

区间参数结构动力特征值分析的仿射算法^①

梁震涛^{②*} 朱增青^{**} 陈建军^{**}

(* 中国电子科技集团公司第 14 研究所 南京 210039)

(** 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘 要 将不确定结构系统中的区间参数用仿射型来表示,对获得的广义区间特征值方程的求解方法进行了研究,提出了一种改进的仿射算法。此方法考虑到广义特征值方程中各区间元素的相关性,通过独立的区间参数在子区间上转为仿射型,将特征值方程的求解转化为相应的确定性问题,再利用常规的仿射算法,搜索方程解中的最大最小值来确定各阶特征值边界。先用数学算例对所提改进的仿射算法的有效性进行了验证,随后将其应用于工程算例的特征值区间分析中,并与其它算法进行了比较。结果表明该算法是合理可行的,有较高的准确性。

关键词 不确定结构, 广义特征值, 区间分析, 仿射算法

0 引 言

在工程问题中,总会遇到一些不确定性因素。随机理论、模糊集理论和区间分析是解决不确定性问题的 3 种主要方法^[1-3]。很多实际工程结构问题,能获得的实验数据是有限的。当没有足够数据验证概率方法和模糊方法所需要的关于未知量(或其函数)的概率密度函数或隶属度函数的正确性,而未知量所在的区间范围可以准确给出时,区间分析方法是一种自然的处理这种情况的不确定性结构分析方法。

近年来,应用区间分析方法进行结构分析的研究主要集中于不确定结构的静力分析、静态反演和可靠性分析等问题,对于动力特征值问题也有所涉及。采用区间数描述不确定结构参数后,结构固有特征值范围的确定与广义区间特征值问题相对应。人们已提出一些求解广义区间特征值方程的方法,文献[4]中给出了对称区间矩阵的标准特征值问题的求解定理。文献[5,6]把该定理推广到区间矩阵的标准特征值问题,提出了矩阵摄动法。文献[7]提出了采用直接优化法求解实对称区间标准特征值问题。已有的方法大都以形成后的区间矩阵为处理对象,且不考虑区间矩阵元素之间的相关性,可能扩大

特征值解的范围。最近,文献[8]提出了一种全局优化法,该方法以非确定参数为优化变量,以关心的特征值为目标函数,采用一种实数编码遗传算法求解由广义区间特征值问题转化而来的优化问题,由于不采用更多的先验假设,全局优化法具有获得问题准确解的能力。

本文针对直接采用区间运算法则计算结果易于扩张的缺陷,采用区间函数的仿射型来描述问题的不确定性,对于具有不确定参数结构的动力特征值区间分析提出一种仿射算法。先通过计算区间函数值域来验证该算法的可行性,然后用结构分析的算例说明该算法可以方便、快速、有效地获得不确定结构的动力特征值区间。

1 问题描述

在确定性结构中,对 n 自由度结构进行动力分析,则结构的广义特征值问题可表示为

$$KX = \omega^2 MX \quad (1)$$

式中, $K = [k_{ij}](i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为 n 阶刚度矩阵; $M = [m_{ij}](i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为 n 阶质量矩阵; ω 、 X 分别为结构的固有频率和相应的特征向量,且 $\omega^2 = \lambda$ 是关于矩阵 K 和 M 的特征值。

在不确定性问题中,当采用区间数描述刚度阵

① 973 计划资助项目。

② 男,1979 年生,博士,工程师;研究方向:机载雷达结构总体,计算结构力学;联系人, E-mail: zhtliang@126.com
(收稿日期:2009-06-09)

和质量阵的元素时, $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 都成为区间矩阵, 其中 $\mathbf{K}$ 是对称半正定区间矩阵, $\mathbf{M}$ 是对称正定区间矩阵, 其元素可用区间数表示为

$$k_{ij} = [\underline{k}_{ij}, \bar{k}_{ij}], m_{ij} = [\underline{m}_{ij}, \bar{m}_{ij}] \quad (2)$$

此时, 式(1)成为广义区间特征值方程, 由刚度阵 $\mathbf{K}$ 和质量阵 $\mathbf{M}$ 确定的相应特征值和特征向量也分别成为区间数和区间向量。

