

## 40 米口径射电望远镜索支撑系统误差分析与补偿<sup>①</sup>

屈 林<sup>②</sup> 唐晓强 姚 蕊 陈 旭

(清华大学精密仪器与机械学系 北京 100084)

**摘要** 主要研究了 40 米口径射电望远镜索支撑系统的误差分析与补偿问题,提出了一种基于索直线模型弹性变形的实时误差补偿方法。在索支撑系统运动学和静力学分析的基础上,建立了兼顾索弹性变形的误差模型,分析了索弹性变形对馈源跟踪精度的影响情况。针对天文规划给定的两条典型路径,根据索弹性变形量和实时控制要求,提出了一种基于索弹性变形的大跨度索支撑系统误差补偿方法,该方法不需要迭代,计算量小。仿真结果表明,该误差补偿方法提高了索支撑系统跟踪精度,同时满足射电望远镜的观测要求。

**关键词** 大射电望远镜, 索并联机构, 误差模型, 误差补偿

### 0 引言

射电望远镜是射电天文学的主要研究工具。其主要通过接收宇宙天体发出的各种波段的无线电信号,研究天体的物理、化学性质,目前已成为人类探测宇宙秘密的重要工具。在 1993 年在日本京都召开的 24 届 URSI 会议上,世界的天文学家和天线学家提出建造下一代的大射电望远镜(LT)。国内天文学家在随后 16 年的预研探索和实验研究中,提出了一种新的实现大射电望远镜的方案,即将馈源背支撑结构简化,通过索并联机构作为一次馈源支撑系统,并利用 A-B 转台和 Stewart 平台进行二次调整,达到馈源跟踪位置精度<sup>[1]</sup>。本文的研究对象是 40 米口径射电望远镜的索支撑并联机构系统。

索并联机构具有工作空间大,负载能力强,易拆装,可重组,模块化程度高,价格低廉和运动速度快等优点<sup>[2,3]</sup>,非常适合馈源定位的一次调整机构。在 40 米射电望远镜实际建造中,通过采用索并联机构拖动馈源舱,可明显降低馈源的质量和提高其动态性能,满足跟踪天体运动的要求<sup>[4,5]</sup>。较多的学者对索并联机构的工作空间、运动学分析、奇异性分析等进行了研究<sup>[6-8]</sup>。但是,由于研究的索并联机构索跨度小、重量轻,一般忽略索的自重以及由于自重产生的变形,直接把索简化成只承受拉力,不能承受压力的二力杆。然而,对于 40 米射电望远镜,其索

跨度较大,重量较重,需要考虑索的自重以及由自重引起的变形。Krishna, Premetal<sup>[9]</sup>等学者在分析索受力的基础上,建立了索模型的微分方程,并推导出了索的悬链线方程,给出了抛物线和直线简化模型,但没有考虑索在拉力下的弹性变形因素。本文首先建立 40 米射电望远镜馈源索支撑系统的运动学和静力学模型,然后建立索的悬链线模型、简化直线模型和索支撑系统误差方程,最后在 40 米射电望远镜馈源支撑系统的工作空间内,按照天文观测给定的两条典型工作路径,分析馈源跟踪的终端误差,并提出一种有效的误差补偿方法。

### 1 40 米口径射电望远镜索支撑系统模型

图 1 所示为在建中的北京密云观测基地 40 米口径射电望远镜馈源支撑系统。馈源通过 6 索并联机构控制位置和一定的俯仰角度,然后利用 A-B 转台补足馈源所需的俯仰角度,最终通过 Stewart 平台进行精调整,从而达到馈源的精度要求。

#### 1.1 索支撑系统运动学与静力学建模

图 2 为索支撑系统运动简图,它由 6 个塔、6 条索和 1 个馈源舱构成。坐标系建立如下:在射电望远镜反射面底端建立静坐标系  $O-XYZ$ ,由索与馈源舱的 3 个连接点形成的平面为动平台,在动平

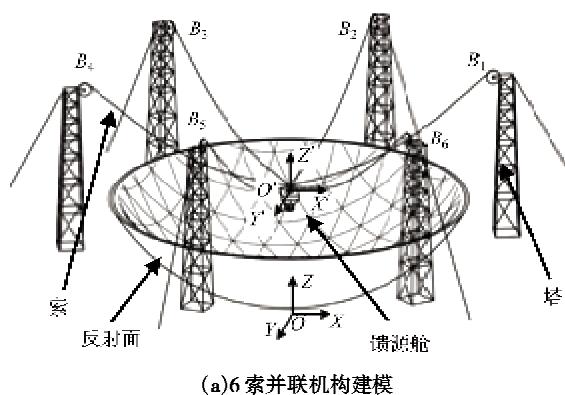
① 863 计划(2006AA04Z133)和国家自然科学基金(50605035, 10778625)资助项目。

