉格朗日动力学方法可得系统动力学方程:

$$\mathbf{M} \ddot{\theta} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_v \quad (12)$$

其中 $\mathbf{Q}_v = \dot{\mathbf{M}} \dot{\theta} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \dot{\theta}} \right)^T$ 、 $\mathbf{Q}^{[16]}$ 为系统广义外力。

2 线性规划与轨迹优化

为了得到非线性优化轨迹的数值解,现将系统动力学模型线性化。首先定义状态变量 $\mathbf{Y} = [y_1^T y_2^T]^T$, 其中 $y_1 = \theta$, $y_2 = \dot{\theta}$, 则系统动力学方程(12)式可在状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(y, \mathbf{T}, m_L) \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{T} = [T^1 T^2 \dots T^n]^T$, T^i 为关节 i 电机驱动力矩。将式(13)离散化,可得

$$\frac{\mathbf{Y}(i+1) - \mathbf{Y}(i)}{ht} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(y, \mathbf{T}, m_L) \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中 $ht = \frac{t_f - t_i}{m}$, m 为轨迹离散点数, t_f, t_i 依次为仿真终了和初始时刻。综合考虑关节驱动电机力矩约束、运动关节运动范围限制等^[11],可以得到约束不等式并写成矩阵的形式:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{q} \leq \mathbf{B}_0 \quad (15)$$

其中优化变量 $\mathbf{q}$ 、系数矩阵 $\mathbf{A}_0$ 、 $\mathbf{B}_0$ 依次为

$$\mathbf{q} = [m_L \mathbf{Y}^T \mathbf{e}_{pos}^T \mathbf{e}_{vel}^T]^T$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,n \times m} & \mathbf{0}_{1,2n} \\ \mathbf{0}_{n \times m,1} & \mathbf{I}_{n \times m,n \times m} & \mathbf{0}_{n \times m,2n} \\ \mathbf{B}_1 & -\mathbf{A}_m & \mathbf{0}_{n \times m,2n} \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_m & \mathbf{0}_{n \times m,2n} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{E}_m & -\mathbf{I}_{2n,2n} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{E}_m & -\mathbf{I}_{2n,2n} \end{bmatrix} \quad (1+3n \times m+4n), (1+n \times m+2n)$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} m_L^{c+} \\ \mathbf{b}_u - \mathbf{b}_l \\ \mathbf{y}_1^+ - \mathbf{Y}_{1h} - \mathbf{A}\mathbf{b}_u \\ \mathbf{Y}_{1h} - \mathbf{y}_1^- + \mathbf{A}\mathbf{b}_u \\ \mathbf{Y}(t_f) - \mathbf{Y}_h(p) - \mathbf{E}\mathbf{b}_u \\ \mathbf{Y}_h(p) - \mathbf{Y}(t_f) + \mathbf{E}\mathbf{b}_u \end{bmatrix}$$

目标函数定义为

$$f_0 = -m_L + \mathbf{W}\mathbf{e} \quad (16)$$

其中 $m_L = G^4/g$ 为系统负载、 $\mathbf{e} = [e_{pos}^T e_{vel}^T]^T$ 为 t_f 时刻机械手末端位置和速度与给定值误差矢量、 $\mathbf{W} = [w_1 w_2 \dots w_{2n}]^T$ 终点状态变量误差权数: $w_{i=1 \dots 2n} > 1$ 。由式(15)和(16)可得线性迭代规划标准表达式^[18]:

$$\begin{cases} \min f_0 \\ \text{s. t. } \mathbf{A}_0 \mathbf{q} \leq \mathbf{B}_0 \end{cases} \quad (17)$$

