

机器人运动灵活性问题的研究^①

谢碧云^② 赵京

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院 北京 100124)

摘要 对各类现有机器人的运动灵活性指标进行了分析比较,并且提出了一个新指标。同时,定义了指标灵敏度的概念,用来评价机器人灵活性的稳定性。基于这些运动灵活性指标,对平面机器人和空间机器人的运动灵活性进行了数值仿真研究,并对各指标优化结果进行了比较。结果表明,采用该指标对机器人的运动灵活性进行优化,机器人的综合灵活性更好。

关键词 运动灵活性, 条件数, 可操作度, 各向同性

0 引言

机器人操作系统作为由关节空间到全局操作空间的机械能量转换器,其运动灵活性反映了整个系统对运动的全局转化能力,也就是机器人在任意方向上的运动能力。运动灵活性指标在机器人的运动规划、构型与尺度综合方面起着重要作用。利用机器人的运动灵活性指标可以优化机器人在工作空间中的操作位置,选择最优的机器人物型与尺度。这些性能指标对运动冗余机器人尤其重要,因为它们一般都有无数个逆运动学解,而性能指标可以帮助寻找最优解。各国学者在这方面展开了广泛而深入的研究,提出了不同的灵活性指标^[1-5]。一般而言,一个指标首先需要具有明确的物理意义;同时为了实现机器人的实时控制,指标应能表示成关节转角的解析式;而在评价不同机器人的运动灵活性和设计机器人时,指标应不受机器人维数和尺寸的影响。本文对各类现有灵活性指标进行了比较分析,并且提出了一个新指标,采用该指标对机器人的运动灵活性进行优化,机器人的综合灵活性更好。

1 灵活性指标

1.1 现有灵活性指标

1.1.1 条件数

1982年,Salisbury 和 Craig^[1]利用雅克比矩阵的条件数 $\kappa = \|J\| \|J^{-1}\|$ 作为评定机械臂末端操作能力的指标。采用 2 范数时,条件数为

$$\kappa = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} = \sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}} \quad (1)$$

其中 σ 为雅克比矩阵的奇异值, λ 为矩阵 JJ^T 的特征值。

条件数代表了雅克比转换矩阵向各个方向的变换均一性。条件数越小,机器人的运动灵活性就越好。当条件数取最小值 1 时,机器人处于各向同性,此时,雅克比矩阵的各奇异值相等,机器人向各个方向的运动能力均相等。条件数为无穷时,表明机器人处于奇异位形。

同时条件数也反映了一个机器人系统的精度^[6]。条件数即为从关节空间到操作空间的误差放大系数。条件数越小,机器人系统的精度也就越高。

1.1.2 可操作度

Yoshikawa^[2] 定义了灵活性指标可操作度:

$$\omega = \sqrt{\det(JJ^T)} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m \quad (2)$$

可操作度对某一位形下机器人往各个方向运动的能力做出了综合度量,可以用来衡量机器人的整体灵活性。可操作度越大,机器人的运动灵活性就越好,可操作度为 0 表明机器人处于奇异位形。

同时提出了可操作度椭球的概念:

$$\dot{X}^T(JJ^T)^{-1}\dot{X} \leq 1 \quad (3)$$

椭球各主轴的方向与矩阵 $(JJ^T)^{-1}$ 的特征向量的方向一致,各半主轴的长度等于其特征值平方根的倒数。可操作度 w 与可操作度椭球的体积成正比。而条件数同样也可解释成对可操作度椭球的方向一致性的评价。

^① 国家自然科学基金(50775002)资助项目。

^② 女,1987 年生,博士生;研究方向:机器人运动学和动力学;联系人,E-mail: xiebiyun@emails.bjut.edu.cn
(收稿日期:2009-06-10)

但是,当用可操作度 ω 去评价不同的机器人时存在以下问题:可操作度 ω 一要依赖于机器人的绝对尺寸,二要依赖于机器人操作空间的维数。因此,Kim^[3]对其进行了改进:

$$M_r = \sqrt[m]{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} / f_m \quad (4)$$

其中, f_m 是一个量纲为长度平方的函数,可以取 $f_m = l^2$, l 为机器人杆长的总和。

各向同性指标

Kim^[3]定义了各向同性指标:

$$\Delta = \frac{M}{\psi} = \frac{\sqrt[m]{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}}{\frac{\text{trace}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}{m}} = \frac{\sqrt[m]{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m}}{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m}{m}} \quad (5)$$

