

I4R 并联机器人机构的位置解析和奇异性分析<sup>①</sup>方 斌<sup>②</sup> 李剑锋<sup>③</sup>

(北京工业大学机械工程及应用电子技术学院 北京 100124)

**摘 要** 分析了 I4R 并联机器人机构的结构组成特点,根据其支链的杆长约束建立了机器人机构的运动参数方程,并推导出封闭形式的位置逆解和正解。其次,基于支链和动平台的力平衡关系得到了机器人机构的力雅克比矩阵,并采用线几何方法对机器人机构的位形奇异性进行了分析,提出了机器人机构支链奇异、平台奇异和主动副运动奇异的判别条件。最后,列举了机器人机构发生支链奇异、动平台奇异和主动副运动奇异的位形示例。研究结果有助于 I4R 机构的参数设计、路径规划及运动控制。

**关键词** I4R 并联机器人机构,位置解析,力雅克比矩阵,奇异性,判别条件

## 0 引言

少自由度并联机器人具有结构组成相对简洁、动态特性较好等优点,因而有良好的应用前景,如典型的 3 自由度平动 Delta 机器人已在器件高速分拣和食品包装自动线上获得工程应用<sup>[1]</sup>。为满足作业过程中需要变换机器人末端操作姿态的需求,Pierrot 等提出了 4 自由度 H4 类并联机器人<sup>[2-5]</sup>。H4 并联机器人机构可以实现动平台中心构件的 3 个移动的和 1 个绕定轴转动的自由度,但存在易发生支链干涉、动平台中心构件转角范围较小等不足之处。为进一步改善机器人性能,Krut 等在综合 H4 类机器人机构优点的基础上提出了 I4R 并联机器人机构<sup>[6]</sup>。

文献[7]分析了 I4R 机器人机构的结构组成特点,基于运动学分析对其尺度参数进行了优化,并得到机构工作空间的几何描述。文献[8]分析了 I4R 机器人机构的内部奇异性——平台奇异<sup>[9]</sup>。但从现有研究看,关于 I4R 机器人机构的奇异性分析尚不够充分,而确定机构发生位形奇异的条件、判别奇异位形的运动性质对于 I4R 机器人机构的设计与应用具有实际意义。本文在现有研究的基础上,推导了 I4R 机器人机构解析形式的位置正逆解,并对其位形奇异性进行了分析。基于动平台及支链的力雅克比矩阵,提出了机器人机构发生支链奇异、平台奇异

和主动副运动奇异的判别条件。

## 1 I4R 并联机器人机构

I4R 并联机器人机构(简图见图 1)由动、定平台和 4 条相同的支链组成,每条支链中含有由 1 个转动副和 1 个(S-S)<sub>2</sub> 球副组成的四边形机构,4 个转动副为主动关节。机构的动平台由作 3 维平动的两构件  $B_1B_2$  和  $B_3B_4 - C_1C_2$  组成,两构件由移动副  $C_1$  连接。末端操作器通过  $C_1C_2$  杆中点处的回转副  $P$  与动平台相连,并由绳索-滑轮系统将构件  $B_1B_2$ 、 $B_3B_4 - C_1C_2$  之间的相错移动转化为末端操作器的回转运动<sup>[7]</sup>。

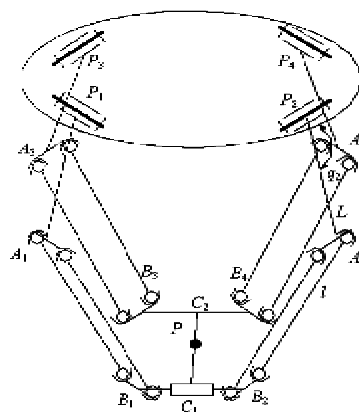


图 1 I4R 并联机器人机构

① 国家自然科学基金(60275031)和北京市先进制造技术重点实验室开放基金(JH001011200801)资助项目。

② 男,1984 年生,硕士;研究方向:并联机构分析与设计;E-mail: fangbin1120@163.com

③ 通讯作者, E-mail: lijianfeng@bjut.edu.cn

(收稿日期:2009-07-08)