对工程结构而言, 由于刚度阵 $\mathbf{K}$ 和质量阵 $\mathbf{M}$ 是不确定性结构参数 α (如弹性模量、质量密度等材料特性, 结构长度、截面尺寸等几何参数) 的函数, 这些不确定性结构参数对刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 和质量矩阵 $\mathbf{M}$ 的某些元素同时存在影响, 或者说矩阵中的某些元素取值是与某些不确定性结构参数 α 相关的, 在进行不确定性结构的动力特性分析时应该充分考虑到这种相关性。

设 $\alpha = (\alpha_i)_m = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ 为结构任意不确定性参数组成的区间向量, 其所在的范围为

$$\begin{aligned} \alpha \in \alpha^I &= [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] \\ &= ([\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1], [\underline{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2], \dots, [\underline{\alpha}_m, \bar{\alpha}_m])^T \end{aligned} \quad (3)$$

式中, α 为区间参数向量; $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}$ 分别为区间参数向量的下界和上界; m 为区间向量的维数。

将式(3)代入式(1)可得

$$\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{M}(\alpha)\mathbf{X} \quad (4)$$

由式(4)可见: 由于 α 为区间向量, 则由其构成的刚度矩阵和质量矩阵亦为区间矩阵, 且可以表为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha) &= \{\mathbf{K}; \mathbf{K} = \mathbf{K}(\alpha), \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\} \\ \mathbf{M}(\alpha) &= \{\mathbf{M}; \mathbf{M} = \mathbf{M}(\alpha), \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\} \end{aligned}$$

则结构广义特征值的集合可表为

$$\mathbf{W} = \{\lambda; \mathbf{K}(\alpha)\mathbf{X} = \lambda \mathbf{M}(\alpha)\mathbf{X}, \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\} \quad (5)$$

由式(5)可见, 结构的特征值亦为区间变量, 并可由式

$$\begin{aligned} \lambda_j &\in \lambda_j^I = [\underline{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j] \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \underline{\lambda}_j &= \min_{\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}} \{\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{X} = \lambda \mathbf{M}(\alpha)\mathbf{X}\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (6-a)$$

$$\bar{\lambda}_j = \max_{\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}} \{\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{X} = \lambda \mathbf{M}(\alpha)\mathbf{X}\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6-b)$$

表示。

2 仿射算法

区间运算由于忽略了变量之间的相关性, 以及

其运算过程中不可避免地存在“误差爆炸”现象^[9], 使所得值往往不能反映结构的真实状态。仿射型及仿射运算是新近出现的处理不确定性的方法。与区间算术一样, 仿射算术也能够自动记录浮点数的截尾和舍入误差, 此外它还能自动记录各个不确定量之间的依赖关系, 正是由于这个额外的信息, 使仿射算术可得到比区间算术紧得多的区间, 特别在长计算链中优势更加明显。

2.1 仿射型及其区间形式

设由于自身或环境原因有 t 种相互独立的噪声共同影响有界不确定性量 $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ 的真值, x 的仿射型 $\hat{x}$ 可表示为这 t 个噪声的线性组合, 如式

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + \dots + x_t \epsilon_t \quad (7)$$

所示。式中, x_0 是 $\hat{x}$ 的中心值; $\epsilon_j \in [-1, 1]$ ($j = 1, 2, \dots, t$) 是第 j 噪声, 其系数 $x_j \in R$ ($j = 1, 2, \dots, t$) 称为 $\hat{x}$ 的第 j 个偏增量, 表示第 j 噪声影响不确定性的幅值。如果同样的噪声元 ϵ_j 出现在两个或更多个仿射形式(比如 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$) 中, 就意味着 x 和 y 的不确定性之间具有某种联系和互相依赖性。

区间和仿射形式之间可以互相转换: 给定一个表示量 x 的区间 $[\underline{x}, \bar{x}]$, 其对应的仿射形式 $\hat{x}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x_0 + x_1 \epsilon_x \\ x_0 &= (\underline{x} + \bar{x})/2 \\ x_1 &= (\bar{x} - \underline{x})/2 \end{aligned}$$

反过来, 给定一个仿射形式 $\hat{x} = x_0 + x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + \dots + x_t \epsilon_t$, 其对应的区间为 $[\underline{x}, \bar{x}] = [x_0 - \xi, x_0 + \xi]$, 其中 $\xi = \sum_{j=1}^t |x_j|$ 。

