

球谐域二次 Dolph-Chebyshev 波束形成的设计^①

黄青华^② 钟 强 李 华

(上海大学通信与信息工程学院 上海 200072)

摘 要 提出了一种球谐域二次 Dolph-Chebyshev 波束形成方法,该方法在常规波束形成方法和 Dolph-Chebyshev 波束形成方法的基础上通过平方 Chebyshev 多项式来计算波束形成的权值。在保持主瓣最大增益不变的情况下,通过平方 Chebyshev 多项式可以降低旁瓣的最大增益。因此,这种改进的波束形成在保证与前两者具有相同主瓣宽度的同时,能有效地限制旁瓣,提高声场分辨率。且在低频时具有更高的白噪声增益,从而提高球阵处理噪声的能力。仿真实验通过将这三种波束形成方法进行比较,验证了球谐域二次 Dolph-Chebyshev 波束形成方法的有效性。

关键词 球谐域,波束形成, Chebyshev 多项式,旁瓣,球阵列

0 引 言

目前,球麦克风阵列的研究已经遍及声场记录^[1]、波束形成^[2]、声场分析^[3-5]和声源定位^[6]等领域。其中波束形成技术在球麦克风阵列信号处理中得到了更深入的研究和应用^[7,8],它把球麦克风阵列采集的空域信号通过球傅里叶变换在球谐域形成特征波束,然后对特征波束加权得到球谐域波束形成。常见的球谐域波束形成有常规波束形成^[9]、延迟累加波束形成^[10]、Dolph-Chebyshev 波束形成^[11]、最优波束形成^[9]和多波束多零点波束形成^[12]等。常规波束形成是最基本的波束形成形式,它具有较高的空间分辨率和白噪声增益,可用于平面波分解和声源定位。Dolph-Chebyshev 波束形成由于具有可控制主瓣宽度和最大旁瓣级的优点,因此受到很多关注。然而当 Dolph-Chebyshev 波束形成的主瓣宽度与常规波束形成相同时, Doph-Chebyshev 波束形成具有更高的旁瓣,因此,声场的空间分辨率将大大降低。本文提出了一种球谐域二次 Dolph-Chebyshev 波束形成方法,即在球谐域常规波束形成和 Dolph-Chebyshev 波束形成的基础上通过平方 Chebyshev 多项式计算其权值。这种改进后的波束形成在主瓣宽度与前两者相同的情况下具有比常规波束

形成更低的旁瓣,从而提高了声场的空间分辨率。同时通过波束形成性能的比较还发现在低频时它具有更高的白噪声增益。仿真结果表明了本文设计方法的优势。

1 球谐域波束形成的设计

考虑一个连续的空间函数 $f(\vartheta, \phi)$, 它满足在单位球上平方可积的条件,其中 (ϑ, ϕ) 为函数的空间方位。用 f_{nm} 表示 $f(\vartheta, \phi)$ 的球傅里叶变换系数,则球傅里叶变换对可写为如下形式:^[13]

$$f_{nm} = \int_{\Omega \in S^2} f(\vartheta, \phi) Y_n^m(\vartheta, \phi) d\Omega \quad (1)$$

$$f(\vartheta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} Y_n^m(\vartheta, \phi) \quad (2)$$

其中 $\Omega = (\vartheta, \phi)$, S^2 代表球面,“*”表示复共轭。 Y_n^m 为 n 阶 m 级球谐函数,具体表示为^[13]

$$Y_n^m(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\vartheta) e^{im\phi} \quad (3)$$

这里 $P_n^m(\cos\vartheta)$ 为 n 阶 m 级 legendre 函数, $i = \sqrt{-1}$ 。现在考虑一个球麦克风阵列,采集空间声场中的声压,然后对采集的声压进行加权积分得到阵列的输出。阵列的输出既能表示成空域的形式也可以表示

① 国家自然科学基金(61001160)和教育部博士点基金(20093108120018)资助项目。

② 女,1978 年生,博士,副研究员;研究方向:阵列信号处理和 3D 音频信号处理;联系人, E-mail: qinghua@shu.edu.cn (收稿日期:2011-08-29)