机构定、动平台的结构简图分别如图 2 和图 3 所示。相对于定坐标系  $O-XYZ$ , 驱动器的位置矢量为

$$P_1 = (-R_1 \ -R_2 \ 0)^T$$

$$P_2 = (R_1 \ -R_2 \ 0)^T$$

$$P_3 = (-R_1 \ R_2 \ 0)^T$$

$$P_4 = (R_1 \ R_2 \ 0)^T$$

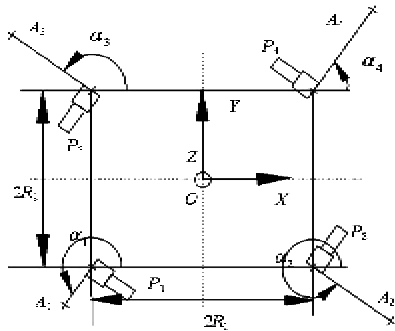


图 2 定平台简图

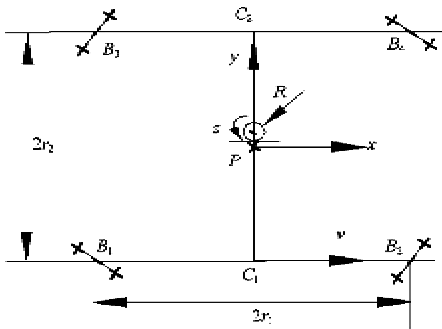


图 3 动平台简图

在机构初始位形, 末端操作器坐标系  $P-xyz$  与  $O-XYZ$  系的姿态一致, 且支链与动平台连接点  $B_i$  在  $P-xyz$  中的位置矢量为

$$B_{o1} = (-r_1 \ -r_2 \ 0)^T$$

$$B_{o2} = (r_1 \ -r_2 \ 0)^T$$

$$B_{o3} = (-r_1 \ r_2 \ 0)^T$$

$$B_{o4} = (r_1 \ r_2 \ 0)^T$$

当  $P-xyz$  系相对于  $O-XYZ$  系绕  $Z$  轴的转角为  $\theta$  时, 点  $B_i$  在原点为  $P$  且平行于  $O-XYZ$  的坐标系中的位置矢量为<sup>[6]</sup>

$$B_{Pi} = k_i \theta \mathbf{v} + B_{oi}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, k_1 = k_2 = R, k_3 = k_4 = 0$$

式中,  $\mathbf{v}$  为移动副  $C_1$  的矢量方向,  $k_i$  为滑轮半径。

## 2 位置解析

### 2.1 位置逆解

设末端操作器的位置矢量为  $\mathbf{P} = (x_p \ y_p \ z_p)^T$ ,  $P-xyz$  系的转角为  $\theta$ , 则点  $B_i$  相对于  $O-XYZ$  系的位置矢量为

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{P} + k_i \theta \mathbf{v} + \mathbf{B}_{oi}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

若支链前臂  $P_i A_i$  的长度为  $L$ , (S-S)<sub>2</sub> 球副组成的四边形机构的杆长为  $l$ , 主动关节转角为  $q_i$ , 由图 4 有

$$\mathbf{L}_i = L(\mathbf{Z} \cos q_i + \mathbf{u}_i \sin q_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{L}_i = \mathbf{P}_i A_i$ ,  $\mathbf{u}_i = (\cos \alpha_i \ \sin \alpha_i \ 0)^T$  为前臂  $P_i A_i$  在定平台面的投影矢量方向, 且有

