

基于倍四元数的机器人运动灵活性评价^①

杜 滨^② 赵 京^③

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院 北京 100124)

摘 要 针对机器人的雅可比矩阵量纲不统一而不能对其进行灵活性评价这一问题,提出了一种新的雅可比矩阵量纲统一及评价方法。首先基于倍四元数,将三维空间的旋转和平移统一为四维空间的纯转动,推导了基于倍四元数的连杆坐标系变换通式。然后利用该方法对机器人进行了运动学建模,得到了具有统一量纲的雅可比矩阵,并根据该矩阵定义了新的评价指标。该方法解决了混合关节机器人建模时所产生的雅可比矩阵量纲不统一的问题。最后,对空间 3R 机器人和空间 RPR 机器人的灵活性进行了数值仿真分析,结果表明该评价方法不仅适用于相同类型关节的机器人,同时适用于混合关节类型的机器人。

关键词 机器人, 运动灵活性, 倍四元数, 条件数, 可操作度, 混合关节

0 引 言

随着工业机器人的广泛应用,对机器人的运动性能的要求则不断提高,因而优化设计出运动性能良好的机器人显得尤为重要。机器人的运动灵活性是衡量机器人运动性能的重要指标,它是指机器人末端执行器在笛卡儿空间中运动的能力。评价机器人的运动灵活性是一项重要工作。本文针对机器人的雅可比矩阵量纲不统一导致不能进行灵活性评价的情况进行了研究,提出了一种基于倍四元数的机器人运动灵活性评价方法,并做了相关论述。

1 相关研究

为了评价机器人在工作任务时的运动灵活性和运动性能,许多学者对这一问题展开了大量的研究^[1-6]。Vinogradov 等^[1]首次将机器人操作臂的服务角用来评价机器人的运动性能。Salisbury 和 Craig^[2]利用雅可比矩阵的条件数作为评价 Stanford/JPL 手爪理想尺度的最优化准则。Yoshikawa^[3]引入了可操作性的概念,用来衡量机器人的整体灵活性。Kokkinis 等^[4]利用雅可比矩阵的最小奇异值

作为控制所需关节速度上限的指标。Klein 和 Blaho^[5]提出了评价设计和控制运动冗余机器人的灵活性的方法。Angeles 和 Lopez-Cajun^[6]指出对于串联型机器人第一个关节并不影响机器人的条件数,条件数只与中间变量有关。他们提出把最小条件数的倒数定义为度量操作臂灵巧性的指标。

事实上,对于机器人的关节同时包含转动关节和移动关节或者同时考虑机器人末端的位置和姿态时,机器人雅可比矩阵存在不同的量纲,Lipkin 和 Duffy^[7]最早对这一问题进行了阐述。雅可比矩阵中的元素单位不同,则不能将奇异值从大到小排序。当存在这一问题时,如果按照经典的指标或分析方法对机器人的运动灵活性进行研究,就会存在很多不合理的地方,所得结果甚至会与预期结果相差很远。Schwartz^[8]通过理论分析和数值仿真对该问题进行了非常详尽的阐述和说明。

为了解决这一矛盾,Gosselin^[9]选择末端执行器上的一系列点来描述末端的速度,这样重新定义的雅可比矩阵量纲就统一了。但是 Gosselin 并没有说明如何选择末端执行器上的这些点。Tandirci^[10]将雅可比矩阵的定位行除以一个特征长度,这样就能将雅可比矩阵的量纲统一。但新雅可比矩阵的条件数依赖于特征长度,并且这种方法不适用于混合关

① 国家自然科学基金(50775002)资助项目。

② 男,1985 年生,博士生;研究方向:移动机械臂协调控制;E-mail: wdde@163.com

③ 通讯作者,E-mail: zhaojing@bjut.edu.cn

(收稿日期:2011-03-29)

节的情况。Angeles^[6]在文献[9]的基础上选取末端非共线的3点,将这3个点看成理想多面体的顶点,这样得到一个关于多面体面数和多面体外接球半径的加权矩阵,将加权矩阵与雅可比矩阵相乘,新雅可比矩阵为量纲为长度单位的统一量纲的矩阵。Stocco^[11]从力转换关系的角度,利用缩放矩阵对雅可比的量纲进行统一。新的雅可比矩阵将关节速度的百分比矢量投影为末端速度的百分比矢量。Mansouri^[12]将电路中的视在功率引入灵活性分析,通过末端功率与关节功率之间的转换关系反映机器人的灵活性。黄田等^[13]用独立坐标描述并联机器人平台的运动类型,推导了量纲统一的雅可比矩阵。