ψ 总是大于 M , 当且仅当各个特征值相等时 $\psi = M$ 。各个奇异值相等说明 m 维的椭球(此时为 m 维的球体)具有各向同性。这个指标是用来衡量可操作度椭球的各向同性。

$\Delta \leq 1$, Δ 越大机器人灵活性越好。

1.2 新指标

定义新指标为

$$\Delta' = \frac{M}{\lambda_1} = \frac{\sqrt[m]{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}}{\lambda_1} = \frac{\sqrt[m]{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m}}{\lambda_1} \quad (6)$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$, 很明显, $\Delta' \leq 1$, 当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ 时, $\Delta' = 1$, 此时机器人具有各向同性。新指标 Δ' 也可以用来衡量可操作度椭球的各向同性。

条件数、各向同性指标和新指标均作为可操作度椭球方向一致性的评价指标,但三者之间存在着一定区别,下面对这三个指标进行比较分析。

表 1 各指标的比较分析

指标 比较内容	第一类指标		第二类指标		
	w	M_r	κ	Δ	Δ'
物理意义	各方向运动能力的综合度量		运动变换的均一性(可操作度椭球的方向一致性)		
解析表达	较易	较易	较难	较易	较难
空间维数影响	受影响	不受影响	不受影响	不受影响	不受影响
尺寸影响	受影响	不受影响	不受影响	不受影响	不受影响
优化时的中间轴长度			没有考虑	靠近长轴与短轴的均值	靠近长轴
	优化结果相同:(1)平面机器人(2)各向同性的情况				

1.3 指标灵敏度

在优化设计和控制机器人时,针对某个指标,除了希望该指标能取全局最优解外,还希望指标在最优位形处对关节转角的灵敏度最小。即关节转角改变 $\Delta\theta$ 时,指标的改变量最小,这样机器人既具有较

好的灵活性,而且该灵活性比较稳定。

一个指标的灵敏度应该是该指标函数在该点对各个关节转角的微分。但由于求的是最优位形处的灵敏度,所以该点对各关节转角的微分为 0。但可以用类似微分的思想来计算指标在最优位形处的灵

敏度。

敏度^[7]。定义任一指标 μ 在最优位形 $(\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)$ 处对某一关节转角 θ_i 的灵敏度为

$$H(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\mu(k, \theta'_1 \dots \theta'_i + \delta \dots \theta'_m) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_1 \dots \theta'_i - \delta \dots \theta'_m) - u_m|}{\delta} \right) \quad (7)$$

式中各参数的含义如图1所示。

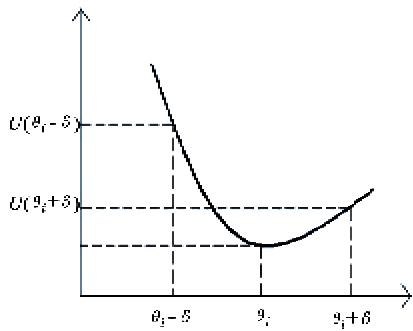


图1 指标对某一关节转角的灵敏度

构型为 k 的机器人,综合考虑各关节转角,指标在最优位形处的灵敏度为

$$H(k) = \left(\frac{|\mu(k, \theta'_1 + \delta, \theta'_2 \dots \theta'_m) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_1 - \delta, \theta'_2 \dots \theta'_m) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_1, \theta'_2 + \delta \dots \theta'_m) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_1, \theta'_2 - \delta \dots \theta'_m) - u_m|}{\delta} + \dots + \frac{|\mu(k, \theta'_1, \theta'_2 \dots \theta'_m + \delta) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_1, \theta'_2 \dots \theta'_m - \delta) - u_m|}{\delta} \right) \times \frac{1}{2m} \quad (8)$$