$$\mathbf{u}_1 = (-\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ 0)^T$$

$$\mathbf{u}_2 = (\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ 0)^T$$

$$\mathbf{u}_3 = (\sqrt{2}/2 \ \sqrt{2}/2 \ 0)^T$$

$$\mathbf{u}_4 = (-\sqrt{2}/2 \ \sqrt{2}/2 \ 0)^T$$

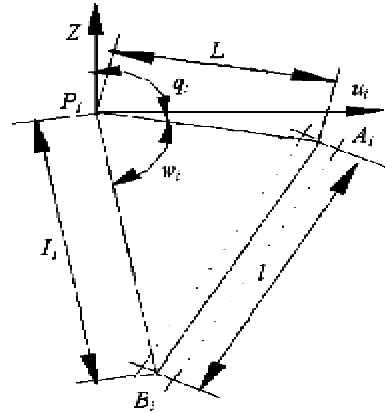


图 4 支链简图

由图 4 并根据三角形  $P_i B_i A_i$  的余弦定理有

$$l^2 = |\mathbf{L}_i|^2 = L^2 + |\mathbf{I}_i|^2 - 2L|\mathbf{I}_i| \cos w_i \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{L}_i = \mathbf{P}_i A_i$ ,  $\mathbf{I}_i = \mathbf{B}_i P_i$ ,  $w_i = \angle B_i P_i A_i$ 。

将  $\mathbf{L}_i \cdot (-\mathbf{I}_i) = L|\mathbf{I}_i| \cos w_i$  代入式(3)并整理得

$$M_i \cos q_i + N_i \sin q_i = G_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

式中  $M_i = 2L(\mathbf{I}_i \cdot \mathbf{Z})$ ,  $N_i = 2L(\mathbf{I}_i \cdot \mathbf{u}_i)$ ,  $G_i = L^2 + |\mathbf{I}_i|^2 - l^2$ 。

由式(4)可得主动关节转角为

$$q_i = 2 \tan^{-1} \left( \frac{(-\rho_i \pm \sqrt{\rho_i^2 - 4\Psi_i \mu_i}) / 2\Psi_i}{1} \right) \quad (5)$$

式中  $\Psi_i = G_i + M_i$ ,  $\rho_i = -2N_i$ ,  $\mu_i = G_i - M_i$ 。

### 2.2 位置正解

根据式(1)和式(3)可得

$$|\mathbf{P} + k_i \theta \mathbf{v} + \mathbf{B}_{oi} - \mathbf{A}_i|^2 = l^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6)$$

展开式(6)并整理得到方程组

$$\begin{cases} (x_p + R\theta)^2 + 2a_1(x_p + R\theta) + y_p^2 + 2b_1y_p + z_p^2 + 2c_1z_p + d_1 = 0 \\ (x_p + R\theta)^2 + 2a_2(x_p + R\theta) + y_p^2 + 2b_2y_p + z_p^2 + 2c_2z_p + d_2 = 0 \\ x_p^2 + 2a_3x_p + y_p^2 + 2b_3y_p + z_p^2 + 2c_3z_p + d_3 = 0 \\ x_p^2 + 2a_4x_p + y_p^2 + 2b_4y_p + z_p^2 + 2c_4z_p + d_4 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中  $a_i = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_{oi} \cdot \mathbf{X}$ ,  $b_i = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_{oi} \cdot \mathbf{Y}$ ,  $c_i = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_{oi} \cdot \mathbf{Z}$ ,  $d_i = |\mathbf{A}_i \mathbf{B}_{oi}|^2 - l^2$ 。

将式(7)简化后有

$$\begin{cases} x_p + R\theta = y_p(b_2 - b_1)/(a_2 - a_1) + z_p(c_2 - c_1)/(a_1 - a_2) + (d_2 - d_1)/(a_1 - a_2) \\ x_p = y_p(b_4 - b_3)/(a_3 - a_4) + z_p(c_4 - c_3)/(a_3 - a_4) + (d_4 - d_3)/(a_3 - a_4) \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)带入式(7)的第 1 式和第 3 式,经整理有

$$\lambda_i y_p^2 + \gamma_i z_p^2 + \chi_i y_p z_p + \delta_i y_p + \varepsilon_i z_p + \phi_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