根据文献[9], 如果 $\hat{x} = 0 + 1 \cdot \epsilon_x, \hat{y} = 0 + 1 \cdot \epsilon_y$, 那么在仿射算术里 $\hat{x} - \hat{x} = 0$, 而 $(2\hat{x} + \hat{y}) - \hat{x} = \hat{x} + \hat{y} = 0 + \epsilon_x + \epsilon_y = [-2, 2]$ 。然而在区间算术里, 其结果分别是 $[-2, 2]$ 和 $[-4, 4]$ 。显然, 仿射算术所得到的结果比区间算术要精确。

2.2 张量形式的三元区间多项式上下界

尽管仿射算法比区间运算有着更高的精度, 但由于近似逼近的存在使得非线性仿射算法不可避免地会出现误差, 而且误差会随着非线性程度的增高而加剧。文献[10]给出了张量形式的 3 元区间多项式上下界公式, 现仅应用于计算机 3 维成像。鉴于机械结构功能函数多是不确定性参量的多项式, 故有必要将其引入到动力特征值分析中来。

设 3 元区间多项式

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l A_{ijk} x^i y^j z^k, \\ (x, y, z) \in \Omega = [\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}] \times [\underline{z}, \bar{z}] \quad (8)$$

可将该式改写为张量积形式,即

$$f(x, y, z) = \mathbf{X} \otimes_x (\mathbf{Z} \otimes_z \mathbf{A}) \otimes_y \mathbf{Y} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{X} = (1, x, \dots, x^n)$, $\mathbf{Y} = (1, y, \dots, y^m)^T$, $\mathbf{Z} = (1, z, \dots, z^l)$; A_{ijk} 是张量系数。

将区间 $[\underline{x}, \bar{x}]$ 、 $[\underline{y}, \bar{y}]$ 及 $[\underline{z}, \bar{z}]$, 写成如下拥有单一噪声符号的仿射形式:

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \epsilon_x \\ \hat{y} = y_0 + y_1 \epsilon_y \\ \hat{z} = z_0 + z_1 \epsilon_z$$

式中 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z \in [-1, 1]$ 是 3 个相互独立的噪声, 其中 $x_0 = (\underline{x} + \bar{x})/2$, $x_1 = (\bar{x} - \underline{x})/2$, $y_0 = (\underline{y} + \bar{y})/2$, $y_1 = (\bar{y} - \underline{y})/2$, $z_0 = (\underline{z} + \bar{z})/2$, $z_1 = (\bar{z} - \underline{z})/2$ 。定义噪声幂矢量 $\hat{\mathbf{X}} = (1, \epsilon_x, \dots, \epsilon_x^n)$, $\hat{\mathbf{Y}} = (1, \epsilon_y, \dots, \epsilon_y^m)^T$, $\hat{\mathbf{Z}} = (1, \epsilon_z, \dots, \epsilon_z^l)$, 以及矩阵

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array} \right) x_0^{j-i} x_1^i, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{array} \right] (i, j = 0, 1, \dots, n) \\ \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} 0, & i < j \\ \left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \right) y_0^{i-j} y_1^j, & i \geq j \end{array} \right] (i, j = 0, 1, \dots, m) \\ \mathbf{D} = \left[\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array} \right) z_0^{j-i} z_1^i, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{array} \right] (i, j = 0, 1, \dots, l)$$

再定义新张量 $\mathbf{G}$, 且令 $\mathbf{G} = \mathbf{B} \otimes_x (\mathbf{D} \otimes_z \mathbf{A}) \otimes_y \mathbf{C}$, 又因为 $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} \mathbf{B}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{D}$, 则 $f(x, y, z)$ 的仿射形式(仿射函数)可记作

$$f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{\mathbf{X}} \otimes_x (\hat{\mathbf{Z}} \otimes_z \mathbf{G}) \otimes_y \hat{\mathbf{Y}} \\ = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l G_{ijk} \epsilon_x^i \epsilon_y^j \epsilon_z^k \quad (10)$$