② 男, 1984 年生, 硕士; 研究方向: 索并联机构设计理论及其控制系统; 联系人, E-mail: qu07@mails.tsinghua.edu.cn  
(收稿日期: 2009-04-01)

台的中心点建立动坐标系  $\mathfrak{M}'$ :  $O'-X'Y'Z'$ 。塔分布和索接口如图2(b)所示,6个塔的出索位置是  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), 连接在星型框架上3个点  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), 其中塔分布半径为  $r_b$ , 星型框架半径为  $r_a$ , 塔在静坐标系  $\mathfrak{M}$ :  $O-XYZ$  中的高度为  $h$ 。得到  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) 在静坐标系下的坐标为  $\mathfrak{M}B_i(r_b \cos(i-1)60^\circ, r_b \sin(i-1)60^\circ, h)^T$ ,  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 在动坐标系下的坐标为  $\mathfrak{M}'A_j(r_a \cos(4j-3)30^\circ, r_a \sin(4j-3)30^\circ, 0)^T$ 。



图1 FAST 40米示意图



(a) 6索并联机构建模

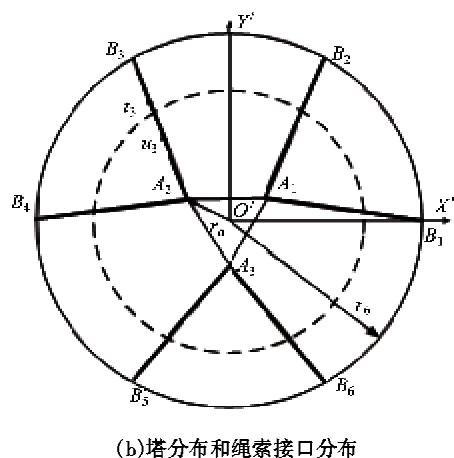


图2 6绳索并联机构运动学建模

设动平台在某一位姿为  $[x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$  下, 则  $\mathfrak{M}O'$  的坐标为  $[x, y, z]^T$ , 得到  $A_i$  在静坐标系下的坐标为

$$\mathfrak{M}A_i = R^{\mathfrak{M}} A_i + \mathfrak{M}O'^T \quad (1)$$

$$\mathfrak{M}L_i = \mathfrak{M}B_i \mathfrak{M}A_i \quad (2)$$

$$l_{0i} = \| \mathfrak{M}L_i \| \quad (3)$$

$$u_i = \mathfrak{M}L_i / l_{0i} \quad (4)$$

其中  $R^{\mathfrak{M}}$  为旋转矩阵,  $l_{0i}$  为索跨度长度,  $u_i$  为跨度方向矢量。

由于40米口径射电望远镜在跟踪目标时速度较低, 因此可以把镜源支撑系统看作准静止状态, 只对索支撑系统进行静力学分析。索支撑系统力传递方程如下:

$$F = J^T T_0 \quad (5)$$

其中  $T_0$  为索拉力,  $F$  为动平台末端的力螺旋, 由  $n$  ( $n = 6$ ) 个向量构成, 得到索系统的力传递矩阵为

$$J^T = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \\ \mathfrak{M}O'A_1 \times u_1 & \cdots & \mathfrak{M}O'A_3 \times u_m \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (6)$$

其中  $m$  是索数, 即  $m = 6$ 。将式(6)代入式(5)即可得到6根索的拉力  $T_0$ 。

为了保证索支撑系统的平稳性, 必须保证索一直处于拉力张紧状态。否则, 索并联机构的动平台会失稳, 这种现象称为索力虚牵问题。考虑到电机的扭矩, 索拉力不能太大。根据文献和实验结果, 40米射电望远镜的索拉力应该介于 500 ~ 2500N 之间<sup>[5]</sup>。

## 2 索模型简化与索并联机构误差分析

### 2.1 索直线模型与弹性变形误差

为了对索并联机构误差分析和控制, 需进行索静力学模型的分析。由文献[10]知, 索在自重的影响下, 其形状为一悬链线, 数学表达式为

$$z = -\frac{1}{l} \operatorname{ch}(lx + a) + b \quad (7)$$

其中:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{q}{H} \\ a = -\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda h}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\lambda h\right)}\right) - \frac{\lambda l}{2} \\ b = \operatorname{ch}(a) \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中:  $q$  为索的单位重量,  $H$  为索所受的水平拉力,  $h$ ,  $l$  为索在局部坐标系中的水平和竖直方向的长度分量,  $\text{sh}(x)$ ,  $\text{ch}(x)$  为双曲正弦和双曲余弦函数。