2 数值仿真与分析

2.1 平面2R机器人

平面2R机械臂的结构模型如图2所示。其雅

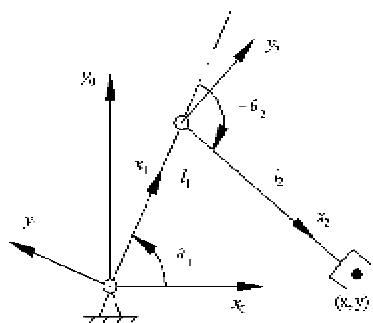


图2 平面2R机械臂及其D-H坐标

克比矩阵为 $J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$

对雅克比矩阵进行奇异值分解,可得

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}$$

其中 $a = l_1^2 + 2l_1l_2\cos\theta_2 + 2l_2^2$, $b = 2l_1l_2\sin\theta_2$ 。

令 $k = l_1/l_2$ 为杆长比例,则条件数为

$$\kappa = \sqrt{\frac{k^2 + 2k\cos\theta_2 + 2 + \sqrt{(k^2 + 2k\cos\theta_2 + 2)^2 - 4k^2\sin^2\theta_2}}{k^2 + 2k\cos\theta_2 + 2 - \sqrt{(k^2 + 2k\cos\theta_2 + 2)^2 - 4k^2\sin^2\theta_2}}} \quad (9)$$

条件数 κ 对 θ_2 求导,当导数为0时,条件数具有最小值。因此求得条件数取最小值 κ_{min} 时, θ_2 的值为

$$\theta_2 = \pm (\pi - \arctan \sqrt{(k^4 + 4)/4k^2}) \quad (10)$$

κ_{min} 和 θ_2 随杆长比例的变化如图3所示。当条件数取全局最优解 $\kappa = 1$ 时,机器人具有各向同性,此时杆长比例配置为 $l_1 = \sqrt{2}l_2$, 位形为 $\theta_2 = \pm 3\pi/4$ 。

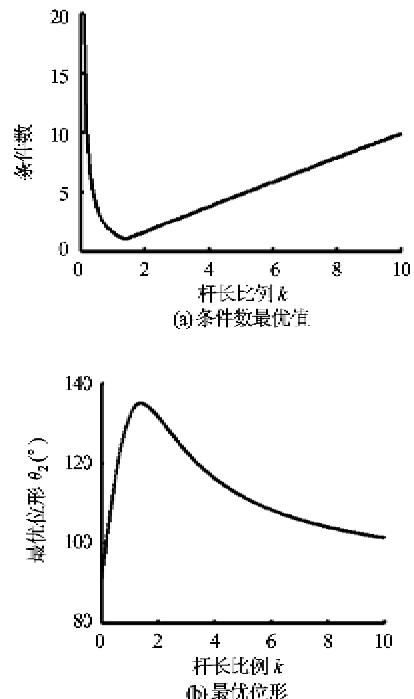


图3 条件数优化结果随 k 的变化

由于是平面机器人,所以各向同性指标、新者指标和条件数优化得到的位形是相同的,只是各指标的最优值不同,如图4所示。此外,它们的全局最优解也与条件数相同。

可操作度的解析表达式为

$$\omega = l_1 l_2 + \sin\theta_2 + \dots \quad (11)$$

标准化的可操作度的解析表达式为

$$M_r = k + \sin\theta_2 + \dots / (k + 1)^2 \quad (12)$$

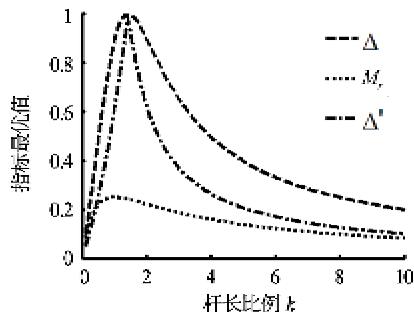


图 4 指标最优值

显然,在 $\theta_2 = \pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时,这两个指标取最大值,其中 $M_{r\max} = k/(k+1)^2$,其随杆长比例的变化情况如图 4 所示。当杆长比例配置为 $k = 1$ 时, M_r 具有全局最优解为 $1/4$ 。

对于平面 2R 机器人,其灵敏度为

$$H(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\mu(k, \theta_2 + \delta) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta_2 - \delta) - u_m|}{\delta} \right) \quad (13)$$

取 $\delta = 0.1$, 指标在最优秀位形处的灵敏度如图 5 所示。由图可知,平面 2R 机器人在最优秀位形处各向同性指标 Δ' 的灵敏度最低。此外,由图可知,对于同一指标而言,当其取全局最优解时,指标灵敏度比较大。也就是说,在该构型下,虽然机器人运动灵活性最好,但灵活性并不稳定。