至此, $f(x, y, z)$ 在定义域 Ω 内精确上下界分别如下:

$$\bar{f} = G_{000} + \sum_{k=1}^l \left\{ \begin{array}{ll} \max(0, G_{00k}), & \text{if } k \text{ is even} \\ |G_{00k}|, & \text{otherwise} \end{array} \right\} \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^l \left\{ \begin{array}{ll} \max(0, G_{0jk}), & \text{if } j, k \text{ are both even} \\ |G_{0jk}|, & \text{otherwise} \end{array} \right\} \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \left\{ \begin{array}{ll} \max(0, G_{ijk}), & \text{if } i, j, k \text{ are all even} \\ |G_{ijk}|, & \text{otherwise} \end{array} \right\} \\ f = G_{000} + \sum_{k=1}^l \left\{ \begin{array}{ll} \min(0, G_{00k}), & \text{if } k \text{ is even} \\ -|G_{00k}|, & \text{otherwise} \end{array} \right\} \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^l \left\{ \begin{array}{ll} \min(0, G_{0jk}), & \text{if } j, k \text{ are both even} \\ -|G_{0jk}|, & \text{otherwise} \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \left\{ \begin{array}{ll} \min(0, G_{ijk}), & \text{if } i, j, k \text{ are all even} \\ -|G_{ijk}|, & \text{otherwise} \end{array} \right\}$$

2.3 改进的仿射算法

本文将常规的仿射算法做了改进, 主要思想是将独立的自变量区间 $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ($i = 1, \dots, m$) 逐步离散, 令自变量依次在每个子区间上做仿射运算, 求解相应结构的广义特征值问题, 在得到的各阶广义特征值中搜索最大和最小值, 从而得到各阶广义特征值区间的边界。

为了便于理解, 首先举一简单算例: 对于区间数 $x \in [5, 7]$, 其仿射型为 $\hat{x} = 6 + \epsilon_1$ 。若直接用仿射算法, $\hat{x}^2 = (6 + \epsilon_1)^2 = 36 + 12\epsilon_1 + \epsilon_2$, 得相应的区间值为 $[23, 49]$, 但真实区间是 $[25, 49]$ 。现在我们将区间 $[5, 7]$ 分为两个子区间 $[5, 6]$ 和 $[6, 7]$, 并在子区间上应用仿射算法, 即等同于将仿射表达式 $6 + \epsilon_1$ 分为两个子表达式 $5.5 + 0.5\epsilon_1$ 和 $6.5 + 0.5\epsilon_1$ 。此时, 求解 $\hat{x}^2 = (6 + \epsilon_1)^2$ 转化为求解 $(5.5 + 0.5\epsilon_1)^2$ 和 $(6.5 + 0.5\epsilon_1)^2$ 。由仿射运算得 $30.25 + 5.5\epsilon_1 + 0.25\epsilon_2$, $42.25 + 6.5\epsilon_1 + 0.25\epsilon_2$, 经合并上面仿射表达式相应的区间值得 $[24.5, 49]$, 比较接近于真实解区间, 可见, 基于区间离散的仿射算法可以抑制区间扩张。

下面将本文方法描述如下:

(1) 确定结构中独立的区间参量 a_i ($i = 1, \dots, m$), 置 $k = 0$, 区间离散数目 $n_k = 1$, 允许误差 $\delta > 0$ 。

(2) 将自变量区间 $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ($i = 1, \dots, m$) 作 n_k 等分, 得子区间

$$[\underline{a}_i, \bar{a}_i] \Rightarrow \\ [\underline{a}_i, \underline{a}_i + 1/n_k * (\bar{a}_i - \underline{a}_i)] \\ [\underline{a}_i + 1/n_k * (\bar{a}_i - \underline{a}_i), \underline{a}_i + 2/n_k * (\bar{a}_i - \underline{a}_i)] \\ \vdots \\ [\underline{a}_i - 1/n_k * (\bar{a}_i - \underline{a}_i), \bar{a}_i]$$

然后在每个子区间上将自变量由区间型转化为仿射型。

(3) 不改变每个自变量仿射表达式, 对 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 中的变量不做运算, 视为确定值, 求解确定性结构的广义特征值问题式(5), 得到相应各阶广义特征值 λ_j ($j = 1, \dots, n$) 的表达式。

(4) 在 λ_j ($j = 1, \dots, n$) 的表达式中做仿射运算, 求得其相应的区间值。

(5) 在第 j 阶广义特征值 λ_j 中搜索得到最大值 $\lambda_{j\max}^{(k)}$ 和最小值 $\lambda_{j\min}^{(k)}$ ($j = 1, \dots, n$)。

(6) 迭代次数 $k = k + 1$, 当 $k = 1$, 令 $n_k = 2$; 当 $k = 2$, 令 $n_k = 4$; 当 $k \geq 3$, 令 $n_k = 2^{k-1} \times 5$ 。