式(17)可以给出系统最大负载,同时确保最优轨迹末端点与给定点间的位置和速度误差在设定范围内。

3 计算方法

基于 ILP 法的轨迹优化算法可以归结为如图 2 所示的数值仿真流程。首先离散初始轨迹为 m 个点,通过迭代更新系数矩阵 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$, 调用 IPL 子程序得到 q^{k+1} , 进而得到新运动轨迹 $\mathbf{Y}^{k+1}$ 、系统新负载 m_L^{k+1} 、运动副关节驱动力矩 $\mathbf{T}^{k+1}$ 等,其中 k 为迭代次数。迭代终止条件是 $q^{k+1} - q^k \leq e_0$, 其中 e_0 ^[11] 为给定误差(常数),如果上式成立则 q^{k+1} 为系统优化初步结果。由于式(17)采用线性迭代规划法求解的非线性优化问题,最后将线性迭代优化结果代入到系统非线性动力学方程(12)获取校正力矩 $\mathbf{T}_c^{k+1}$, 通过仿真结果比较,验证了线性迭代规划法所得优化结果与系统非线性动力学模型的一致性,从而得到最大荷载 m_{Lmax} 工况下系统优化轨迹 $\mathbf{Y}_{opt}$ 。

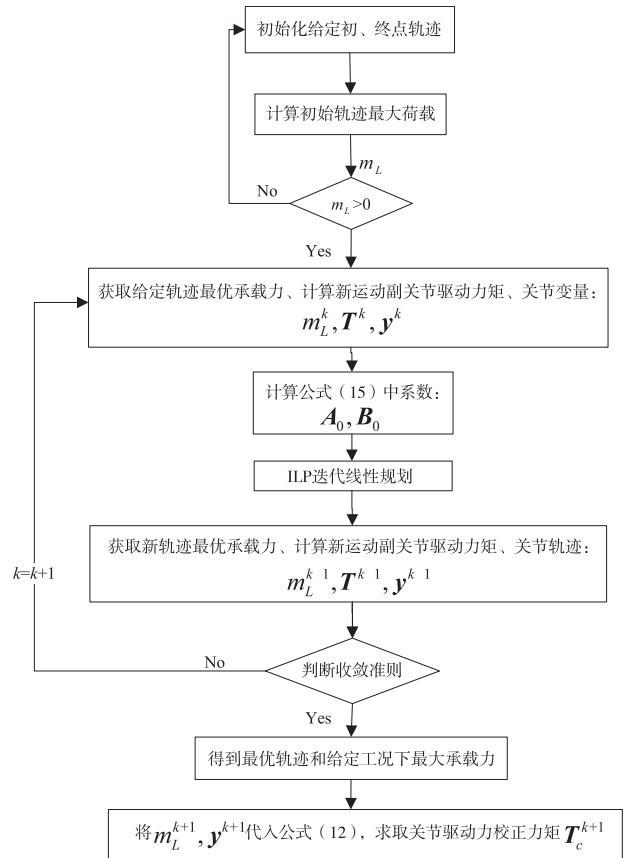


图2 数值仿真流程图

4 数值仿真

本文以空间 3 自由度机械手为例进行算例仿真,该机械手如图 1 所示。系统杆件参数和惯性矩如表 1 所示。假定荷载为质点,运动副关节变量 θ 的运动限制为 $[-180^\circ \ 0^\circ \ -90^\circ]^T \leq \theta \leq [180^\circ \ 180^\circ \ 90^\circ]^T$ 。

运动副关节变量 θ 的初始与终止点值为 $\theta(t_i) = [0^\circ \ 30^\circ \ 30^\circ]^T, \theta(t_f) = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ 。