造成雅可比矩阵量纲不统一的根本原因在于:采用传统的齐次变换矩阵对机器人进行运动学建模,并不能消除移动关节和转动关节之间的速度差异。机器人末端速度的表达方式导致考虑位姿时,机器人雅可比矩阵量纲的不统一。Clifford^[14]在Hamilton的基础上拓展了四元数(Quaternion)概念,提出了倍四元数(Double Quaternion)。近年来,四元数、倍四元数逐步应用到机器人研究领域,如姿态描述^[15]、运动学逆解^[16]、机器视觉^[17]、跟踪反馈控制^[18]等。文献[19]将三维空间的位移表示为四维空间中倍四元数表示的双旋转。文献[20]利用倍四元数完成了空间6自由度串联机构位置逆解。倍四元数把刚体在三维空间的旋转和平移统一为四维空间的纯转动,这样就把齐次变换矩阵中的旋转和平移统一表达。本文利用倍四元数对串联机器人进行运动学建模,推导了倍四元数的矩阵表示形式,得到了量纲统一的连杆坐标系变换通式。根据运动方程求得的雅可比矩阵为无量纲的矩阵,利用该雅可比矩阵对机器人运动灵活性进行评价。这种方法适用于混合关节及考虑机器人末端位姿情况下对机器人的运动灵活性进行评价,拓展了现有评价指标的适用范围,具有一般性。

2 齐次变换与倍四元数

三维空间中刚体动坐标系 B 相对于惯性系 A 的位姿描述包含: B 系相对于 A 系的姿态为 $R_{ab} \in SO(3)$, A 系的坐标原点到 B 系原点的位置矢量为 $p_{ab} \in \mathcal{R}^3$ 。以 z 轴上的坐标变换为例,绕 z 轴旋转 θ 且沿 z 轴平移 d ,可表示为

$$Z(\theta, d) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

则 4×4 矩阵 $Z(\theta, d)$ 称为齐次变换矩阵。这个矩阵可以看成在四维欧拉空间中 $W=1$ 的超平面上的刚体位移^[21]。同样,这个刚体位移能被定义在 $W=R$ 的与之平行的超平面上,此时,要把平移项除以 R ,式(1)变为

$$Z(\theta, d) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d/R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

角度 γ 由式

$$\tan\gamma = \frac{d}{R} \quad (3)$$

确定。式中 R 由文献[22]给出, $R=L/\delta^{1/2}$,其中 L 为机器人手臂所能达到的工作空间尺寸的最大值, δ 为指定的精度。

此时 $Z(\theta, d)$ 可近似地表示为 4×4 的旋转变换矩阵

$$Z(\theta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (4)$$

R 为一个足够大的值,使式(2)与式(4)近似相等。通过上述变换将系统的位形空间 $SE(3)$ 映射为四维空间的特殊正交旋转 $SO(4)$ 。

Ge^[22]指出,四维旋转矩阵可以表示为两个倍四元数的乘积形式。对式(4)有

$$Z_\theta = G_\theta \circ H_\theta \quad (5)$$

其中:

$$G_\theta = [\cos((\theta + \gamma)/2) \quad 0 \quad 0 \quad \sin((\theta + \gamma)/2)]$$

$$H_\theta = [\cos((\theta - \gamma)/2) \quad 0 \quad 0 \quad \sin((\theta - \gamma)/2)]$$

$\circ$ 为倍四元数乘积符号

同样,绕 x 轴旋转 α 且沿 x 轴平移 a 的齐次变换矩阵为

$$X(\alpha, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$X(\alpha, a)$ 的 4×4 的旋转变换矩阵为

$$X(\alpha, \rho) = \begin{bmatrix} \cos\rho & 0 & 0 & \sin\rho \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\sin\rho & 0 & 0 & \cos\rho \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)的倍四元数表示为

$$X_\alpha = G_\alpha \circ H_\alpha \quad (8)$$

其中:

$$G_\alpha = [\cos((\alpha + \rho)/2) \quad \sin((\alpha + \rho)/2) \quad 0 \quad 0]$$

$$H_\alpha = [\cos((\alpha - \rho)/2) \quad \sin((\alpha - \rho)/2) \quad 0 \quad 0]$$

