

基于二元矢量阵 MUSIC 算法的相干源分辨研究^①

梁国龙^② 张 镨^③ 张光普 刘 凯 李 策

(哈尔滨工程大学水声技术国家重点实验室 哈尔滨 150001)

摘 要 研究了单矢量传感器多重信号分类(SV-MUSIC)算法对非相干源的分辨性能,推导了声源等功率情况下的信噪比分辨门限表达式。针对相干源的分辨问题,提出了一种基于空间平滑的二元矢量阵多重信号分类(DV-MUSIC)算法。仿真实验表明,SV-MUSIC 算法对非相干源的分辨能力随着信噪比的增加而提高,在相应的判定准则下其结果与理论值基本吻合,而基于二元矢量传感器的 DV-MUSIC 算法能够实现相干源的分辨,其分辨性能曲线一定程度上类似于 SV-MUSIC 算法对非相干源的分辨性能曲线。

关键词 二元矢量阵,多重信号分类(MUSIC),相干源,空间平滑

0 引 言

矢量传感器可以同时、共点拾取声场中的声压和振速信息,能比传统的声压传感器获得更多的信息量。近年来矢量信号处理成为研究热点之一^[1-5],国内外作者发表了很多文章,其中一些讨论了矢量阵的高分辨方位估计算法^[6-14]。文献[6]将单矢量传感器看作一个子阵处理,提出速度场波束域自初始化多重信号分类(multiple-signal classification, MUSIC)方法,然而此算法没有充分利用阵元之间的相位信息。文献[8]通过分析对比 MUSIC 算法的噪声子空间谱,得出矢量阵 MUSIC 算法的性能优于标量阵算法性能的结论。文献[10]尝试了在波束域实现矢量阵的 MUSIC 算法以提高运算速度,然而此算法没有利用单矢量传感器具有的高分辨方位估计能力。与此同时,小尺度矢量阵的信号处理研究也深受关注^[15-17],文献[15]提出了虚元技术和恒定束宽相结合的方法,实现了小尺度矢量阵相干源的分辨,但其算法较为复杂。文献[17]则是利用矢量传感器的时间反转镜技术实现了目标被动定位,但其定位精度受建模误差的影响较大。本文在前人工作的基础上,探讨了单矢量传感器(single vector-sensor, SV)MUSIC 算法,即 SV-MUSIC 算法的方位分辨性能,并在此基础上提出了一种基于空间平滑的二

元矢量阵(dual-vector-sensor array, DV)MUSIC 算法,即 DV-MUSIC 算法,该算法不仅考虑了单矢量传感器固有的阵列特性,还充分利用了阵元之间的相位信息,通过尝试将空间平滑技术应用在二元矢量阵信号处理上,实现了小尺度矢量阵相干源的分辨。

1 SV-MUSIC 算法的方位估计原理

若仅考虑二维矢量传感器,通过采样三路数据可产生一个 3×1 维的单矢量传感器阵列流形 $A(\theta)$, 则接收快拍数据模型 $X(t)$ 满足

$$X(t) = A(\theta)S(t) + N(t) \quad (1)$$

其中 $S(t)$ 为传感器接收的信号矢量, $N(t)$ 是噪声数据矢量。在这里

$$A(\theta) = [a(\theta_1) \cdots a(\theta_M)] \quad (2)$$

$$S(t) = [x_1(t) \cdots x_M(t)] \quad (3)$$

其中, M 是信源数, $x_k(t)$ 是第 k 个信源的声压波形, $a(\theta_k)$ 是第 k 个信源在矢量传感器上的阵列流形矢量,其表达式为

$$a(\theta_k) = [\cos\theta_k \sin\theta_k \ 1]^T \quad (4)$$

则阵列数据的协方差为 $R = E[XX^H]$, 由于信号与噪声相互独立,数据协方差矩阵 R 可以分为与信号、噪声相关的两部分,对 R 进行特征分解为

$$R = U_S \sum_S U_S^H + U_N \sum_N U_N^H \quad (5)$$

① 国家自然科学基金(51009042)和高等学校博士学科点专项科研基金(20102304120030)资助项目。

② 男, 1964 年生,教授,博士生导师;研究方向:水声信号处理。

③ 通讯作者, E-mail: zhangkai-000000@hrbeu.edu.cn

(收稿日期:2010-12-13)