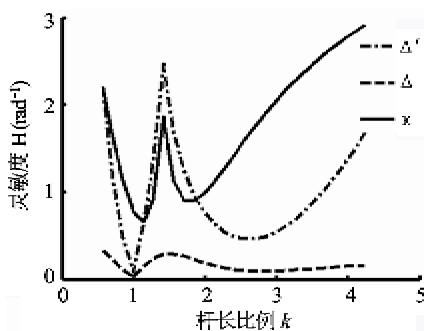


图 5 各指标灵敏度

2.2 PUMA 型空间 3R 机器人

PUMA 机器人如图 6 所示,其雅克比矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & c_1l_3c_{23} \\ c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & s_1l_3c_{23} \\ 0 & -(l_2s_2 + l_3s_{23}) & -l_3s_{23} \end{bmatrix} \quad (14)$$

对于不同的杆长比例 $k = l_2/l_3$, 条件数的优化结果如图 7(a)和图 8(a)所示。

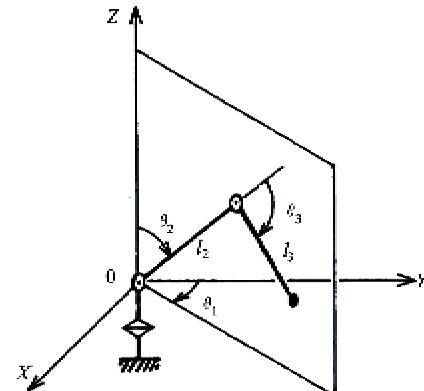
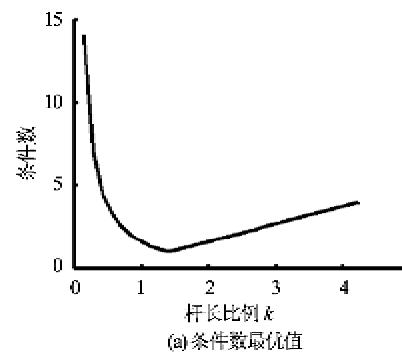


图 6 PUMA 型空间 3R 机器人



(a) 条件数最优值

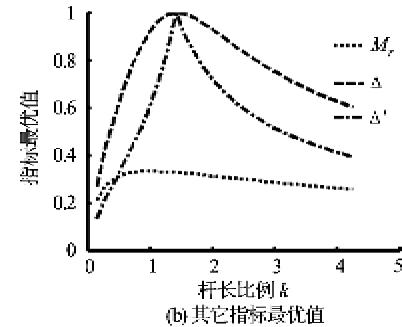
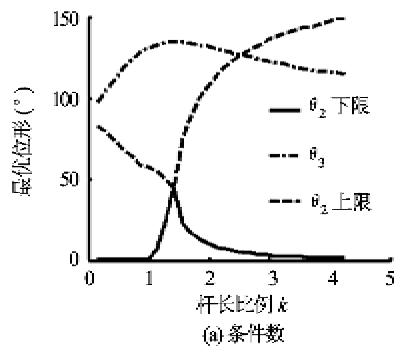


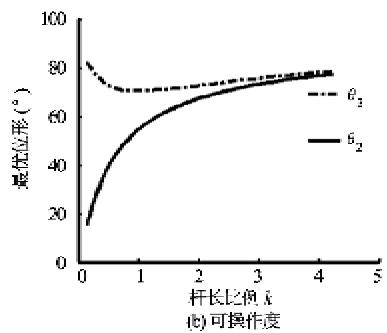
图 7 指标最优值随 k 的变化

由图 8(a)可知,不同的杆长比例,其条件数最小时, θ_3 为一个定值,而 θ_2 是一个范围,图中实线和虚线分别为 θ_2 的上下限。当杆长比例 k 与 $\sqrt{2}$ 相差越远时, θ_2 的范围就越大,此时条件数几乎不受 θ_2 的影响。当 $k = \sqrt{2}$ 时,条件数受 θ_2 的影响最大,此时条件数最小时 θ_2 不再是一个范围,而是一个定值,即 $\theta_2 = 45^\circ$ 。图 9 为杆长比例 $k = 2\sqrt{2}$ 时,条件数的倒数随位形的变化,从图可以看出,在 θ_2 的一定范围内,条件数不受其影响,主要随 θ_3 的变化而变化。

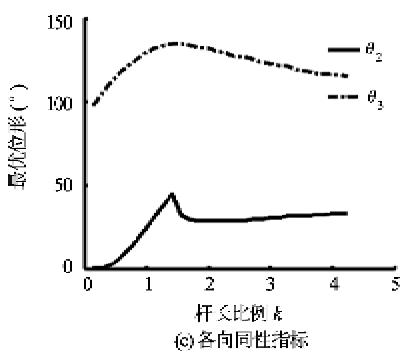
当机器人处于各向同性即条件数取全局最优值 1 时,雅克比矩阵需满足:矩阵中的所有列向量互相