$$\tan\rho = \frac{a}{R}$$

连杆坐标变换的齐次变换矩阵通式表示为

$$T = Z(\theta, d)X(\alpha, a) \quad (9)$$

基于倍四元数的连杆坐标变换表示为

$$Q = Z_\theta \circ X_\alpha \quad (10)$$

将式(10)写成矩阵的形式为

$$Q = Z(\theta, \gamma)X(\alpha, \rho) \\ = \begin{bmatrix} \cos\rho\cos\theta & -\cos\rho\sin\theta & \sin\rho\sin\theta & \sin\rho\cos\theta \\ \cos\rho\sin\theta & \cos\rho\cos\theta & -\sin\rho\sin\theta & \sin\rho\cos\theta \\ -\sin\rho\sin\theta & \sin\rho\cos\theta & \cos\rho\sin\theta & \cos\rho\cos\theta \\ -\sin\rho\cos\theta & -\sin\rho\sin\theta & -\cos\rho\sin\theta & \cos\rho\cos\theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

3 运动学方程的建立

串联机器人通过 DH 参数来描述连杆之间的空间位置关系,如图 1 所示。末端相对于基座的变换矩阵是通过将各个连杆变换通式相乘得到。则

$$T = T_1 T_2 \cdots T_n \quad (12)$$

用倍四元数描述末端相对于基座的变换为

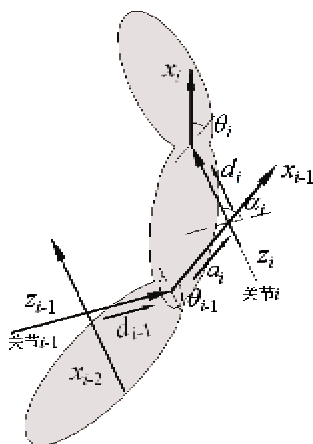


图 1 连杆空间位置关系

$$Q = Q_1 \circ Q_2 \circ \cdots \circ Q_n \quad (13)$$

将式(13)用矩阵的形式表示为

$$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_n \quad (14)$$

则末端相对于基座的位置矢量 d 为

$$d = \begin{bmatrix} Q_{14}R \\ Q_{24}R \\ Q_{34}R \end{bmatrix} \quad (15)$$

末端相对于基座的俯仰角、偏转角、回转角分别为

$$\theta = \arctan(Q_{13}/Q_{33})$$

$$\phi = \arctan(Q_{23}\sin\theta/Q_{13}) \quad (16)$$

$$\psi = \arctan(Q_{21}/Q_{22})$$

其中 Q_{ij} 为式(14)中矩阵 Q 的元素。

显然,转动关节的关节变量为 θ_i , 移动关节的关节变量为 γ_i 。将式(15)、式(16)分别对时间 t 求导,得

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \end{bmatrix} = R J_v \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_w \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

将式(17)、式(18)写在一起,得到关节变量与机器人末端位姿的微分关系为

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x/R \\ \dot{d}_y/R \\ \dot{d}_z/R \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中 J_v 表示位置雅可比矩阵, J_w 表示姿态雅可比矩阵。

4 运动灵活性评价指标

4.1 条件数

条件数定义为

$$\kappa(J) = \begin{cases} \|J\| \|J^{-1}\| & (m = n, \text{且非奇异}) \\ \|J\| \|J^+\| & (m < n) \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\|\cdot\|$ 代表任意矩阵的范数,通常取 Euclidean 范数。

条件数与奇异值的关系为

$$\kappa(J) = \sigma_1 / \sigma_r \quad (21)$$

式中: σ_1 和 σ_r 是 J 的最大和最小奇异值。

矩阵条件数的取值范围是

$$1 \leq \kappa(J) \leq \infty \quad (22)$$

当 $\kappa(J) = 1$ 时,机器人所具有的位形称为各向同性。在设计机器人机械结构时,应尽量使其最小条件数为 1,这时灵巧性最高,各奇异值相等,即有

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_r \quad (23)$$

4.2 相同关节类型

由传统齐次变换矩阵得到的关节变量与机器人末端位姿的微分关系表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v1} \\ J_{\omega1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

由倍四元数建模得到的关节变量与机器人末端位姿的微分关系表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x/R \\ \dot{d}_y/R \\ \dot{d}_z/R \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v2} \\ J_{\omega2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