式中:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (b_k - b_j)^2 / (a_j - a_k)^2 + 1 \\ \gamma_i &= (c_k - c_j)^2 / (a_j - a_k)^2 + 1 \\ \chi_i &= (b_k - b_j)(c_k - c_j) / (a_j - a_k)^2 \\ \delta_i &= 2(d_k - d_j)(b_k - b_j) / (a_j - a_k)^2 + 2a_j(b_k - b_j) / (a_j - a_k) + 2b_j \\ \varepsilon_i &= 2(d_k - d_j)(c_k - c_j) / (a_j - a_k)^2 + 2a_j(c_k - c_j) / (a_j - a_k) + 2c_j \\ \phi_i &= 2(d_k - d_j)^2 / (a_j - a_k)^2 + 2a_j(d_k - d_j) / (a_j - a_k) + d_j \end{aligned}$$

$i = 1, j = 1, k = 2$  和  $i = 2, j = 3, k = 4$

由式(9)消去中间变量  $y_p$  得到关于  $z_p$  的方程

$$\eta_4 z_p^4 + \eta_3 z_p^3 + \eta_2 z_p^2 + \eta_1 z_p + \eta_0 = 0 \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= v_2 v_{10} - v_4^2 \\ \eta_1 &= v_0 v_{10} + v_2(v_7 + v_9) - 2v_3 v_4 \\ \eta_2 &= v_0(v_7 - v_9) + v_2(v_6 - v_8) - v_3^2 - 2v_1 v_4 \\ \eta_3 &= v_0(v_6 - v_8) + 2v_2 v_5 - 2v_1 v_3 \\ \eta_4 &= v_0 v_5 - v_1^2 \\ v_0 &= \lambda_1 \chi_2 - \lambda_2 \chi_1 \quad v_1 = \lambda_1 \gamma_2 - \lambda_2 \gamma_1 \\ v_2 &= \lambda_1 \delta_2 - \lambda_2 \delta_1 \quad v_3 = \lambda_1 \varepsilon_2 - \lambda_2 \varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$v_4 = \lambda_1 \phi_2 - \lambda_2 \phi_1 \quad v_5 = \chi_1 \gamma_2 - \chi_2 \gamma_1$$

$$v_7 = \chi_1 \phi_2 - \chi_2 \phi_1 \quad v_8 = \gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1$$

$$v_9 = \varepsilon_2 \delta_1 - \varepsilon_1 \delta_2 \quad v_{10} = \phi_2 \delta_1 - \phi_1 \delta_2$$

式(10)为一元四次方程,可由费拉里解法<sup>[10]</sup>求得 4 个根,实根即为有意义的  $z_p$  值。进一步根据式(9)可得

$$\begin{aligned} y_p &= ((\lambda_1 \gamma_2 - \lambda_2 \gamma_1)z_p^2 + (\lambda_1 \varepsilon_2 - \lambda_2 \varepsilon_1)z_p + (\lambda_1 \phi_2 - \lambda_2 \phi_1)) / ((\lambda_2 \chi_1 - \lambda_1 \chi_2)z_p + (\lambda_2 \delta_1 - \lambda_1 \delta_2)) \end{aligned} \quad (11)$$

再由求得的  $y_p, z_p$  通过式(8)的第 2 式有

$$x_p = y_p(b_4 - b_3)/(a_3 - a_4) + z_p(c_4 - c_3)/(a_3 - a_4) + (d_4 - d_3)/(a_3 - a_4) \quad (12)$$

最后由式(8)第 1 式求得末端操作器的转角位移

$$\theta = (y_p(b_2 - b_1)/(a_1 - a_2) + z_p(c_2 - c_1)/(a_1 - a_2) + (d_2 - d_1)/(a_1 - a_2) - x_p)/R \quad (13)$$