成球谐域的形式^[5],如下所示:

$$\begin{aligned} y &= \int_{\Omega \in S^2} p(kr, \vartheta, \phi) \omega^*(k, \vartheta, \phi) d\Omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n p_{nm} \omega_{nm}^*(k) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 k 为波数,其值为 $2\pi f/c$, c 为声速, r 为球半径, $p(kr, \vartheta, \phi)$ 为球面声压的表达式, $\omega^*(k, \vartheta, \phi)$ 为阵列权值函数, p_{nm} 和 $\omega_{nm}(k)$ 分别为 $p(kr, \vartheta, \phi)$ 和 $\omega(k, \vartheta, \phi)$ 的球傅里叶变换系数表达式^[5]。

在实际应用中,式(4)中的积分近似用求和的形式来计算,求和的项数代表麦克风阵元的数目,同时阵列的阶数 n 也受限于阵元数目和球麦克风阵列的空间结构。为了便于分析,我们忽略由求和带来的冗余误差的影响并取阵列的最高阶数为 N 。假设声场由一个单位幅度的平面波产生,则球谐域波束响应可通过阵列的输出得到。式(4)中球面声压函数的球傅里叶变换表示为^[13]

$$p_{nm}(k) = b_n(kr) Y_n^{m*}(\vartheta_0, \phi_0) \quad (5)$$

式中 (ϑ_0, ϕ_0) 为平面波的到达方向, $b_n(kr)$ 为阵列模态强度函数,对不同结构的阵列, $b_n(kr)$ 可表示为^[13]

$$b_n(kr) = \begin{cases} 4 \pi^n \left(j_n(kr) - \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h_n(kr) \right) & \text{刚性球} \\ 4 \pi^n j_n(kr) & \text{开放球} \end{cases} \quad (6)$$

表达式中 j_n 和 h_n 分别为球贝塞尔和球汉克尔函数, j'_n 和 h'_n 分别是它们的导数^[12]。对刚性球有 $a \leq r$, 通常取 $a = r$ 。文献[4]和[14]中给出阵列权值为

$$\omega_{nm}^* = \frac{c_n Y_n^{m*}(\vartheta_l, \phi_l)}{b_n(kr)} \quad (7)$$

其中 (ϑ_l, ϕ_l) 为阵列的期望方向, c_n 为控制阵列的波束响应。 c_n 是我们在设计权值时重点考虑的对象,本文的研究将围绕 c_n 展开。把式(5)和(7)代入式(4)中得到球谐域波束形成的表达式为

$$y = \sum_{n=0}^N c_n \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\vartheta_l, \phi_l) Y_n^{m*}(\vartheta_0, \phi_0) \quad (8)$$

应用球谐函数性质^[15]有

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\vartheta_l, \phi_l) Y_n^{m*}(\vartheta_0, \phi_0) = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\alpha) \quad (9)$$

则波束响应最终为

$$B(\alpha) = \sum_{n=0}^N c_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\alpha) \quad (10)$$

其中 α 为平面波到达方向与阵列期望方向之间的夹角,因此球谐域波束形成具有关于阵列期望方向旋

转对称的特点^[3]。当 $c_n \equiv 1$ 时,称这种波束形成成为常规波束形成,即最基本的球谐域波束形成,它具有较高的空间分辨率和白噪声增益^[4,10]。Dolph-Chebyshev 波束形成是另一种波束形成方法,它具有可控制主瓣宽度和最大旁瓣级的优点,然而主瓣宽度和最大旁瓣级是相互矛盾的。在相同的主瓣宽度下,Dolph-Chebyshev 波束形成的旁瓣比常规波束形成大得多,这将大大降低空间声场的分辨率,因此我们需要对其做优化处理来改善 Dolph-Chebyshev 波束形成。

2 二次 Dolph-Chebyshev 波束形成的设计

球谐域 Dolph-Chebyshev 波束形成的设计表示为如下的形式^[11]:

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \sum_{n=0}^N c_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\alpha) \\ &= \frac{1}{R} T_M(x_0 \cos(\alpha/2)) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $T_M(\cdot)$ 为 M 阶 Chebyshev 多项式^[15], R 为主瓣最大增益与旁瓣最大增益的比值, R 可以用 x_0 表示如下^[16]:

$$R = \cosh(M \cosh^{-1}(x_0)) \quad (12)$$

x_0 用来控制波束零点之间的宽度,即 $2\alpha_0$, 它们之间的关系如下所示^[16]:

$$x_0 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2M}\right)}{\cos(\alpha_0/2)} \quad (13)$$