其中 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_M]$ 是由大的特征值对应的特征矢量张成的信号子空间, 而 $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{M+1} \cdots \mathbf{u}_L]$ 是由小的特征值对应的特征矢量张成的噪声子空间。则构造入射信号的导向矢量 $\mathbf{v}(\theta)$, 即

$$\mathbf{v}(\theta) = [\cos\theta \ \sin\theta \ 1]^T / \sqrt{2} \quad (6)$$

在理想条件下, 数据的信号子空间与噪声子空间正交, 即入射信号的导向矢量与噪声子空间正交

$$\mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{U}_N = 0 \quad (7)$$

其空间谱估计公式为

$$P_{\text{MUSIC}} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{v}(\theta)} \quad (8)$$

显然, 当导向矢量指向信号空间时, 式(7)成立, 对空间谱进行搜索即可求出峰值对应的 $\hat{\theta}$ 。

2 SV-MUSIC 算法的方位分辨性能

MUSIC 算法的提出已有几十年的时间, 前人对该算法的性能已经做了深入的研究。考虑到基于阵列处理的 MUSIC 算法和 SV-MUSIC 算法之间存在的差异, 本文给出了 SV-MUSIC 算法在统计意义上的理论分辨能力。在推导公式前, 首先给出 MUSIC 算法的零谱估计表达式

$$D(\theta) = \mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{v}(\theta) \quad (9)$$

这种表达形式可为分析问题带来方便, 且不影响分析问题的本质。此时观察数据的协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 及其估计 $\hat{\mathbf{R}}$ 满足

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^L \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \quad (11)$$

式中, N 是数据的快拍数, L 是阵元数且等于 3, $\mathbf{u}_i$ 是对 $\mathbf{R}$ 进行特征分解得到特征向量, $\mathbf{X}_k$ 对应于第 k 个快拍数据矢量, 则在有限样本条件下 $D(\theta)$ 期望均值满足

$$\begin{aligned} \bar{D}(\theta) = & \sum_{j=1}^L \frac{(L-M)\lambda_j \delta^2}{N(\lambda_j - \delta^2)^2} (|\mathbf{v}^H(\theta_j) \mathbf{u}_j|^2 \\ & - |\mathbf{v}^H(\theta_j) \mathbf{u}_i|^2) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, δ^2 是噪声功率, 此时若存在两个目标, 信号射入方向分别为 θ_1 和 θ_2 , 定义 $\theta_d = (\theta_1 - \theta_2)/2$, $\theta_m = (\theta_1 + \theta_2)/2$, 当满足

$$D(\theta_m) > (D(\theta_1) + D(\theta_2))/2 \quad (13)$$

时, 可认为目标可以分辨^[18]。若这两目标为非相干声源, 其特征值和特征向量满足如下关系:

$$\begin{aligned} \lambda_{1(2)} = & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) [1 \pm \\ & \sqrt{1 - 4\sigma_1\sigma_2(1 - \phi^2)/(\sigma_1 + \sigma_2)^2}] + \delta^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{1(2)} \propto (\mathbf{v}(\theta_1) \pm \frac{\lambda'_{1(2)} - \sigma_1}{\sigma_1 \phi} \mathbf{v}(\theta_2)) \quad (15)$$