Angeles^[6]通过对空间 6R 串联机械臂进行研究,指出当手臂和手腕支链均各向同性时,也得不到整个机械臂的各向同性。对空间机器人进行运动灵活性评价时,往往将位置和姿态雅可比矩阵分开进行评价。比较式(24)和式(25),容易得到

$$\kappa(J_{\omega1}) = \kappa(J_{\omega2}) \quad (26)$$

$$J_{v1} = R J_{v2} \quad (27)$$

由条件数定义,知

$$\kappa(J_{v1}) = \|J_{v1}\| \|J_{v1}^{-1}\| \quad (28)$$

将式(27)代入式(28),得

$$\kappa(J_{v1}) = R \cdot \frac{1}{R} \|J_{v2}\| \|J_{v2}^{-1}\| = \kappa(J_{v2}) \quad (29)$$

式(26)、式(29)表明,基于倍四元数的评价方法与基于传统条件数对相同关节类型的机器人进行评价具有等价的关系。

4.3 混合关节类型

机器人关节变量同时包含转动关节和移动关节时,由于雅可比矩阵量纲不统一,不能用传统的条件数进行运动灵活性评价。以第 2 个关节为移动关节为例,用倍四元数对混合关节的机器人进行建模,得到的关节变量与机器人末端位姿的微分关系表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x/R \\ \dot{d}_y/R \\ \dot{d}_z/R \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(30)同样可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x/R \\ \dot{d}_y/R \\ \dot{d}_z/R \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v1} & J_{v2} & \cdots & J_{vn} \\ J_{\omega1} & J_{\omega2} & \cdots & J_{\omega n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2/R \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (31)$$

为了消除 R 对条件数的影响,将移动关节对应的奇异值除以 R 后,对所有的奇异值进行排序,得到最大奇异值 σ_1 、最小奇异值 σ_r 。条件数同样定义为

$$\kappa(J) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \quad (32)$$

5 仿真实例

5.1 空间 3R 机器人

空间 3R 机械臂如图 2 所示。

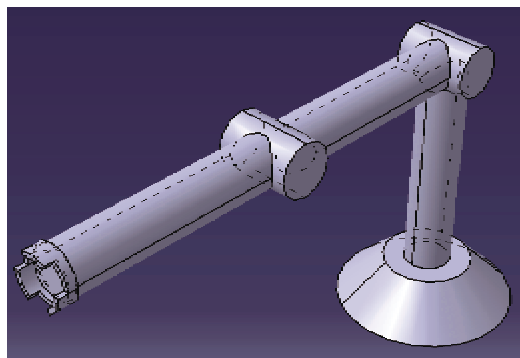


图2 空间 3R 机械臂

机器人末端轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = -0.2\cos(2\pi t) \\ y = 0.2\sin(2\pi t) \\ z = 0 \end{cases} \quad (33)$$

对同一个任务,传统方法与倍四元数法求得的关节角误差、条件数误差如图 3 所示。

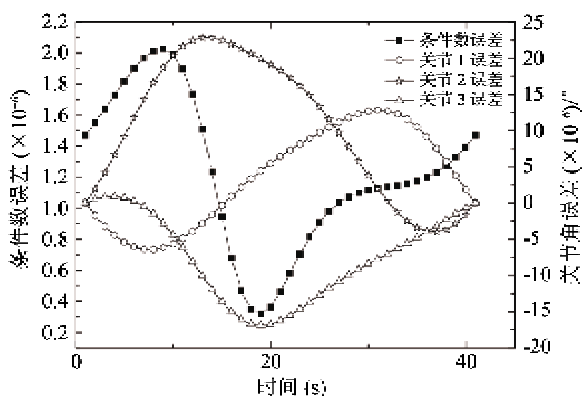


图3 关节及条件数误差

以上结果表明,机器人关节类型相同时,基于倍四元数的条件数评价方法和基于传统齐次变换矩阵的条件数评价方法等价。对机器人精度 δ 要求越高时, R 越大,同时这两种方法的计算结果之间的误差越小。

5.2 空间 RPR 机器人

对于不同类型关节的机器人,由于雅可比矩阵量纲不统一,不能直接对雅可比矩阵进行奇异值分解,不能用条件数进行运动灵活性评价,同样也得不到机器人目标工作位置的可操作椭球。然而,基于倍四元数的条件数评价方法可以对这类混合关节机器人进行评价。空间 RPR 机械臂如图 4 所示。