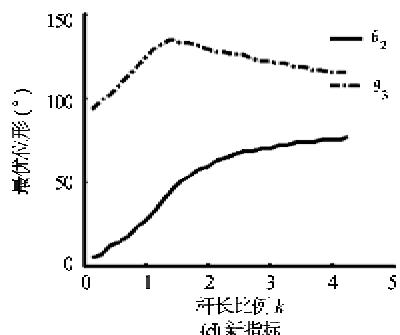
(a) 条件数



(b) 可操作度



(c) 各向同性指标



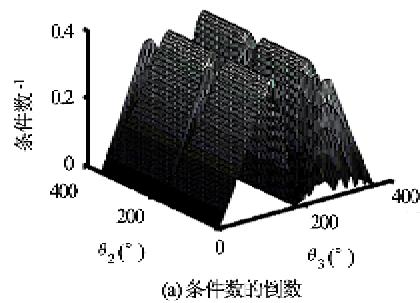
(d) 新指标

图 8 各指标最优位形随 k 的变化

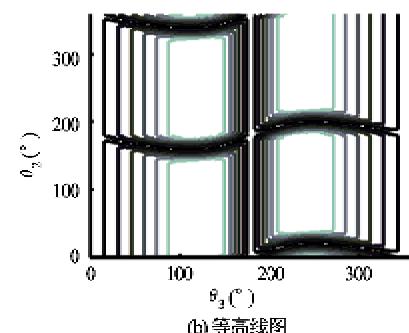
正交,且每一个列向量的长度相等。因此,可以求得机器人处于各向同性时所对应的杆长比例 k 和位形为: $l_2/l_3 = \sqrt{2}$, $\theta_2 = \pi/4$, $-\pi/4$, $\theta_3 = 3\pi/4$ 或 $\theta_2 = -\pi/4$, $3\pi/4$, $\theta_3 = -3\pi/4$ 。其各向同性点的轨迹为水平面内的一个圆。

该机器人可操作度的解析表达式为

$$\omega = l_2 l_3 |(l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_3| \quad (15)$$



(a) 条件数的倒数



(b) 等高线图

图 9 $k = 2\sqrt{2}$ 时, 条件数的倒数随 θ_2 、 θ_3 的变化

进行标准化了的可操作度为

$$M_r = \sqrt[3]{k^2 \sin^2 \theta_3 [k \sin \theta_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3)]^2} / (k + 1)^2 \quad (16)$$

当 M_r 取最大值时, 有

$$\tan \theta_2 = (l_2 - l_3 \cos \theta_3) / (l_3 \sin \theta_3) \quad (17)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sqrt{(k^2 + 1)^2 + 12k^2} - (k^2 + 1)}{6k} \quad (18)$$

图 7(b)和图 8(b)为 M_r 的最优值和最优位形随杆长比例的变化。

由式(17)可知, M_r 最优时, 机械臂末端需在 X-Y 平面内, 也就是与关节 2 等高。这也进一步解释为最大化第一个关节的角速度对可操作度的影响。文献[8]给出了可操作度这一运动灵活性指标新的物理解释。可操作度 ω 的极大化, 可以看作是机械臂末端到关节轴 1 的距离与机械臂在关节 2,3 运动平面内操作度的综合效果的极大化^[8]。

当 $k = 1$, $\theta_2 = 54.74^\circ$, $\theta_3 = 70.53^\circ$ 时, M_r 取全局最优解 0.333。

各向同性指标 Δ 的解析式为

$$\Delta =$$

$$\frac{6 \times \sqrt[3]{k^2 \sin^2 \theta_3 (k \sin \theta_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3))^2}}{5 + 3k^2 - 2k \cos(2\theta_2 + \theta_3) + 6k \cos \theta_3 - k^2 \cos 2\theta_2 - \cos 2(\theta_2 + \theta_3)} \quad (19)$$