### 3 力雅克比矩阵与奇异性分析

#### 3.1 平台力雅克比矩阵

在 I4R 并联机器人机构运动过程中,动平台构件  $B_1 B_2$  和  $B_3 B_4 - C_1 C_2$  作 3 维平动,支链中(S-S)<sub>2</sub> 球副组成的四边形机构的 4 个杆件始终保持共面<sup>[6]</sup>,可知支链在  $B_i$  点对动平台的作用力沿  $\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i$  方向,力偶绕  $\mathbf{A}_{i1} \mathbf{B}_{i2} \times \mathbf{B}_{i1} \mathbf{B}_{i2}$  矢量方向,如图 5 所示。进而根据图 6 得到动平台的静力平衡方程

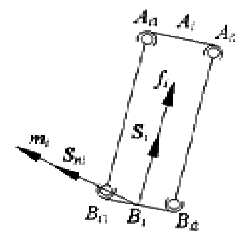


图 5 支链作用力

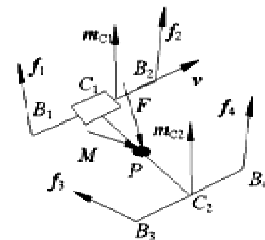


图 6 动平台受力分析

$$\sum_{i=1}^4 f_i S_i = F \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^4 (f_i r_i \times S_i + m_i S_{ni}) = M \quad (15)$$

式中  $r_i$  为点  $B_i$  到点  $P$  的连线矢量,  $f_i$  及  $S_i$  分别表示  $B_i$  点处沿  $B_i A_i$  作用力的大小和方向矢量,  $m_i$  和  $S_{ni}$  分别为绕  $A_{i1} B_{i2} \times B_{i1} B_{i2}$  的力偶和方向矢量;  $F$  和  $M$  分别为作用于动平台的外力和外力矩。

如图 6 所示, 将支链 1 和 2 以及支链 3 和 4 对构件  $B_1 B_2$ 、 $B_3 B_4 - C_1 C_2$  的作用力矩分别等效至点  $C_1$  和  $C_2$ , 则有

$$\sum_{j=1}^2 (f_j r_{B_j} \times S_j + m_j S_{nj}) = m_{C1} S_{C1} \quad (16)$$

$$\sum_{k=3}^4 (f_k r_{B_k} \times S_k + m_k S_{nk}) = m_{C2} S_{C2} \quad (17)$$

式中  $r_{B_j}$  与  $r_{B_k}$  分别为点  $B_j$  与  $C_1$  以及点  $B_k$  与点  $C_2$  的连线矢量,  $m_{Cj}$  和  $S_{Cj}$  分别为作用于构件  $B_1 B_2$ 、 $B_3 B_4 - C_1 C_2$  的等效力偶及其方向矢量, 且有<sup>[7]</sup>

$$S_{C1} = ((S_{n1} \times S_{n2}) \times v) / |((S_{n1} \times S_{n2}) \times v)|$$

$$S_{C2} = ((S_{n3} \times S_{n4}) \times v) / |((S_{n3} \times S_{n4}) \times v)|$$

根据式(16)和式(17), 式(15)可进一步写为

$$\sum_{j=1}^2 (f_j r_{D1} \times S_j) + \sum_{k=3}^4 (f_k r_{D2} \times S_k) + \sum_{j=1}^2 m_{Cj} S_{Cj} = M \quad (18)$$

式中  $r_{D1}$  为  $C_1$  点到  $P$  点的连线矢量,  $r_{D2}$  为  $C_2$  点到  $P$  点的连线矢量。

综合式(14)和(18), 可得到如下形式的动平台的静力平衡方程:

$$J_S(f \ m)^T = (F \ M)^T \quad (19)$$

式中:

$$f = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4)^T \quad m = (m_{C1} \ m_{C2})^T$$

$J_S =$

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & 0 & 0 \\ r_{D1} \times S_1 & r_{D1} \times S_2 & r_{D2} \times S_3 & r_{D2} \times S_4 & S_{C1} & S_{C2} \end{bmatrix}$$