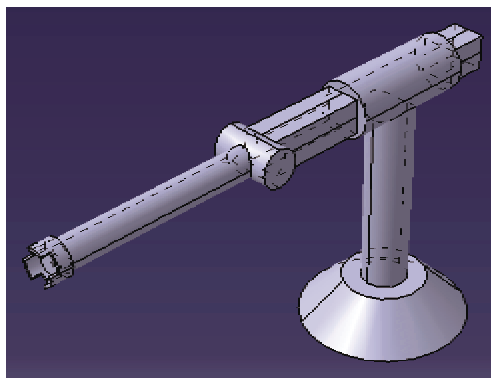


图4 空间 RPR 机械臂

机器人末端轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1.5\cos^3(2\pi t) \\ y = 1.5\sin^3(2\pi t) \\ z = 1 - \sqrt{3}/2 \end{cases} \quad (34)$$

传统方法与倍四元数法求得的关节角误差及基于倍四元数的条件数如图 5 所示,空间 RPR 机器人在目标工作位置处的可操作椭球如图 6 所示。

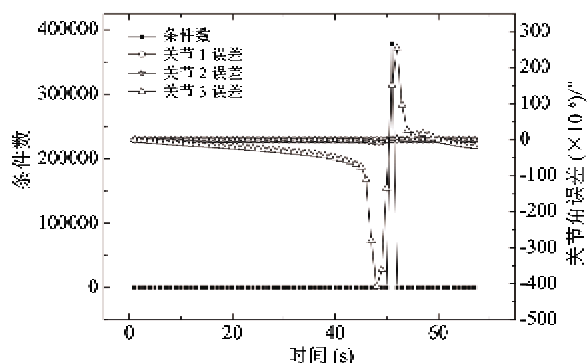


图5 关节角误差及基于倍四元数的条件数

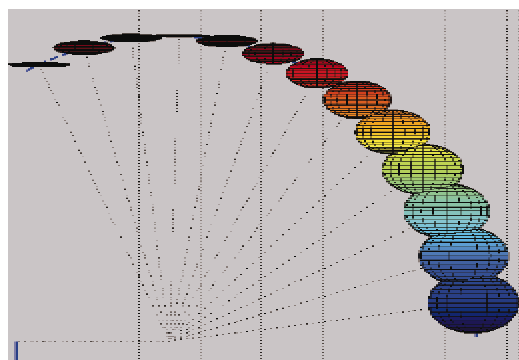


图6 空间 RPR 机器人的可操作椭球

由图 5 知,初始时刻,空间 RPR 机器人在 $\theta_3 = 0$ 时,条件数最小(但不为 1)。随着 θ_3 的增大,条件数逐渐增大,机器人末端在各个方向上的运动能力

差异也逐渐增大。在 $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$ 处,机器人处于奇异位形,条件数趋于无穷大,可操作椭圆退化为一个椭圆。图6的可操作椭圆变化反映了机器人末端的运动能力大小差异的变化。

仿真结果表明:基于倍四元数对混合关节机器人进行运动学逆解,其计算精度符合设计要求;由新的雅可比矩阵得到的条件数能够反映出机器人在工作过程中,奇异位形及运动能力的变化情况。

6 结 论

倍四元数把刚体在三维空间的旋转和平移统一为四维空间的纯转动,由倍四元数的矩阵表示形式,推导了量纲统一的连杆坐标系变换通式,这个通式消除了关节空间中转动关节和移动关节的速度向机器人操作空间中末端速度映射的差异。

利用基于倍四元数的连杆坐标系变换通式,建立机器人运动方程。所求得的雅可比矩阵为无量纲的矩阵,利用该雅可比矩阵对机器人运动灵活性进行评价,可以消除机器人混合关节带来的雅可比矩阵量纲不统一的矛盾。利用量纲统一的雅可比矩阵对机器人进行运动灵活性评价,其结果与设计变量无关。该方法同时适用于转动副、移动副和圆柱副等多种关节混合的情况,拓展了现有评价指标的适用范围,具有一般性。方法简单实用,计算效率高。

目前,对考虑机器人末端位姿情况下的整体运动灵活性评价研究较少。基于倍四元数的机器人运动建模方法,得到的整体雅可比矩阵是无量纲的矩阵。因此,该评价方法同时适用于考虑机器人末端位姿情况下对机器人的运动灵活性进行评价。