其优化结果如图 7(b)和图 8(c)所示。

新指标的最优值和最优位形如图 7(b)和

图 8(d)所示。

对于空间 PUMA 机器人,其可操作度椭球存在长轴、短轴和中间轴,用条件数、各向同性指标和新指标优化得到的位形存在一定的差别(全局最优解除外),灵活性也不同。表 2 显示了杆长比例取 2.5 和 3.5 时,这三个指标的优化结果。其中条件数最优时,取 $\theta_2 = 45$ 为例。由表可知三个指标优化得到的结果其长轴和短轴差别不大,即条件数几乎相同。但对于中间轴而言,新指标 > 各向同性 > 条件数,因此优化结果的可操作度也是如此。综合条件数和可操作度,新指标的优化结果具有更好的运动灵活性。

表 2 各指标优化结果

$\frac{l_2}{l_3}$		长轴	中轴	短轴	条件数	可操作度
2.5	κ	2.0731	0.9625	0.9587	2.1624	1.9128
	Δ	2.0731	1.6137	0.9587	2.1624	3.2071
	Δ'	2.0920	2.0762	0.9668	2.1638	4.1993
3.5	κ	3.1443	0.9784	0.9712	3.2375	2.9877
	Δ	3.1408	2.3222	0.9701	3.2375	7.0757
	Δ'	3.1513	3.1429	0.9733	3.2378	9.6395

当 PUMA 型空间 3R 机器人取以上两个杆长比例时,新指标的优化结果最好,为了验证其它杆长比例配置时新指标的优越性,图 10 将不同杆长比例

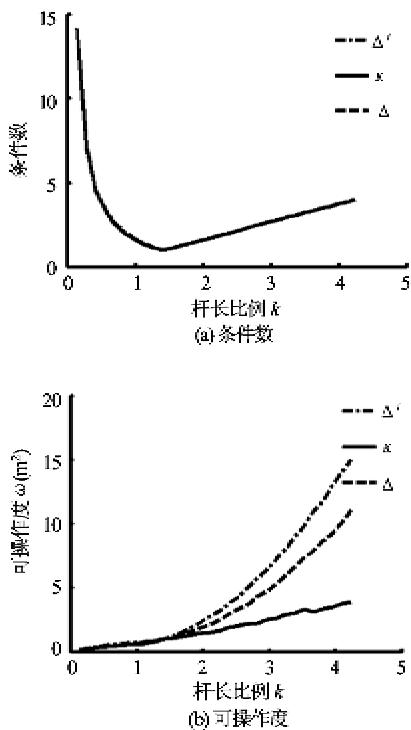


图 10 三个指标优化结果对比

时,三个指标优化结果的条件数和可操作度进行对比。其中条件数最优时, θ_2 取其范围的下限。该图同样反映出了新指标优化结果的综合灵活性更好。

PUMA 型机器人各指标在最优位形处的灵敏度为

$$H(k) = \frac{1}{4} \left(\frac{|\mu(k, \theta'_2 + \delta, \theta'_3) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_2 - \delta, \theta'_3) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_2, \theta'_3 + \delta) - u_m|}{\delta} + \frac{|\mu(k, \theta'_2, \theta'_3 - \delta) - u_m|}{\delta} \right) \quad (20)$$

其结果如图 11 所示。

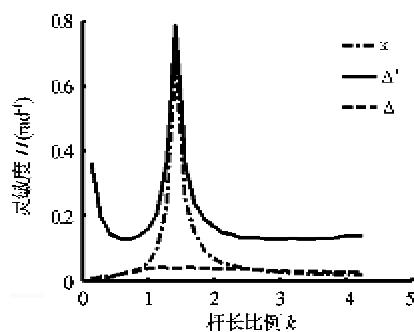


图 11 各指标灵敏度

由图可知,这类 PUMA 型机器人在最优位形处指标的灵敏度为各向同性 < 新指标 < 条件数。而对同一指标而言,当杆长比例取全局最优解时,指标的灵敏度最大,其最优位形处的运动灵活性最不稳定。

3 实验研究

基于新指标,在 3R-2P 机器人实验平台上(如图 12 所示),对平面 3R 允余度机器人进行了运动规划的实验研究。

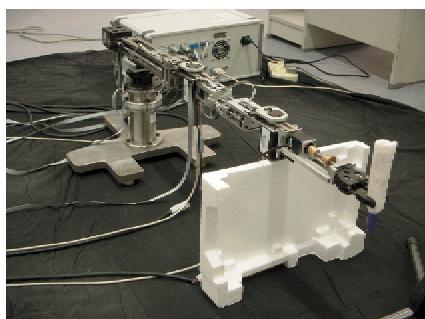


图 12 3R-2P 机器人实验平台

采用一般梯度投影法,冗余度机器人的运动学逆问题的解可表示为^[9]