其中, $\lambda'_{1(2)} = \lambda_{1(2)} - \delta^2$, σ_1 和 σ_2 分别对应两个信号的功率, $\phi = \mathbf{v}^H(\theta_1) \mathbf{v}(\theta_2) = (\cos 2\theta_d + 1)/2$, 若两信源功率相等, 即 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 则满足

$$\begin{cases} \lambda'_{1(2)} = K\sigma(1 \pm |\phi|) \\ \mathbf{u}_{1(2)} \approx (\mathbf{v}(\theta_1) \pm \mathbf{v}(\theta_2)) / \sqrt{2(1 \pm \phi)} \end{cases} \quad (16)$$

其中, $K = \mathbf{a}(\theta_k)^H \mathbf{a}(\theta_k) = 2$, 此时可以得到

$$|\mathbf{v}^H(\theta_i) \mathbf{u}_1|^2 \approx 1 - \theta_d^2 + \frac{\theta_d^4}{3} \quad (17)$$

$$|\mathbf{v}^H(\theta_i) \mathbf{u}_2|^2 \approx \theta_d^2 - \frac{\theta_d^4}{3} \quad (18)$$

$$|\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{u}_1|^2 \approx 1 - \frac{5\theta_d^4}{48} \quad (19)$$

$$|\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{u}_2|^2 \approx 0 \quad (20)$$

注意到

$$\begin{aligned} \hat{D}(\theta_m) = & 1 - \mathbf{v}^H(\theta_m) \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H \mathbf{v}(\theta_m) \\ = & 1 - |\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{u}_1|^2 - |\mathbf{v}^H(\theta_m) \mathbf{u}_2|^2 \\ \approx & \frac{5\theta_d^4}{48} \end{aligned} \quad (21)$$

结合式(16) - (21)得到

$$\hat{D}(\theta_i) \approx \frac{(L-2)}{N} \left(\frac{1}{ASNR} + \frac{1}{2ASNR^2 \theta_d^2} \right) \quad (22)$$

其中, $ASNR = K\sigma/\delta^2$, 此时满足 $\hat{D}(\theta_m) \approx \bar{D}(\theta_m)$, 则根据式(13)得到信噪比分辨门限为

$$\zeta_r = \frac{24}{5\theta_d^4 N} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5N\theta_d^2}{24}} \right) \quad (23)$$

3 基于空间平滑的 DV-MUSIC 算法

考虑到信号源相干时会导致信号子空间的维数小于信号源数, 从而造成无法正确估计信号源方向, 故本节将讨论如何利用空间平滑原理实现基于二元矢量阵对相干信号源的分辨。

众所周知, 空间平滑算法是针对一般高分辨算法不能解相干而提出的一种有效方法^[19], 它在一般情况下只适用于均匀线阵, 而前向空间平滑的基本思想是将等距线阵分成若干个相互重叠的子阵列, 通过各子阵列的协方差矩阵的平均运算来实现

解相关,本文正是利用这一原理实现矢量二元阵的相干源分辨。

若假设两个相干信号均为单频信号,且矢量二元阵的阵元间距为半波长 $\frac{\lambda}{2}$, 结合式(1)可以得到远场条件下阵元在 t 时刻接收信号为

$$\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{D}_i \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (24)$$

式中, $\mathbf{X}_i(t)$ 是第 i 个阵元接收快拍数据模型, $\mathbf{D}_i$ 为第 i 个阵元的 2×2 维对角线矢量,满足

$$\mathbf{D}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & i = 1 \\ \begin{bmatrix} e^{j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{j\beta} \end{bmatrix} & i = 2 \end{cases} \quad (25)$$

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2)] \quad (26)$$

$$\mathbf{S}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)] \quad (27)$$

式(25)中 α, β 分别是相干信号 $\mathbf{x}_1(t)$ 和 $\mathbf{x}_2(t)$ 在第二个阵元上的相位延迟,对于单频信号, α 和 β 的大小取决于频率和入射方位角。此时两个阵元的数据协方差矩阵分别为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{D}_1 \mathbf{R}_s \mathbf{D}_1^H \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (28)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{D}_2 \mathbf{R}_s \mathbf{D}_2^H \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (29)$$