由于索的自重较大, 跨度较远, 需要研究索弹性变形对馈源支撑系统终端误差的影响。绳索在拉力  $H$  下, 其弹性变形  $\Delta s$  为

$$\Delta s = \frac{H \left\{ \text{sh} \left( \frac{\lambda l}{2} \right) [\lambda l + \text{sh}(\lambda l)] + \lambda^2 h^2 \text{ch} \left( \frac{\lambda l}{2} \right) \right\}}{2 \lambda E A \lambda^2 h^2 \text{ch} \left( \frac{\lambda l}{2} \right)} \quad (9)$$

其中  $E$  为索弹性模量,  $A$  为索横截面积。

当索的单位重量水平拉力比  $\lambda$  较小时, 可以把索的悬链线模型简化成直线模型。其方程为

$$z = \frac{hx}{l} \quad (10)$$

因此在拉力  $T$  的条件下, 索的伸长量为

$$\Delta s = \frac{Tl}{EA} \quad (11)$$

## 2.2 索并联机构误差模型

40米口径射电望远镜索支撑系统的误差源主要是索塔平台安装误差, 馈源舱平台安装误差和索弹性变形误差。其系统的单索误差如图 3 所示。

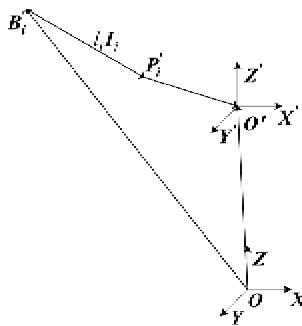


图 3 6 索并联机构单支链误差模型

其中  $I_i$  为单位矢量, 表示支链的方向。坐标系  $\Re$ : ( $OXYZ$ ) 为索塔平台坐标系, 坐标系  $\Re_i$ : ( $O'X'Y'Z'$ ) 为馈源舱上末端执行器的坐标系,  $B'_i$  为索塔平台上铰链中心点,  $P'_i$  为静馈源舱上铰链中心点。系统中的误差包括索模块长度的误差  $\delta l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) 和各个铰链点相对于两个坐标系中心的位置误差  $\delta P = [\delta O'B'^T_i \ \delta O'P'^T_i]^T \in \mathbb{R}^{36 \times 1}$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ); 而系统的输出误差为  $\delta X = [\delta OO'^T \ \delta \Omega^T]^T$ , 其中  $\delta OO' = [\delta X_p \ \delta Y_p \ \delta Z_p]$  为输出的位置误差,  $\delta \Omega =$

$[\delta \omega_x \ \delta \omega_y \ \delta \omega_z]$  为输出姿态误差。

由上面的分析可知, 6 索并联机构的运动学逆解方程为

$$l_i I_i = OO' + R \cdot O'P'_i - OB'_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (12)$$

对该式求导, 得到微分误差模型

$$\begin{aligned} \delta l_i I_i + l_i \delta I_i &= \delta OO' + \delta R \cdot O'P'_i \\ &\quad + R \cdot \delta O'P'_i - \delta OB'_i \end{aligned} \quad (13)$$

旋转矩阵的摄动矩阵可以写成如下形式:

$$\delta R = R_\Omega R = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \omega_z & \delta \omega_y \\ \delta \omega_z & 0 & -\delta \omega_x \\ -\delta \omega_y & \delta \omega_x & 0 \end{bmatrix} R \quad (14)$$

将上式代入(13), 可以得到

$$\begin{aligned} \delta l_i I_i + l_i \delta I_i &= \delta O'O' + \delta R \cdot O'P'_i + R \cdot \delta O'P'_i \\ &\quad - \delta OB'_i \\ &= \delta OO' + R_\Omega \cdot R \cdot O'P'_i + R \cdot \\ &\quad \delta O'P'_i - \delta OB'_i \\ &= \delta OO' + \delta \Omega \times (R \cdot O'P'_i) + R \cdot \\ &\quad \delta O'P'_i - \delta OB'_i \end{aligned} \quad (15)$$