仿真时间为 0.65s。

关节变量、杆件参数及惯性矩见表 1 和表 2。

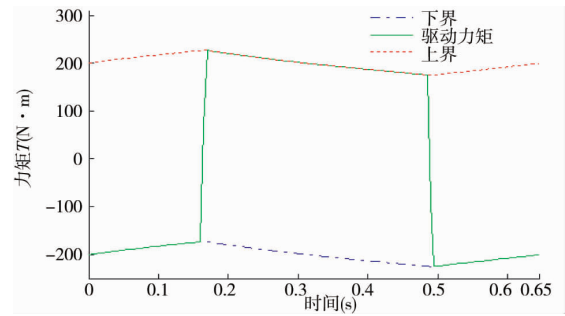
表 1 关节变量

关节序号	关节变量 θ^i	α^i	a^i	d^i
1	θ^1	$-\pi/2$	0	-0.75
2	θ^2	0	0.5	0
3	θ^3	0	0.35	0

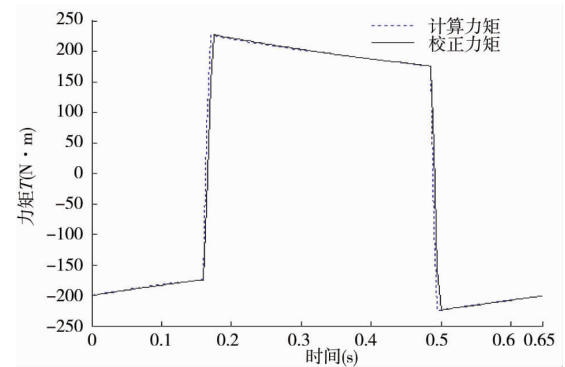
表 2 杆件参数与惯性矩

杆件序号	质量 (kg)	构件长度 l^i (m)	惯性矩 I^i (kg·m ²)	质心 $\bar{u}^i$ (m)
1	90	0.75	$\begin{bmatrix} 33.7 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.65 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	120	0.5	$\begin{bmatrix} 1.9 & 0 & 0 \\ 0 & 13.5 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.65 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	15	0.35	$\begin{bmatrix} 0.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.24 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

部分数值仿真结果如图 3 – 图 13 所示。图 3 – 图 5 为实现优化轨迹所需运动副关节驱动力矩与校正力矩,随着离散点数的增加,它们趋于一致,进而佐证了 ILP 法的有效性与正确性。同时系统优化轨迹所对应的 3 个关节驱动力矩皆接近其对应驱动电机机械特性曲线的上下边界,说明优化轨迹充分发挥了电机的负载能力。

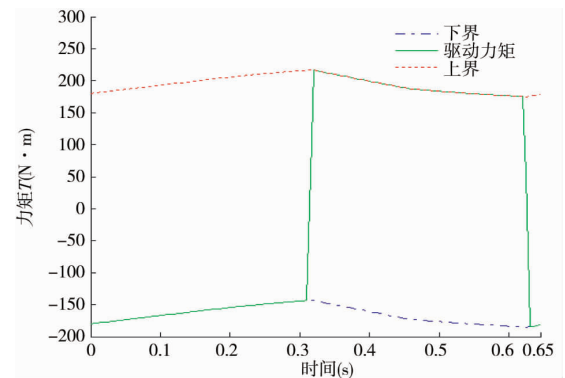


(a) 驱动力矩

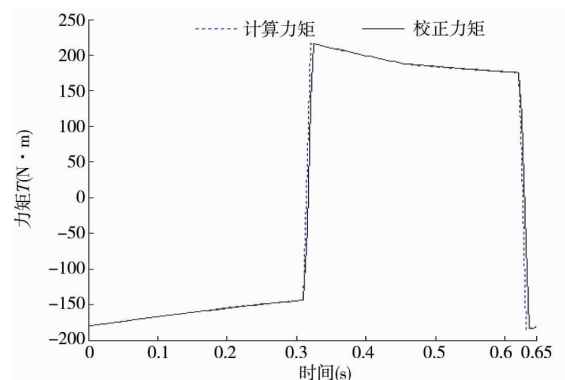


(b) 校正和优化驱动力矩

图 3 第一关节驱动力矩 (a) 以及校正和优化驱动力矩 (b)