$2\alpha_0$ 代表了期望的主瓣宽度, R 最终可以通过 $2\alpha_0$ 求得。球谐域 Dolph-Chebyshev 波束形成权值系数 c_n 的设计可以通过式(11)得到^[11]。

然而 Dolph-Chebyshev 波束形成虽然可以有效地控制主瓣宽度和旁瓣,但是它对主瓣宽度的控制是以牺牲旁瓣为代价,即主瓣越窄,旁瓣增益越大。当 Dolph-Chebyshev 波束形成的主瓣宽度与常规波束形成相同时,它具有更高的旁瓣增益,大大降低了声场的空间分辨率,仿真实验将证明这一性能。通过分析发现,造成这一现象的原因在于 Chebyshev 多项式的性质,即主瓣宽度和旁瓣最大增益是相互矛盾的。Dolph-Chebyshev 波束形成正是通过逼近 Chebyshev 多项式得到的,因此 Dolph-Chebyshev 波束形成也继承了这个特点。

针对 Dolph-Chebyshev 波束形成存在的不足,我

们提出一种二次 Dolph-Chebyshev 波束形成方法,即在等式(11)的右边平方 Chebyshev 多项式。平方后 Chebyshev 多项式的零点坐标 α 仍然保持不变,然而在相同的 $2\alpha_0$ 情况下,旁瓣最大增益与主瓣最大增益的差值将相对平方前变大。也就是说,在保持主瓣最大增益不变的情况下,通过平方 Chebyshev 多项式可以降低旁瓣的最大增益。修改等式(11),计算改进后的波束形成权值,推导过程如下:

$$\sum_{n=0}^N c_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\alpha) = \frac{1}{R} T_M^2(x_0 \cos(\alpha/2)) \quad (14)$$

利用关系式 $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1 + \cos(\alpha))/2}$, 并令 $M = 2N$, 得

$$\sum_{n=0}^N c_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(x) = \frac{1}{R} T_{2N}^2\left(x_0 \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) \quad (15)$$

上式中 $x = \cos\alpha$, 且 $x \in [-1, 1]$ 。然后上式两边同时乘以 legendre 多项式 $P_k(x)$, 并对 x 求积分, 我们得到

$$\int_{-1}^1 \sum_{n=0}^N c_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(x) P_k(x) dx = \frac{1}{R} \int_{-1}^1 P_k(x) T_{2N}^2\left(x_0 \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) dx \quad (16)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, N$, legendre 多项式具有正交性^[15], 即

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_k(x) dx = \frac{2}{2k+1} \delta_{nk} \quad (17)$$

由式(16)和式(17)得到

$$c_k = \frac{2\pi}{R} \int_{-1}^1 P_k(x) T_{2N}^2\left(x_0 \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) dx \quad (18)$$

令 p_i^k 和 t_j^k 分别代表 k 阶 legendre 多项式和 k 阶 Chebyshev 多项式的 i 次项系数^[11], 则两个多项式展开如下:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k p_i^k x^i \quad (19)$$

$$T_{2N}(x) = \sum_{j=0}^N t_j^{2N} x^{2j} \quad (20)$$

将式(19)和(20)代入式(18)中, 得到优化后的 c_k 值

$$c_k = \frac{2\pi}{R} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^N \left(\frac{1}{2^{l+j}}\right) t_{2l}^{2N} t_{2j}^{2N} p_i^k x_0^{2(l+j)} \int_{-1}^1 x^i (1+x)^{l+j} dx \quad (21)$$

利用二项式展开公式^[15]

$$(1+x)^j = \sum_{m=0}^j \frac{j!}{m!(j-m)!} x^m \quad (22)$$

最终得到球谐域二次 Dolph-Chebyshev 波束形成权值系数 c_k 的表达式如下:

$$c_k = \frac{2\pi}{R} \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^{l+j} \frac{1 - (-1)^{m+l+1}}{m+l+1} \times \frac{(l+j)!}{m!(l+j-m)!} \left(\frac{1}{2^{l+j}}\right) t_{2l}^{2N} t_{2j}^{2N} p_i^k x_0^{2(l+j)} \quad (23)$$