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{X} + K(I - J^+ J) \nabla H \quad (21)$$

式中: $\dot{\theta} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 为关节速度; $\dot{X} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 为末端速度; J^+ 为雅克比广义逆矩阵, $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times m}$; $I \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为单位矩阵; ∇H 为性能指标 H 的梯度, $\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} & \frac{\partial H}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{n \times 1}$; K 为梯度系数, $K > 0$ 使 H 极大, $K < 0$ 使 $H(q)$ 极小化。

选取新指标式(6)为规划时的性能指标函数,末端速度为 $\dot{X} = [0.12\sin(t) \ 0.12\cos(t)]^T$, 梯度系数取 $K = 0.5$, 代入式(21)。时间范围取一个周期为 $0 \sim 2\pi$, 初始位形为 $[\pi/4, \pi/4, \pi/4]$ 。其末端轨迹如图 13 所示是一个半径为 0.12m 的水平圆。

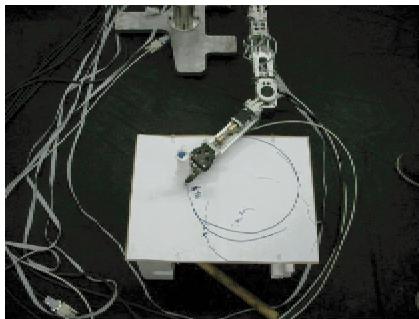


图 13 实验结果

4 结 论

本文对各类运动灵活性指标进行了分析比较,并且提出了一个新指标。基于以上各个灵活性指标,对平面和空间机器人的运动灵活性进行了研究。得到以下结论:

(1)采用条件数指标、各向同性和新指标对机器人的运动灵活性进行优化,优化结果的条件数差别很小,几乎相同;但新指标优化结果的可操作度要比各向同性好,因此其运动灵活性更加优越。而条件数只考虑了运动性能最好和最差的两个方向,没有考虑其他方向,很难比较。

(2)对于非冗余度机器人当杆长比例满足某一指标全局最优时,灵活性的稳定性较差。在设计机器人时,当存在多个杆长比例配置能使指标达到全局最优解时,所选择的比例配置应该使机器人在最优位形处的灵敏度较小。

参考文献

- [1] Salisbury J K, Craig J J. Articulated hands: force control and kinematic issues. *Int J of Robotics Res*, 1982, 1(1):4-17
- [2] Yoshikawa T. Manipulability of robotic mechanisms. *Int J of Robotics Research*, 1985, 4(2): 3- 9
- [3] Kim J, Khoala K. Dexterity measures for design and control of manipulators. *IEEE Int Workshop on Intelligent Robots and Systems*, 1991, 2:758-763
- [4] Lee J. A study on the manipulability measures for robot manipulators. *IEEE Int Conf on Intelligent Robots and Systems*, 1997, 3:1458-1465
- [5] Mayorga R V, Carrera J, Ortiz M M. A kinematics performance index based on the rate of change of a standard isotropy condition for robot design optimization. *Robotics and Autonomous Systems*, 2005, 53(3-4): 153-163
- [6] Merlet J P. Jacobian, Manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots. *Journal of Mechanical Design*, 2006, 128:199-206
- [7] Kircanski M V. Robotic isotropy and optimal robot design of planar manipulators. *IEEE Int Conf on Robotics and Automation*, 1994, 2:1100-1105
- [8] 赵京,缪萍,荆红梅.冗余度机械臂关节运动和末端运动的同步容错规划.机械工程学报,2003,39(3):53-57
- [9] Legeois A. Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms. *IEEE Transaction on Syst*, 1997, 7(12):868-871

Study on dexterity of robot manipulators

Xie Biyun, Zhao Jing

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract

The analysis and comparison of the different traditional dexterity measures of manipulators was made, and a new dexterity measure was presented. Furthermore the sensitivity of the measure was defined, which can be used to evaluate the stability of the dexterity. Based on these measures, the kinematic dexterity of planar and spatial robots was studied. Meanwhile the dexterity of the optimization results in different dexterity measures are compared. From the results obtained it can be observed that the optimal posture determined by the new measure is more dexterous.

Key words: kinematic dexterity, condition number, manipulability, isotropic condition