$J_S$  为 I4R 并联机器人机构的平台力雅克比矩阵。

### 3.2 支链力雅克比矩阵

I4R 并联机器人机构的主动关节为转动副, 支链前臂对(S-S)<sub>2</sub> 球副组成的四边形机构输入的有效作用力  $F_{ri}$  沿杆  $P_i A_i$  转动的切线方向。由图 7 有  $F_{ri}$  与支链对动平台作用力  $f_i$  之间的关系为

$$F_{ri} = f_i \cos \beta_i \quad (20)$$

式中  $\beta_i$  为  $A_i B_i$  与  $F_{ri}$  作用方向之间的夹角。

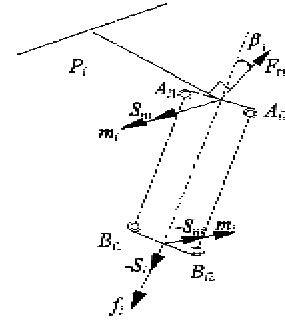


图 7 支链受力分析

将式(20)写成矩阵形式, 有

$$J_R(f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4)^T = (F_{r1} \ F_{r2} \ F_{r3} \ F_{r4})^T \quad (21)$$

式中

$$J_R = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta_4 \end{bmatrix}$$

为 I4R 并联机器人机构的支链力雅克比矩阵。

### 3.3 奇异性分析

#### 3.3.1 支链奇异

力雅克比矩阵  $J_R$  降秩时, 机构将发生支链奇异。即当矩阵元素  $\beta_i = \pi/2 + k\pi$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 时, 力雅克比矩阵  $J_R$  出现一列或多列的零矢量。此时动平台失去 1 个自由度, 不能沿  $S_i$  矢量方向移动。

#### 3.3.2 平台奇异

力雅克比矩阵  $J_S$  的后两列表示 2 个分别沿  $S_{C1}$  ( $i = 1, 2$ ) 方向的约束力偶。当这两个约束力偶线性相关, 即  $S_{C1} \times S_{C2} = 0$  时, 因力偶约束降维而发生平台奇异, 动平台存在 1 个绕  $S_{n1} \times S_{n2}$  矢量的瞬时转动自由度。

#### 3.3.3 主动副运动奇异

力雅克比矩阵  $J_S$  的前 4 列对应于(S-S)<sub>2</sub> 球副组成的四边形机构沿  $B_i A_i$  方向作用于动平台的力矢量, 将前 4 列构成的分块矩阵定义为  $J_f$ , 即

$$J_f = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ r_{D1} \times S_1 & r_{D1} \times S_2 & r_{D2} \times S_3 & r_{D2} \times S_4 \end{bmatrix}$$

当  $J_f$  降秩时, 即使锁定所有主动副, 动平台仍出现瞬时运动, 机构发生主动副运动奇异。结合线几何法<sup>[11]</sup>可以进一步确定机构的主动副运动奇异形及在奇异位形处的运动特性。

(1) 4 个力矢量共面

当力矢量  $f_1, f_2, f_3, f_4$  共面时,  $J_f$  出现降秩, 机构存在瞬时运动, 相应的瞬时运动螺旋为  $(0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1)$ , 即动平台有沿  $Z$  方向的瞬时移动。

(2) 2 平面上的力矢量与平面交线相交

$f_1, f_2$  和  $f_3, f_4$  分别共面, 如图 8 所示。设 2 平面交线矢量方向为  $g$ ,  $C_1, C_2$  矢量方向为  $Q$ , 进而得到一个  $(0; Q \times g)$  方向的合力偶<sup>[11]</sup>。若该合力偶与约束力偶  $S_{C1}$  或  $S_{C2}$  线性相关, 即  $(Q \times g) \times S_{C1} = 0$  或  $(Q \times g) \times S_{C2} = 0$ , 动平台会出现 1 个多余自由度, 对应的瞬时运动螺旋为  $(0; Q \times g)$ , 即动平台存在绕矢量  $Q \times g$  的瞬时转动。