由于  $I_i^T$  是支链的单位矢量, 有  $I_i^T \cdot I_i = 1$ ,  $I_i^T \cdot \delta I_i = 0$ , 式(15)中包含了支链矢量方向随时间的变化。方程两边同时点乘支链单位矢量  $I_i^T$ , 可从中将支链长度的变化分离出来:

$$\begin{aligned} \delta l_i &= I_i^T \cdot \delta OO' + I_i^T \cdot \delta \Omega \times (R \cdot O'P'_i) + I_i^T \cdot R \cdot \\ &\quad \delta O'P'_i - I_i^T \cdot \delta OB'_i \\ &= I_i^T \cdot \delta OO' + I_i^T \times (R \cdot O'P'_i) \cdot \delta \Omega + I_i^T \cdot R \cdot \\ &\quad \delta O'P'_i - I_i^T \cdot \delta OB'_i \end{aligned} \quad (16)$$

由式(16)可得

$$\begin{aligned} I_i^T \cdot \delta OO' + I_i^T \times (R \cdot O'P'_i) \cdot \delta \Omega \\ = \delta l_i - I_i^T \cdot R \cdot \delta O'P'_i + I_i^T \cdot \delta OB'_i \end{aligned} \quad (17)$$

根据雅可比矩阵的定义

$$J = \begin{bmatrix} I_1^T & I_1^T \times (R \cdot O'P'_1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ I_6^T & I_6^T \times (R \cdot O'P'_6) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (18)$$

式(17)可以写成如下形式:

$$J \cdot \delta X = \delta L + D_1 \delta O'P'_i + D_2 \delta OB'_i \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} \delta X &= [\delta OO'^T \ \delta \Omega^T]^T \\ &= [\delta X_p \ \delta Y_p \ \delta Z_p \ \delta \omega_x \ \delta \omega_y \ \delta \omega_z] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\delta L = [\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4, \delta l_5, \delta l_6]^T \quad (21)$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -I_1^T \cdot R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -I_6^T \cdot R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 18} \quad (22)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} I_1^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_6^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 18} \quad (23)$$

$\delta X$  为馈源船上末端执行器上的输出的误差矢量,  $\delta L$  为索长度弹性变形矢量,  $\delta O'P'_i$  为馈源船上末端执行器各铰链点相对于坐标系  $\Re_i$ : ( $O'X'Y'Z'$ ) 的误差矢量,  $\delta O'B'_i$  为索塔平台各塔相对于坐标系  $\Re_i$ : ( $OXYZ$ ) 的误差矢量。

6索并联机构的动静平台的设计精度较高,经计算  $\delta O'P'_i$ ,  $\delta O'B'_i$  相对与  $\delta L$  较小,本文在分析索弹性变形对馈源终端误差影响的过程中,可忽略这两项。因此,式(19)简化如下:

$$J \cdot \delta X = \delta L \quad (24)$$

### 3 索支撑系统误差分析

#### 3.1 两条典型工作路径说明

40米口径射电望远镜的馈源支撑机构工作空间为被跟踪星体的工作面,恒定不变。其固定位置上的姿态转角根据跟踪星体要求也是恒定不变。6索并联机构的相关参数如表1所示。

表1 40米射电望远镜结构参数

技术参数	符号	数值
塔分布圆半径	$r_b$	20m
馈源动平台直径	$r_a$	0.5m
塔出索位置高度	$h$	17.5m
索横截直径	$D$	8mm
索弹性模量	$E$	$1.6 \times 10^5$ MPa
塔出索位置高度	$h$	17.5m
绳索最大拉力	$T_{\max}$	2500N
绳索最小拉力	$T_{\min}$	500N

针对天文观测给定的两个典型工作路径,分析索弹性变形对馈源支撑终端误差。馈源的工作空间为一开口角  $80^\circ$ , 半径  $9.6\text{m}$  的球面, 如图4所示。图4(a)所示为路径1, 该路径为过馈源工作空间最低处的一条圆弧轮廓线, 圆弧半径为  $9.6\text{m}$ , 要求俯仰角在  $-16^\circ \sim 16^\circ$  之间线性变化; 图4(b)为路径2, 该路径为馈源工作空间最高处形成的一个圆, 其半径为  $6.17\text{m}$ , 离地面高度为  $10.6\text{m}$ , 要求俯仰角达到  $16^\circ$ 。