(7) 重复步(2)至步(5), 得到各阶广义特征值的新一轮最大值 $\lambda_{j\max}^{(k+1)}$ 和最小值 $\lambda_{j\min}^{(k+1)}$ 。

(8) 计算 $|\lambda_{j\max}^{(k+1)} - \lambda_{j\max}^{(k)}|$ 和 $|\lambda_{j\min}^{(k+1)} - \lambda_{j\min}^{(k)}|$, 当 $\max\left\{\frac{|\lambda_{j\max}^{(k+1)} - \lambda_{j\max}^{(k)}|}{\lambda_{j\max}^{(k)}}, \frac{|\lambda_{j\min}^{(k+1)} - \lambda_{j\min}^{(k)}|}{\lambda_{j\min}^{(k)}}\right\} \leq \delta$, ($j = 1, 2, \dots, n$) 时, 转步(9); 否则转步(6)。

(9) 输出广义特征值的区间 $[\lambda_j, \bar{\lambda}_j]$ ($j = 1, \dots, n$), 其中 $\bar{\lambda}_j = \lambda_{j\max}^{(k+1)}$, $\lambda_j = \lambda_{j\min}^{(k+1)}$ 。

该算法既考虑了广义特征值方程中各矩阵元素的相关性, 又考虑了矩阵元素取区间内点值的情况, 结果趋近于真实解。下面举例说明其有效性。

3 算例

3.1 本文算法分析函数值域

例1 求 $f = x_1 \frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2} + (x_4 - 3)^2$ 的值域, 其中 $x_1 \in [2, 3], x_2 \in [6, 18], x_3 \in [1, 3], x_4 \in [-3, 7]$ 。

对原函数, 按常规区间运算得到值域 $[-45, 35.1765]$; 若将原函数变形为 $f = x_1(1 - \frac{2}{1 - x_3/x_2}) + (x_4 - 3)^2$, 再按常规区间计算得值域 $[-33, 33.7647]$ 。若以 x_1, x_2, x_3, x_4 为独立自变量, 置允许误差 $\delta = 0.001$, 采用基于区间离散的仿射算法, 当区间离散数 $n_k = 5$ 时迭代停止, 得到函数值域 $[-9, 33.7647]$, 与函数的精确值域一致。

从上面两例可知, 本文算法对于单变量或多变量的函数都有一定的区间分析能力, 考虑了区间内

所有取值, 而不只是离散区间的端点, 与区间直接运算相比有一定的优越性。

3.2 本文算法求解区间结构动力特征值

取自变量为质量阵和刚度阵中独立的区间参数, 让自变量在给定区间范围内取值, 对于自变量的每个确定值, 有唯一的 n 阶特征值 λ_j ($j = 1, \dots, n$) 与之对应, 找到特征值 λ_j 的上下界, 即可得到广义区间特征值方程的解区间。

例2 图1所示框架结构。结构刚度参数值为: $[k_1] = [2000, 2020]$ N/m, $[k_2] = [1800, 1850]$ N/m, $[k_3] = [1600, 1630]$ N/m, $[k_4] = [1400, 1420]$ N/m, $[k_5] = [1200, 1210]$ N/m。结构质量参数值为: $[m_1] = [29, 31]$ kg, $[m_2] = [26, 28]$ kg, $[m_3] = [26, 28]$ kg, $[m_4] = [24, 26]$ kg, $[m_5] = [17, 19]$ kg。现求该结构特征值的区间。用本文算法, 置允许误差 $\delta = 0.001$, 当区间离散数 $n_k = 2$ 时迭代停止。表1给出了本文改进的仿射算法和全局优化方法^[8]、矩阵摄动法^[11]对算例特征值区间的计算结果。

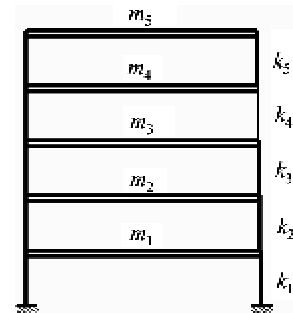


图1 多层框架结构

表1 框架结构特征值计算结果

特征值	全局优化法 ^[8]	改进的仿射算法	矩阵摄动法 ^[11]
λ_1	[5.858, 6.502]	[5.8581, 6.5020]	[4.617, 7.830]
λ_2	[42.029, 46.309]	[42.0293, 46.3088]	[40.643, 47.820]
λ_3	[98.856, 108.689]	[98.8564, 108.6890]	[99.180, 109.399]
λ_4	[158.051, 173.778]	[158.0514, 173.7776]	[157.848, 174.002]
λ_5	[209.515, 230.084]	[209.5148, 230.0845]	[209.515, 230.084]