将上式代入式(10)可得到球谐域波束响应, 我们将通过仿真来验证优化后的权值系数能获得更优的波束响应。本文对 Dolph-Chebyshev 波束形成的改进限于平方, 原因在于 Dolph-Chebyshev 波束形成的设计是一个逼近的过程, 更高次数的逼近反而会严重降低波束形成的性能。

3 仿真与性能

衡量波束形成性能优劣的指标包括主瓣宽度、旁瓣增益、指向性和白噪声增益等, 我们将分析各性能指标的特征, 并针对每个指标比较三种波束形成的性能优劣, 然后通过仿真加以验证。

球谐域波束形成的主瓣宽度将影响其空间分辨率, 通常主瓣宽度可以通过近似公式^[4]

$$2\alpha_0 \approx \frac{2\pi}{N} \quad (24)$$

得到。其中 $2\alpha_0$ 为主瓣宽度, N 为球阵的阶数。从式(24)可以看出, N 越大, 则主瓣越窄, 空间分辨率越高。

在仿真实验中我们设球阵的阶数分别为 6 和 8, 根据式(24)得到常规波束形成的主瓣宽度分别为 $\pi/3$ 和 $\pi/4$ 。同时设 Dolph-Chebyshev 波束形成和二次 Dolph-Chebyshev 波束形成具有与常规波束形成相同的主瓣宽度, 即 $2\alpha_0$ 为 $\pi/3$ 和 $\pi/4$ 。然后根据文献[10]计算 Dolph-Chebyshev 波束形成的权值系数, 由式(23)计算优化的波束形成权值系数, 并取常规波束形成的权值系数 $c_n \equiv 1$ 。最后根据公式(10)分别得到三种波束形成的波束响应, 做归一化处理后, 波束响应图如图 1 所示。

从图 1 可以看出, 球阵的阶数 N 越大, 波束的主瓣宽度确实越窄, 接近 $2\pi/N$ 。通过仿真表明阶数越高, 分辨率也越高。然而旁瓣也将影响到声场空间分辨率, 如果旁瓣过大, 则可能模糊掉主瓣和旁瓣, 甚至淹没主瓣。如图 1 所示, 在主瓣(包括宽度和增益)相同的条件下, Dolph-Chebyshev 波束响应的

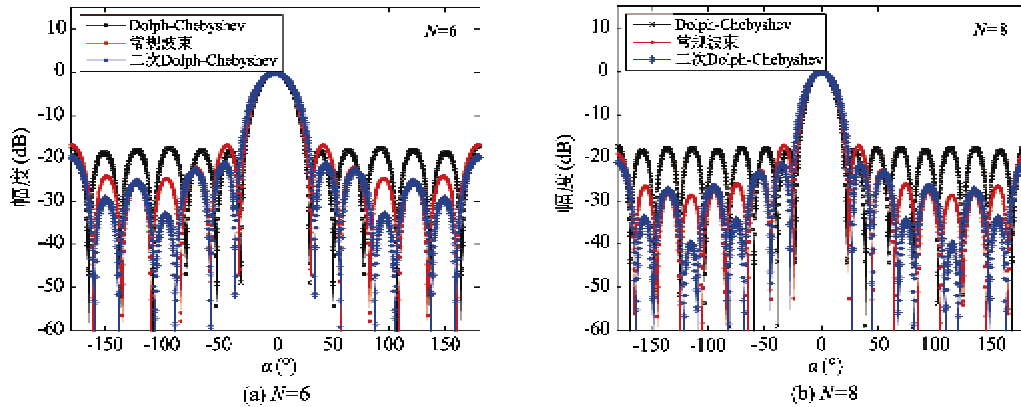


图 1 波束响应比较图

旁瓣比常规波束响应更大,而用二次 Dolph-Chebyshev 波束响应获得的旁瓣比前两者都要小,声场的空间分辨率得到了提高,这证明我们提出的改进方法是有效的。

空间分辨率的高低还可以通过波束形成的指向性系数 DI 来衡量。球谐域波束形成的指向性系数表示为^[10]

$$DI = \frac{\left| \sum_{n=0}^N c_n (2n+1) \right|^2}{\sum_{n=0}^N |c_n|^2 (2n+1)} \quad (25)$$