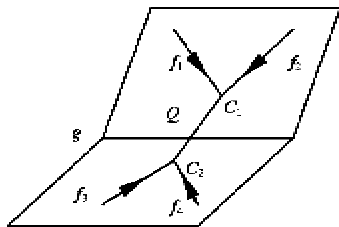


图 8 2 平面上力矢量与平面交线相交

(3) 4 个力矢量平行

设 4 个力矢量均平行于矢量  $p$ , 则矩阵  $J_f$  可以写为

$$J_f = \begin{bmatrix} p & p & p & p \\ r_{D1} \times p & r_{D1} \times p & r_{D2} \times p & r_{D2} \times p \end{bmatrix}$$

此时  $J_f$  的秩降为 2, 对应的动平台瞬时运动螺旋为  $(0; m \times p)$  和  $(0; n \times p)$ , 其中  $m = (1 \ 0 \ 0)^T, n = (0 \ 1 \ 0)^T$ , 即动平台可以在垂直于矢量  $p$  的平面内移动。

(4) 4 个力矢量分布在 2 个平行平面内

当  $f_1, f_2$  和  $f_3, f_4$  分别分布在两平行平面内, 则力矢量满足  $S_1 \times S_4 = S_2 \times S_3 = G$ 。此时, 动平台存在 1 个瞬时运动螺旋  $(0; G)$ , 锁定各驱动器后, 动平台仍存在 1 个沿矢量  $G$  方向的移动自由度。

### 3.4 算例

设图 2 和图 3 所示 I4R 机器人机构定、动平台的尺寸参数为  $R_1 = R_2 = 2, r_1 = r_2 = 1$ , 前臂及球副组成的四边形机构的杆长参数为  $L = 2.5$  和  $l = 5.5$ 。其中  $R_1, R_2, r_1, r_2, L, l$  均为无量纲。图 9 至图 11 即为根据前述奇异性判别条件得到的部分奇异位形(末端操作器角位移为零的工作空间内)。

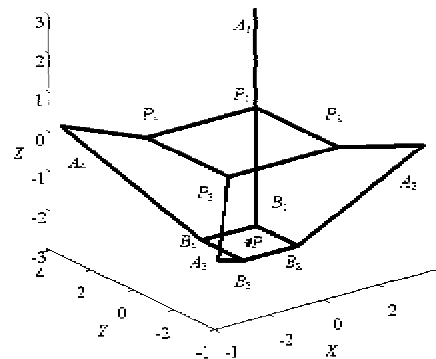


图 9 支链奇异位形

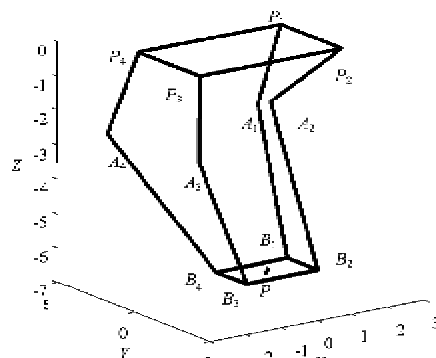


图 10 平台奇异位形

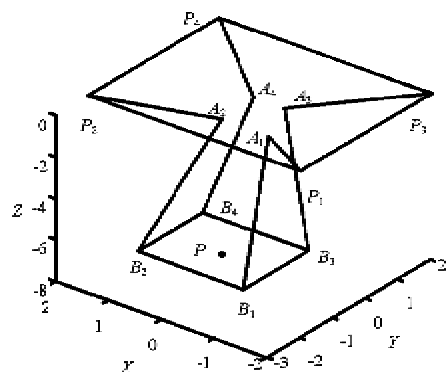


图 11 主动副运动奇异位形

如图 9 所示, 当  $P$  点的位置坐标为  $x_p = 1, y_p = 1, z_p = -3$  时, 支链 1 出现重叠。对应于  $\beta_1 = \pi/2$ , 动平台失去  $(0 \ 0 \ 1)^T$  方向的移动自由度, 该奇异位形属于支链奇异。