仿射算法以结构的独立区间参数为自变量, 且充分考虑了质量阵和刚度阵中矩阵元素的相关性, 而矩阵摄动法不考虑各参数在矩阵元素中的相互影响, 形成区间刚度阵和质量阵后再求解相应的区间广义特征值问题。由表1可见, 本文方法与全局优化方法得到的结果几乎一致, 其特征值解区间是矩

阵摄动法解区间的子集。通常情况下全局优化法被视为精确解, 结果的比较从另一角度也表明本文所提方法求解问题的有效性。

4 结论

(1) 本文研究了不确定结构系统的广义特征值

求解方法,提出一种改进的仿射算法。该算法以独立区间参数为自变量,既考虑到广义特征值方程中各区间元素的相关性,又考察了区间内所有取值,而不只是单个离散子区间的端点,能够较快地逼近真实的特征值解区间。

(2) 本文方法具有一般性,对于单变量或多变量的函数都有一定的区间分析能力。该方法可以减少因直接采用区间数运算法则造成的计算结果扩张。

(3) 当进行不确定结构的动力特征值分析时,仿射算法不引入更多的假设,适用面较广,收敛速度较快。

(4) 仿射算法也有其局限性,当函数变量过多且非线性较强时,亦会导致误差偏大;此法的优越性更多体现在显式函数运算中,对于其在隐式函数中的应用及程序化实现,还有待于探讨和研究。

参考文献

- [1] Hosseini S A A, Khadem S E. Vibration and reliability of a rotating beam with random properties under random excitation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49: 1377-1388
- [2] Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural system using interval analysis. *AIAA Journal*, 1997, 35(4): 727-735
- [3] Florea M C, Josselme A L, Grenier D, et al. Approximation techniques for the transformation of fuzzy sets into random sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159(3): 270-288
- [4] Deif A S. Sensitivity Analysis in Linear Systems. Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag, 1986
- [5] Chen S H, Qiu Z P. Perturbation method for computing eigenvalue bounds in vibration system with interval parameters. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 1994, 10: 121-134
- [6] 陈塑寰, 邱志平, 宋大同等. 区间矩阵标准特征值问题的一种解法. 吉林大学学报, 1993, 23(3): 1-8
- [7] 陈怀海, 陈正想. 求解实对称矩阵区间特征值问题的直接优化法. 振动工程学报, 2000, 13(1): 117-121
- [8] 王登刚, 李杰. 计算具有区间参数结构特征值范围的一种新方法. 计算力学学报, 2004, 21(1): 56-61
- [9] Comba J L D, Stolfi J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. In: Proceedings of the Anais do V II SIBGRAPI, Recife, Brazil, 1993. 9-18
- [10] Shou H H, Lin H W, Martin R, et al. Modified affine arithmetic in tensor form. In: Proceedings of the International Symposium Computing and Information, Zhuhai, China, 2004, 2: 642-646
- [11] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论. 北京: 科学出版社, 1999

Dynamic eigenvalues analysis of interval parameters structures with affine arithmetic

Liang Zhentao*, Zhu Zengqing**, Chen Jianjun**

(* China Electronics Technology Group Corporation No.14 Research Institute, Nanjing 210039)

(** School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract

By describing the interval parameters of an uncertain structure with affine forms, a generalized eigenvalue interval equation was researched, and an improved affine arithmetic for dynamic eigenvalues analysis of interval parameter structures was presented. The affine arithmetic considers the correlations between the interval elements in the generalized eigenvalue equation, transforms independent uncertain parameters into affine forms, and transforms the solution of an eigenvalue equation into the corresponding certain one. With the general affine arithmetic, the eigenvalue bounds of each order are determined by searching for the maximum and minimum in the solutions. Some mathematical examples and the further engineering applications confirm the feasibility, validity and higher accuracy of this approach.

Key words: uncertain structures, generalized eigenvalues, interval analysis, affine arithmetic