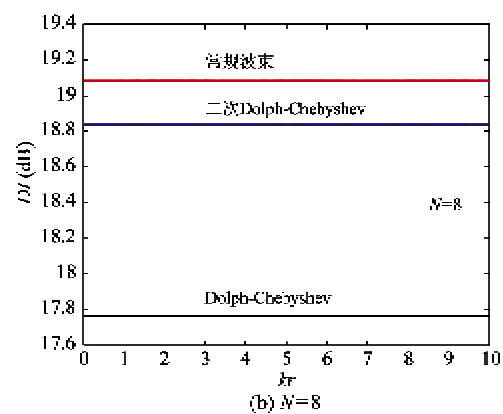
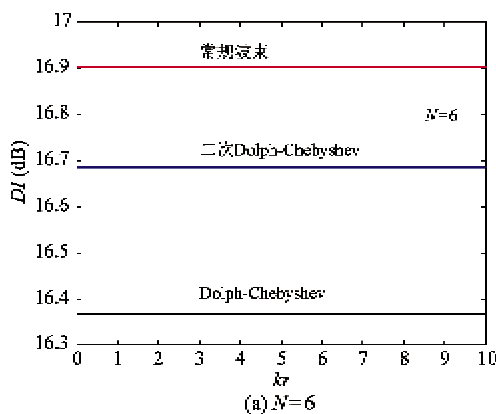


图 2 指向性系数频率响应比较图

白噪声增益用来衡量波束形成处理噪声的能力,它表示为阵列的输出与输入的比值,假设球阵的阵元数目为 M ,其中 $M \geq (N+1)^2$,则白噪声增益 (WNG) 可表示为^[5]

$$WNG = \frac{M}{(4\pi)^2} \frac{\left| \sum_{n=0}^N c_n (2n+1) \right|^2}{\sum_{n=0}^N \left| \frac{c_n}{b_n} \right|^2 (2n+1)} \quad (26)$$

WNG 值越大,则表明波束形成处理噪声的能力越

指向性系数 DI 值越大,则波束的指向性越好,空间分辨率越高。在球阵的阶数为 6 和 8 的情况下,根据式(25)求波束形成的指向性,图 2 描述了所求频率响应的结果比较。

从图 2 可以看出,球阵的阶数越高,二次 Dolph-Chebyshev 波束形成的指向性越接近于常规波束形成,这说明其指向性随着球阵阶数的增大逼近于常规波束形成。然而 Dolph-Chebyshev 波束形成的指向性始终不如前两者,而且随着球阵阶数的增大产生更大的偏差。

强,图 3 比较了在不同波束形成下白噪声增益频率响应。

分析对比图 3 中白噪声增益的频率响应,我们发现 Dolph-Chebyshev 波束形成的白噪声增益比其他两种波束形成都要差,这说明它的抗噪声性能不如其他两者。同时在低频情况下,即 $kr \leq N$ 时,二次 Dolph-Chebyshev 波束形成的白噪声增益要优于常规波束形成,说明在低频情况下二次 Dolph-Chebyshev 波束形成处理噪声的能力更强。