其中 $\mathbf{R}_s$ 是信号协方差矩阵, σ^2 为噪声功率,若入射相干信号满足 $\mathbf{x}_2(t) = \eta \mathbf{x}_1(t) e^{j\phi}$, 其中 η 是功率系数, ϕ 是相位差,则

$$\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}(t) \mathbf{S}^T(t)] = \mathbf{x}_1^2(t) \begin{bmatrix} 1 & \eta e^{j\phi} \\ \eta^* e^{-j\phi} & \eta^2 e^{j2\phi} \end{bmatrix} \quad (30)$$

显然 $\mathbf{R}_s$ 此时为非满秩矩阵,注意到文献[20]指出若两个相干信号同时进入不同阵列时其协方差矩阵之和的秩有可能不亏损的这一论述,可得

$$\mathbf{R}_f = \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2}{2} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_s' \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (31)$$

其中 $\mathbf{R}_s' = (\mathbf{D}_1 \mathbf{R}_s \mathbf{D}_1^H + \mathbf{D}_2 \mathbf{R}_s \mathbf{D}_2^H)/2$, 此时若对数据协方差矩阵 $\mathbf{R}_f$ 进行特征分解,根据式(8)即可得到基于空间平滑的 DV-MUSIC 算法的空间谱估计。下面进一步仿真验证上述理论分析所得的结论。

4 仿真分析

首先对本文提出的 DV-MUSIC 算法的有效性进行仿真研究,仿真中噪声为零均值的高斯白噪声,两信源功率相等,且满足 $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 40^\circ$, 采样频率 10kHz, 搜索步长 $\Delta\theta = 0.1^\circ$, 样本点数 1000, 图中结果为 1000 次独立实验统计平均值。

图 1 示出传统的未经空间平滑的 DV-MUSIC 算法对非相干源的分辨性能。图 2 则示出本文的基于空间平滑的 DV-MUSIC 算法对非相干源的分辨性能。

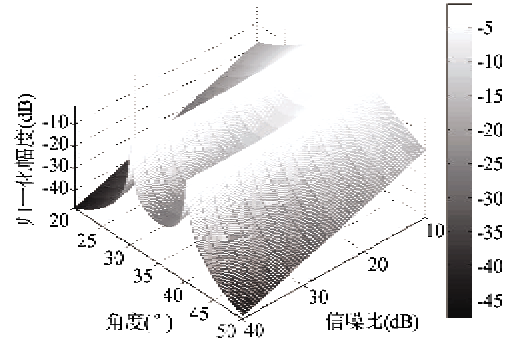


图 1 传统 DV-MUSIC 算法非相干源分辨性能

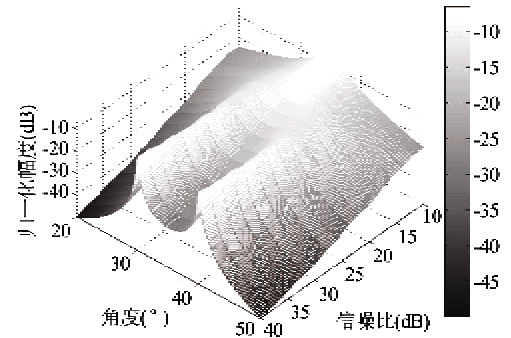


图 2 本文 DV-MUSIC 算法非相干源分辨性能

仿真结果表明,随着信噪比的增加,传统 DV-MUSIC 算法和本文的 DV-MUSIC 算法对非相干源的方位分辨能力均相应提高,并且在足够的信噪比条件下均可以实现对非相干源的分辨。