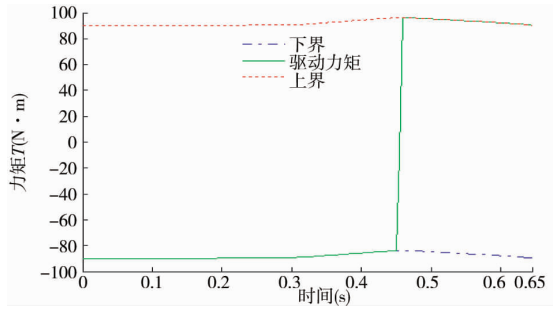


(a) 驱动力矩

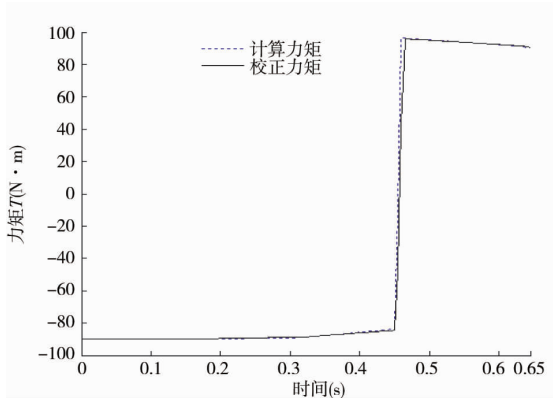


(b) 校正驱动力矩

图 4 第二关节驱动力矩 (a) 和校正驱动力矩 (b)



(a) 驱动力矩



(b) 校正驱动力矩

图5 第三关节驱动力矩(a)和校正驱动力矩(b)

由于式(17)中没有对轨迹脉动连续性^[19]进行限制,从而导致驱动力矩在某一时间段出现突变^[10]。图6为在不同ILP迭代次数(n)下关节3驱动力矩;图7-图11为在不同ILP迭代次数下运动副关节 θ 、 $\dot{\theta}$ 变量,从中不难看出这些轨迹终点和起始点的一致性;图12为机械手末端初始和给定工况最优轨迹和优化前轨迹;图13为轨迹优化ILP迭代次数下的负载。