如图 10 所示, 当  $P$  点的位置坐标是  $x_p = 1.3, y_p = 1.3, z_p = -6.9$  时, 约束力偶  $S_{C1} \times S_{C2} = 0$ , 动平台存在绕  $(0.22 \ 0.23 \ -0.93)^T$  矢量的瞬时转动, 该奇异位形属于平台奇异。

如图 11 所示, 当  $P$  点的位置坐标为  $x_p = 0, y_p$

$= -1.1, z_p = -6.5$  时,  $f_1, f_2$  和  $f_3, f_4$  分别共面且交于两平面的交线, 属于第 2 类主动副运动奇异。动平台存在瞬时螺旋运动  $\mathcal{S}_1 = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0)$ , 即锁住所有驱动器后动平台仍有绕  $(1 \ 0 \ 0)^T$  矢量的瞬时转动。

## 4 结 论

对 I4R 并联机器人机构的结构组成特点进行了分析, 给出了机构的正、逆位置解析。基于静力学分析得到了机构的力雅克比矩阵, 结合线几何相关性分析给出了 I4R 机构发生支链奇异、平台奇异和主动副运动奇异的条件, 并可确定机构的奇异位形以及机构处于奇异位形处的运动特性。相关结果对于 I4R 机构的尺度参数设计、路径规划及运动控制具有借鉴意义。

### 参考文献

- [1] Clavel R. Device for the Movement and Positioning of an Element in Space. US Patent: No. 4976582, 1990
- [2] Pierrot F. H4: a new family of 4-DOF parallel robots. In: Proceedings of the 1999 ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Atlanta, USA, 1999. 508-513
- [3] Company O, Pierrot F. A new 3T-IR parallel robot. In: Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Tokyo, Japan, 1999. 557-562
- [4] Pierrot F, Marquet F, Company O. H4 parallel robot: modeling, design and preliminary experiments. In: Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, 2001. 3256-3261
- [5] Company O, Marquet F. A new high-speed 4-DOF parallel robot synthesis and modeling issues. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 19(3): 411-420
- [6] Krut S, Company O. I4: a new parallel mechanism for Scara motions. In: Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Taipei, Taiwan, China, 2003. 1875-1880
- [7] Krut S, Nabat V. A high-speed parallel robot for Scara motions. In: Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Orleans, LA, 2004. 4109-4115
- [8] Company O, Pierrot F. Internal singularity analysis of a class of lower mobility parallel manipulators with articulated traveling plate. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2006, 22(1): 1-11
- [9] Fang Y F, Tsai L W. Structure synthesis of a class of 4-DOF and 5-DOF parallel manipulators with identical limb structures. *The International Journal of Robotics Research*, 2002, 21(9): 799-810
- [10] 郭大钧. 大学数学手册. 山东: 山东科学技术出版社, 1985. 273-274
- [11] 李仕华, 黄真. 螺旋系在不同空间下的相关性. 机械工程学报, 2005, 41(10): 44-50

## Position resolution and singularity analysis of the I4R parallel manipulator mechanism

Fang Bin, Li Jianfeng

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

### Abstract

The structural character of the I4R parallel manipulator mechanism was analyzed, the kinematic parameter equations of the manipulator mechanism were established according to the link length restrictions of the sub-chains, and the closed-form positive and reverse position solutions were deduced. Then, the force Jacobian matrixes of the manipulator mechanism were obtained based on the force balance relationships of the sub-chains and the movable platform, the configuration singularity of the manipulator mechanism was investigated by means of the line geometry method, and the discriminating conditions for the sub-chain singularity, the platform singularity and the kinematic singularity of driving joint of the manipulator mechanism were presented. Finally, the singular configuration examples of the sub-chain singularity, the platform singularity and the kinematic singularity of driving joint of the manipulator mechanism were presented. The results of the study are useful for design and control of the I4R mechanism.

**Key words:** I4R parallel manipulator mechanism, position resolution, force Jacobian matrix, singularity, discriminating condition