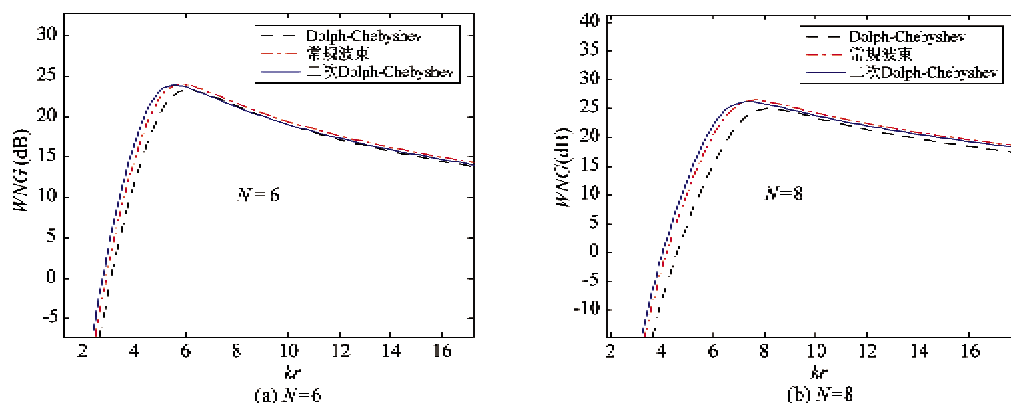


图3 白噪声增益频率响应比较图

4 结论

本文首先讨论了球谐域常规波束形成和 Dolph-Chebyshev 波束形成的原理,相对于常规波束形成,球谐域 Dolph-Chebyshev 波束形成具有可控制主瓣宽度和最大旁瓣级的优点。然而在主瓣宽度与常规波束形成相同的情况下,Dolph-Chebyshev 波束形成具有更高的旁瓣增益,大大降低了声场的空间分辨率。本文提出了一种二次 Dolph-Chebyshev 波束形成可以有效地降低旁瓣,达到提高声场分辨率的效果。且改进后的 Dolph-Chebyshev 波束形成在低频时具有比常规波束形成更高的白噪声增益,从而提高了处理噪声的能力。然而本文提出的方法只限于理想环境,在实际中还必须考虑冗余误差和阵元位置误差对波束形成性能造成的影响,这将是以后要研究的内容。

参考文献

- [1] Meyer J, Elko G W. A spherical microphone array for spatial sound recordings (a). *Journal of the Acoustical Society of America*, 2002, 111(5): 2346-2346
- [2] Rafaely B. Spatial sampling and beamforming for spherical microphone arrays. In: *Proceedings of the Hands-Free Speech Communication and Microphone Arrays*, Trento, Italy, 2008. 5-8
- [3] Peled Y, Rafaely B. Method for dereverberation and noise reduction using spherical microphone arrays. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Dallas, USA, 2010. 113-116
- [4] Rafaely B. Plane-wave decomposition of the sound field on a sphere by spherical convolution. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 116(4): 2149-2157
- [5] Rafaely B. Analysis and design of spherical microphone arrays. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 2005, 13(1): 135-143
- [6] Khaykin D, Rafaely B. Coherent signals direction-of-arrival estimation using a spherical microphone array: frequency smoothing approach. In: *Proceedings of the IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, New Paltz, USA, 2009. 221-224
- [7] Yan S, Sun H, Svensson U P, et al. Optimal modal beamforming for spherical microphone arrays. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2011, 19(2): 361-371
- [8] Sun H, Yan S, Svensson U P. Robust minimum sidelobe beamforming for spherical microphone arrays. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2011, 19(4): 1045-1051
- [9] Li Z, Duraiswami R. Flexible and optimal design of spherical microphone arrays for beamforming. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2007, 15(2): 702-714
- [10] Rafaely B. Phase-mode versus delay-and-sum spherical microphone array processing. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(10): 713-716
- [11] Koretz A, Rafaely B. Dolph-Chebyshev beam pattern design for spherical microphone arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6): 2417-2420
- [12] Sun H, Yan S, Svensson U P. Robust spherical microphone array beamforming with multi-beam-multi-null steering, and sidelobe control. In: *Proceedings of the IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, New Paltz, USA, 2009. 113-116
- [13] Williams E G. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. San Diego: Academic Press Publisher, 1999. 224-234
- [14] Meyer J, Elko G. A highly scalable spherical microphone array based on an orthonormal decomposition of the

- soundfield. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Orlando, USA, 2002. 1781-1784
- [15] Arfken G B, Weber H J. Mathematical Methods for Physicists. 5th Edition. San Diego: Academic Press Publisher, 2000. 786-793
- [16] Trees H L V. Optimum Array Processing (Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV). New York: John Wiley & Sons, Inc. Publisher, 2002. 128-149

Design of quadratic Dolph-Chebyshev beamforming in spherical harmonic domain

Huang Qinghua, Zhong Qiang, Li hua

(School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072)

Abstract

A method for quadratic Dolph-Chebyshev beamforming in spherical harmonic domain is proposed in this paper. Based on the regular beamforming and the Dolph-Chebyshev beamforming, this method uses the quadratic Dolph-Chebyshev polynomial to calculate the weights of the beamformer. The quadratic Dolph-Chebyshev polynomial can decrease the largest gain of the sidelobe under the condition of the constant largest gain of the mainlobe. Therefore, it can restrict the sidelobe effectively and improve the spatial resolution of the sound field with the same mainlobe width. Moreover, the higher white noise gain can be obtained at low frequencies, so spherical arrays can resist noise effectively. The simulation results demonstrated the advantages of the proposed method by comparing the three beamforming methods.

Key words: spherical harmonic domain, beamforming, Chebyshev polynomial, sidelobe, spherical array