图 3 示出在仿真条件下传统 DV-MUSIC 算法对非相干源分辨性能。图 4 则示出在仿真条件下本文 DV-MUSIC 算法对相干源的分辨性能。

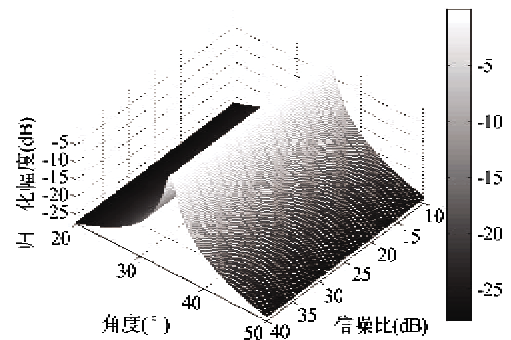


图 3 传统 DV-MUSIC 算法相干源分辨性能

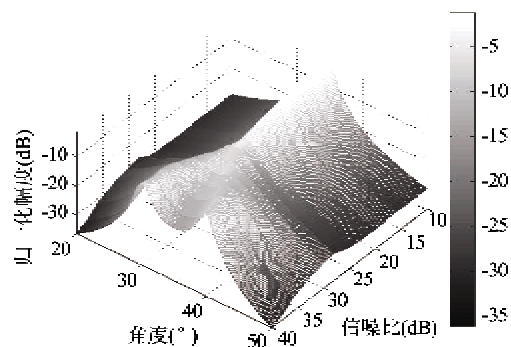


图4 本文 DV-MUSIC 算法相干源分辨性能

仿真结果表明,传统 DV-MUSIC 算法已经不具备相干源的分辨能力,而本文 DV-MUSIC 算法在足够的信噪比条件下仍可以实现对相干源的分辨,从而证明了本文 DV-MUSIC 算法的有效性。

接下来进一步考察本文 DV-MUSIC 算法的分辨性能。在此之前,首先通过仿真研究 SV-MUSIC 算法的非相干源理论分辨性能。仿真中噪声为零均值的高斯白噪声,目标信号为非相干的单频信号,且信号功率相同,采样频率 10kHz,样本点数 1000,搜索步长 $\Delta\theta = 0.1^\circ$ 。

图5示出了方位差 $\Delta\theta = 10^\circ$ 时 SV-MUSIC 算法的非相干源分辨概率与信噪比的关系曲线,仿真结果为 1000 次蒙特卡洛实验的统计平均值,并将分辨概率 $\xi = 0.7$ 时的信噪比判定为该方位差下的信噪比分辨门限。图6示出了相应判定准则下 SV-MUSIC 非相干源的理论信噪比分辨门限曲线与数值仿真的对比结果。