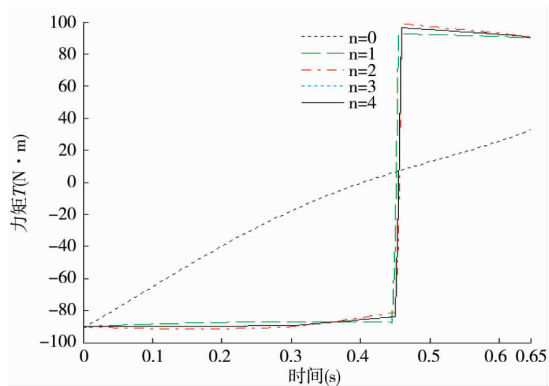


图6 第三关节驱动力矩优化前后仿真

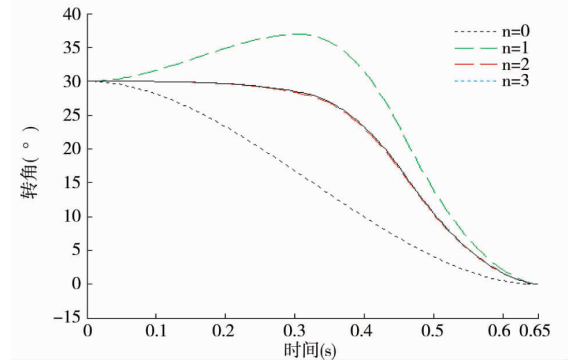


图7 第三关节变量优化前后仿真

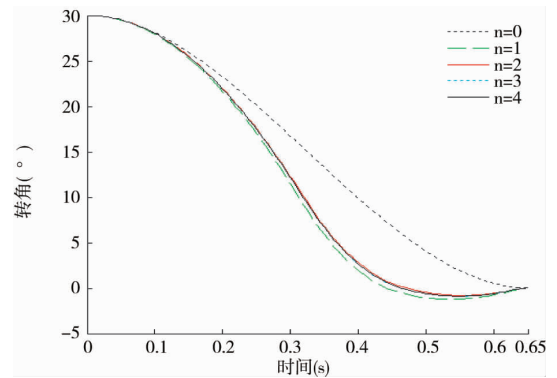


图8 第二关节变量优化前后仿真

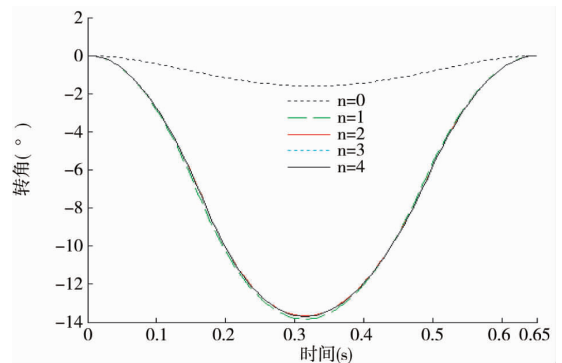


图9 第一关节变量优化前后仿真

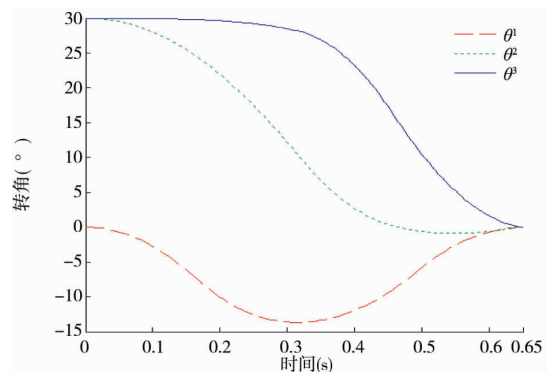


图10 优化后关节轨迹

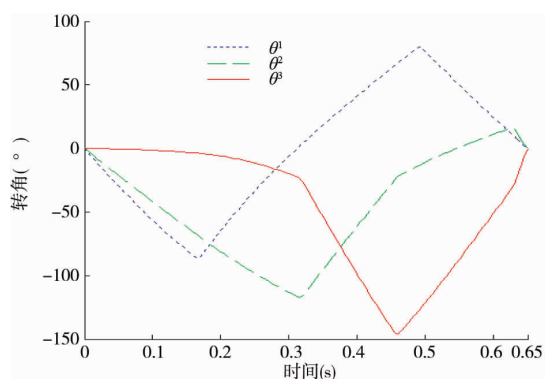


图 11 优化后关节运动速度轨迹

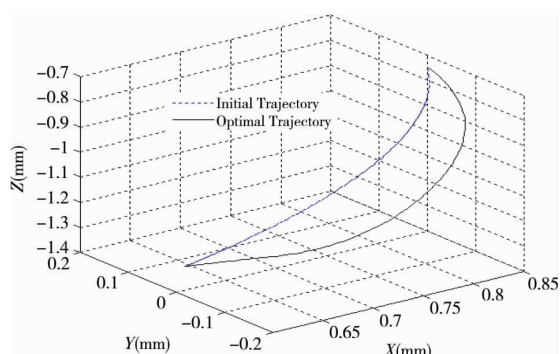


图 12 优化前后机械手末端轨迹

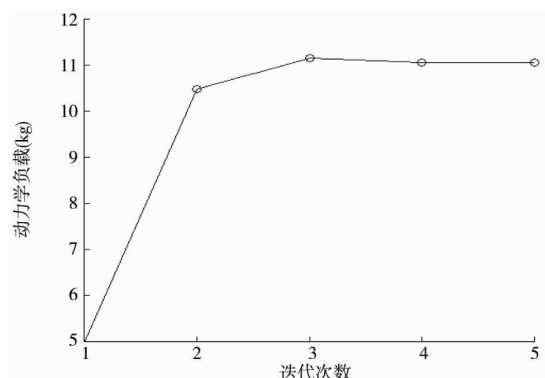


图 13 迭代最优动力学承载力

5 结 论

本文旨在考虑动力学建模方法的完备性、通用性,系统地构建了机械手动力学模型,并以此为基础,针对给定机械手初始、终止位置和运动副关节驱动电机机械特性工况等,以 ILP 法为途径,将寻求系统最大承载能力问题转化为系统工作轨迹优化问题。ILP 法建立在系统非线性动力学模型线性化(泰勒展开)的基础上,是一种非线性问题的线性化求解。为此将所得优化轨迹所对应的系统变量 $\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}$ 代入系统非线性动力学方程(12),并由此推出系统

驱动力矩作为校正力矩,将之与 ILP 法所得最终优化驱动力矩进行比较。最后以空间 3 自由度机械手为例进行数值仿真,仿真结果验证了系统动力学模型构建和轨迹优化算法的正确性与有效性。