参考文献

- [1] Vinogradov I B, Kobrinski A E, Stepanenko Y E. Details of kinematics of manipulators with method of volumes. *mekhanika mashin*. 1971(27-28): 5-16
- [2] Salisbury J K, Craig J J. Articulated hands: force control and kinematic issues. In: Proceedings of the 1981 Joint Automatic Control Conference, New York, USA, 1981. 1-2
- [3] Yoshikawa T. Manipulability of robotic mechanisms. In: Proceedings of the Robotics Research, The Second International Symposium, Kyoto, Japan, 1985. 439-446
- [4] Stoughton R, Kokkinis T. Some properties of a new kinematic structure for robot manipulators. In: Proceedings of the Advances in Design Automation, Boston, USA, 1987. 73-79
- [5] Klein C A, Blaho B E. Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 1987, 6(2): 72-83
- [6] Angeles J, Lopez-Cajun C S. Kinematic isotropy and the conditioning index of serial robotic manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 1992, 11(6): 560-571
- [7] Lipkin H, Duffy J. Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator. *Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design*, 1988, 110(2): 138-144
- [8] Schwartz E M, Manseur R, Doty K L. Noncommensurate systems in robotics. *International Journal of Robotics & Automation*, 2002, 17(2): 86-92
- [9] Gosselin C M. Dexterity indices for planar and spatial robotic manipulators. In: Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Los Alamitos, USA, 1990. 650-655
- [10] Tandirci M, Angeles J, Ranjbaran F. Characteristic point and the characteristic length of robotic manipulators. In: Proceedings of the 22nd Biennial Mechanisms Conference, Scottsdale, USA, 1992. 203-208
- [11] Stocco L, Salcudean S E, Sassani F. Matrix normalization for optimal robot design. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, New York, USA, 1998. 1346-1351
- [12] Mansouri I, Ouali M. A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept. *Mechatronics*, 2009, 19(6): 927-944
- [13] Liu H, Huang T, Chetwynd D G. A Method to Formulate a Dimensionally Homogeneous Jacobian of Parallel Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, 27(1): 150-156
- [14] Clifford W K. Application of Grassmann's extensive algebra. *Amer J of Math*, 1878, 1: 350-358
- [15] Arribas M, Elipe A, Palacios M. Quaternions and the rotation of a rigid body. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, 96(3-4): 239-251
- [16] Aydin Y, Kucuk S. Quaternion based inverse kinematics for industrial robot manipulators with Euler wrist. In: Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics, Piscataway, USA, 2006. 97-105
- [17] Mukundan R. Quaternions: from classical mechanics to computer graphics, and beyond. In: Proceedings of the 7th Asian Technology Conference in Mathematics, Multi-

- media University (Melaka Campus), Malaysia, 2002. 97-106
- [18] Xian B, De Queiroz M S, Dawson D, et al. Task-space tracking control of robot manipulators via quaternion feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(1): 160-167
- [19] Etzel K R, Mccarthy J M. Metric for spatial displacements using biquaternions on $SO(4)$. In: Proceedings of the 13th IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, USA, 1996. 3185-3190
- [20] Qiao S, Liao Q, Wei S, et al. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on double quaternions. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(2): 193-199
- [21] Mccarthy J M. Introduction to Theoretical Kinematics. Cambridge, MA: MIT Press, 1990. 46-52
- [22] Ge Q J, Varshney A, J. Menon C C. Double quaternion for motion interpolation. In: Proceedings of the 1998 ASME Design Manufacturing Conference, Atlanta, USA, 1998. 1-9

Kinematic dexterity measures for robot manipulators based on double quaternion

Du Bin, Zhao Jing

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology,
Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract

In view of the fact that the dexterity evaluation on robots cannot be made due to the dimensional inhomogeneity of Jacobian, a new approach to formulation of the dimensional homogeneous Jacobian and kinematic dexterity measure for the robot with mixed joints is proposed. According to the double quaternion, the rotation and translation in three-dimensional Euclidean spaces are converted to the pure rotation in four-dimensional Euclidean spaces. The universal transformational expression of the link coordinate system is derived based on double quaternion. Then the kinematics model of robot is developed and the non-dimensional Jacobian is obtained by this approach. Furthermore, a new performance index is proposed. The new approach can solve the dimensional inhomogeneity of Jacobian which occurs for robots with mixed joints. Finally, the kinematic dexterity of spatial 3R and the spatial RPR robot is analyzed by numerical simulation. The results show that this approach is not only applicable to the robot with same joints, but also to the robot with mixed joints.

Key words: robot, kinematic dexterity, double quaternion, condition number, manipulability, mixed joints