仿真实验表明,SV-MUSIC 算法的非相干源分辨能力随着信噪比的增加而提高,且在本文的判定准则下,上述理论预测得到的信噪比分辨门限曲线

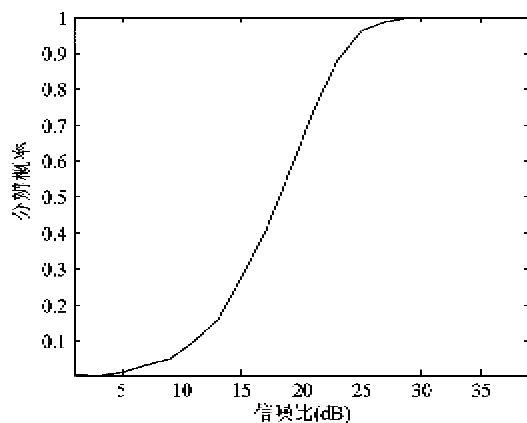


图5 SV-MUSIC 算法的信噪比分辨概率

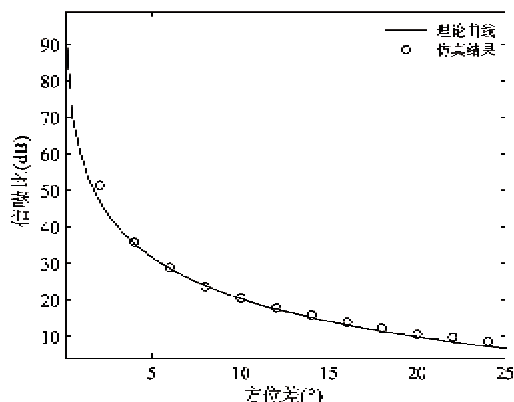


图6 SV-MUSIC 算法的信噪比分辨门限

和仿真结果十分接近。

图7示出了方位差 $\Delta\theta = 10^\circ$ 时本文 DV-MUSIC 算法的分辨概率与信噪比的关系曲线,仿真条件同上。图8则示出了相应判定准则下,本文算法通过仿真得到的信噪比门限减去 10dB 后的信噪比分辨门限曲线。为便于比较,图中同时还给出了 SV-MUSIC 算法非相干源分辨的理论分辨门限曲线。

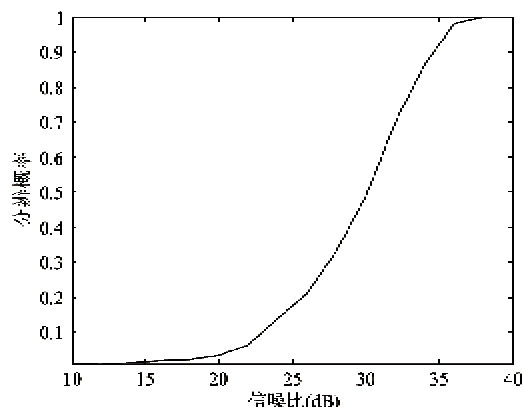


图7 DV-MUSIC 算法的信噪比分辨概率

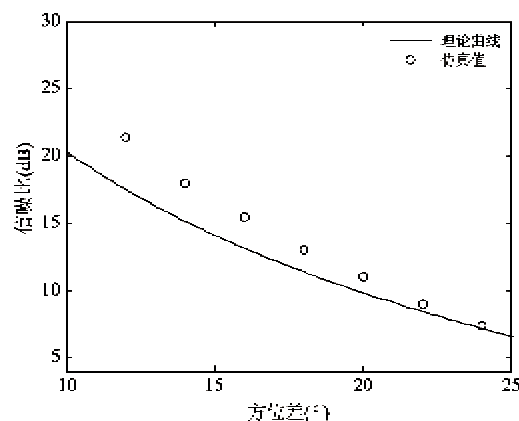


图8 DV-MUSIC 算法的信噪比分辨门限

仿真结果表明,在相应的检测概率判定准则下,采用本文算法处理得到的分辨性能曲线逐渐接近 SV-MUSIC 算法的分辨性能曲线,这是因为:本文 DV-MUSIC 算法是以 SV-MUSIC 算法为基础,通过两个阵元之间数据的空间平滑,从而实现了相干源的分辨,因此该算法分辨门限曲线一定程度上服从 SV-MUSIC 算法的分辨门限理论曲线是合理的。

5 结 论

本文首先探讨了 SV-MUSIC 算法的非相干源分辨性能,推导了声源功率相等条件下该算法的信噪比分辨门限表达式。仿真结果表明,在本文判定准则下,理论预测得到的信噪比分辨门限曲线与仿真结果十分接近。基于空间平滑原理提出了一种二元矢量阵 DV-MUSIC 算法,并对其性能进行了研究分析,得出该算法的相干源分辨性能曲线在一定程度上类似于 SV-MUSIC 算法的非相干源分辨性能曲线。本文提出的方法仅依靠两个矢量传感器,在一定条件下完成了对相干源的分辨,实现了矢量阵对相干源分辨的小尺度化,同时将空间平滑算法应用到二元矢量阵的信号处理中,拓展了空间平滑算法的应用范围。