参考文献

- [1] 洪嘉振,刘铸永.刚柔耦合动力学的建模方法.上海交通大学学报,2008,42(11):1922-1926
- [2] 刘海涛,梅江平等.一种 2 自由度球面并联机构动力学建模与伺服电机参数预估.中国科学,2008,38(1):111-124
- [3] 刘云平,顾和军等.空间操作臂的高效动力学建模方法.华中科技大学学报(自然科学版),2011,39(6):75-79
- [4] 林光春,杨志刚.基于并行计算的杆长和惯性参数可变的平面闭链机构动力学解析模型.机械工程学报,2008,44(2):27-32
- [5] Rong B, Rui T, Wang GP, et al. New efficient method for dynamic modeling and simulation of flexible multibody systems moving in plane. *Multibody Sytem Dynamics*, 2010, 2(24):181-200
- [6] 刘云平,吴洪涛.基于伪速度的动力学建模方法.华中科技大学学报(自然科学版),2011,39(12):25-28
- [7] Wang, L, T, Ravani. B. Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators. Part 1: problem formulation. *J Dyn Sys Meas Control*, 1988, 110:46-52
- [8] Wang, L, T, Ravani. B. Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators. Part 2: computational procedure and applications. *J Dyn Sys Meas Control*, 1988, 110:53-61
- [9] Bowling A, Khatib O. Dynamic loading criteria in actuator selection for desired dynamic performance. *Advanced Robotics*, 2003, 17(7):641-656
- [10] Korayem M H, Ghariblu H. Maximum allowable load on wheeled mobile manipulators imposing redundancy constraints. *Robotics and Autonomous Systems*, 2003, 44:151-159
- [11] Korayema M H, Heidari A A, Nikoobin. Maximum allowable dynamic load of flexible mobile manipulators using finite element approach. *Int J Adv Manuf Technol*, 2008, 36(9-10):1010-1021
- [12] Korayem M H, Nikoobin A V, Azimirad. Maximum load carrying capacity of mobile manipulators; optimal control approach. *Robotica*, 2009, 27(1):147-159
- [13] Haddad M, Hanchi S, Lehtihet H E. Point-to-point trajectory planning of wheeled mobile manipulators with stability constraint. Extension of the random-profile approach.

- European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009, 28 (3) : 477-493
- [14] Wang H, Zhao K, Chen G L, et al. Energy distribution index for robot manipulators and its application to buffering capability evaluation. *Science China Technological Sciences*, 2011, 54 (2) : 457-470
- [15] Korayem M H, Azimirad V, Vatanjou H, et al. Maximum load determination of nonholonomic mobile manipulator using hierarchical optimal control. *Robotica*, 2012, 30 (1) : 53-65
- [16] 杨玉维, 张明路等. 轮式移动单杆柔性机械手逆动力学研究与仿真. *机械工程学报*, 2010, 46 (21) : 76-81
- [17] Ahmed A. Shabana. *Dynamics of Multi-body Systems*. 3rd Edition. New York: Cambridge University Press, 2005. 189-247
- [18] 飞思科技产品研发中心. *MTALAB 6.5 辅助优化计算与设计*. 北京: 电子工业出版社, 2003. 13-14
- [19] 朱世强, 刘松国等. 机械手时间最优脉动连续轨迹规划算法. *机械工程学报*, 2010, 3 (46) : 47-52

Study of dynamic modeling and trajectory optimization of manipulators for maximum load

Yang Yuwei * **, Zhao Xinhua * **, Niu Xinhua **, Xu YiChun **

(* Tianjin Key Laboratory for Control Theory & Applications in Complicated Systems, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384)

(** School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384)

Abstract

Both the dynamic modeling and the computational procedure for obtaining optimal trajectory of manipulators to maximize their load carrying capacity for a given point-to-point task were studied. Based on multi-body dynamics, the transformation matrices of system components were defined by the Rodriguez formula according to the Chales theory. Then, the system dynamic model of a manipulator was derived via the Lagrangian approach. An iterative linear programming (ILT) method was used to obtain the optimized trajectory for a manipulator and the effectiveness and correctness of the ILT method were valuated by the dynamic model. At last, the maximum load simulation for one numerical example involving a 3-DOF spacial manipulator using the approach was conducted and the results were discussed.

Key words: dynamic modeling, trajectory optimization, maximum load