参考文献

- [1] Hawkes M. Acoustic vector-sensor beamforming and capon direction estimation. *IEEE Trans Signal Processing*, 1998, 46(9): 2291-2303
- [2] Hawkes M, Nehorai A. Acoustic vector-sensor correlations in ambient noise. *IEEE J Oceanic Eng*, 2001, 26(3): 337-347
- [3] 惠俊英,刘宏. 声压振速联合信息处理及物理基础初探. *声学学报*, 2000, 25(4): 303-307
- [4] 孙贵青,杨德森. 基于矢量水听器的最大似然比检测和最大似然方位估计. *声学学报*, 2003, 28(1): 66-72
- [5] 陈新华,蔡平,惠俊英. 声矢量阵指向性. *声学学报*, 2004, 28(2): 141-144
- [6] Wong K T, Michael. Self-initiating music-based direction finding in underwater acoustic particle velocity-field beam space. *IEEE J Oceanic Eng*, 2000, 25(2): 262-273
- [7] 赵羽. 矢量阵阵处理研究:[博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学水声工程学院, 2004
- [8] 张揽月,杨德森. 基于 MUSIC 算法的矢量水听器阵源方位估计. *哈尔滨工程大学学报*, 2004, 25(1): 30-33
- [9] 徐海东. 基于声矢量阵的高分辨方位估计技术研究:[博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学水声工程学院, 2004
- [10] 吕钱浩,杨士莪. 矢量传感器阵列高分辨方位估计技术研究. *哈尔滨工程大学学报*, 2004, 25(4): 440-445
- [11] 张揽月,杨德森. 基于 MUSIC 算法的矢量水听器阵源方位估计. *哈尔滨工程大学学报*, 2004, 25(1): 30-33
- [12] 白兴宇,杨德森,姜煜等. 一种新的声矢量阵远程 ESPRIT 方位估计算法. *哈尔滨工程大学学报*, 2006, 27(6): 891-895
- [13] 王海陆,冀邦杰,杨宝民. 基于矢量传感器阵的相干源分辨方位估计. *舰船科学技术*, 2007, 29(3): 71-82
- [14] 张揽月,杨德森. 矢量阵的非空间 ESPRIT 算法. *哈尔滨工程大学学报*, 2009, 30(4): 406-410
- [15] 付彦. 基于小尺度矢量阵的多目标分辨研究:[博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学水声工程学院, 2007
- [16] 江磊. 小尺度阵信号处理技术研究:[博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学水声工程学院, 2008
- [17] 惠俊英. 二元阵被动时间反转镜定位技术研究. *哈尔滨工程大学学报*, 2007, 28(11): 1247-1251
- [18] Hudson J E. Adaptive Array Principles. UK: Peter Peregrinus Lt, 1981. 50-67
- [19] 王永良. 空间谱估计理论与算法. 北京: 清华大学出版社, 2004. 5-10
- [20] Shan T, Wax M, Kailath T. On spatial smoothing for direct of arrival estimation of coherent signal. *IEEE Trans. ASSP*, 1985, 28(6): 806-811

Research on the resolution in coherent sources using a MUSIC algorithm based on a dual vector-sensor array

Liang Guolong, Zhang Kai, Zhang Guangpu, Liu Kai, Li Ce

(National Laboratory of Underwater Acoustic Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001)

Abstract

The performance of the single vector-sensor multiple-signal-classification (SV-MUSIC) algorithm for resolving incoherent sources was researched, and the expression of SNR resolution threshold when sound sources are equal in power was deduced. And then for coherent sources, a dual vector-sensor multiple-signal-classification (DV-MUSIC) algorithm was presented based on the spatial smoothing method. It was shown by simulation that, the resolution performance of the SV-MUSIC algorithm for incoherent sources was improved as the SNR increasing, which meets the theoretical value under specified criterion. Based on a dual vector-sensor array, the DV-MUSIC algorithm was used to distinguish coherent sources and its resolution performance curve was similar to that of the SV-MUSIC algorithm for incoherent sources to a certain extent.

Key words: dual-vector-sensor array, multiple-signal-classification (MUSIC), coherent sources, spatial smoothing