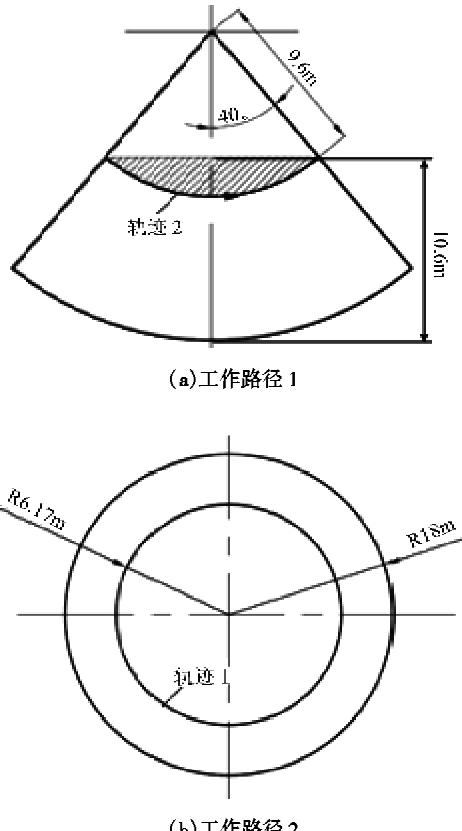
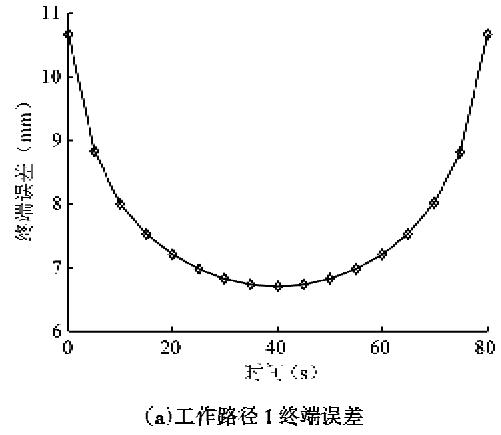


图4 馈源工作空间中两条典型路径

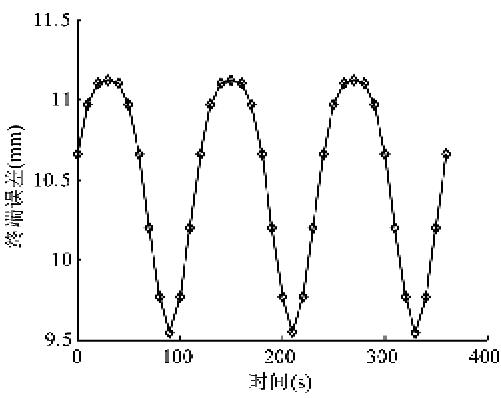
#### 3.2 索支撑系统误差分析

索支撑系统在工作路径1上运行时,俯仰角在  $-16^\circ \sim 16^\circ$  之间线性变化; 在工作路径2上运行时,俯仰角为  $16^\circ$ 。在两条典型路径下馈源跟踪时,索力  $F_i$  均满足  $500N \leq F_i \leq 2500N$  ( $i = 1, \dots, 6$ )。6索并联机构中需考虑索自重引起的变形, 根据悬链线方程(7)和误差分析模型(24), 索弹性变形引起的馈源终端误差如图5所示。图5(a)和图5(b)分别为馈源在路径1、路径2下索支撑系统的终端误差图。图中横坐标为仿真时间, 纵坐标为表示索支撑系统终端误差。在图5(a)中, 当时间  $t = 0\text{s}$  和  $t = 80\text{s}$  时, 索支撑系统终端在其工作空间的边缘; 当  $t = 40\text{s}$  时, 终端在其工作空间中心处, 由图可知, 索支撑系统终端误差在工作空间的边缘时较大, 中间时较小。由图5(b)所示, 路径2的最大误差为  $11.12\text{mm}$ , 误差均方根平均值  $\bar{\delta}_{\text{均方}}$  为  $10.52\text{mm}$ , 超出  $10\text{mm}$  的设计要求<sup>[1]</sup>。可知, 索的弹性变形对索支撑系统的终端误差影响较大, 在40米口径射电望远镜的分析设计和控制的过程中, 需补偿因素的弹性变形引起的索支撑系统终端误差。若直接采用索的悬

链线模型进行误差补偿,首先计算无弹性变形的索长,然后再按公式(9)计算弹性变形量,则需大量的迭代计算,不易实现索并联机构的实时控制。



(a) 工作路径 1 端点误差



(b) 工作路径 2 端点误差

图 5 索支撑系统端点误差

注:误差均方根平均值  $\bar{\delta}_{\text{均方}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n \delta_i^2}{n}}$ , 其中  $\delta_i$  为第  $i$  个跟踪点的误差,  $n$  为跟踪点的数目。

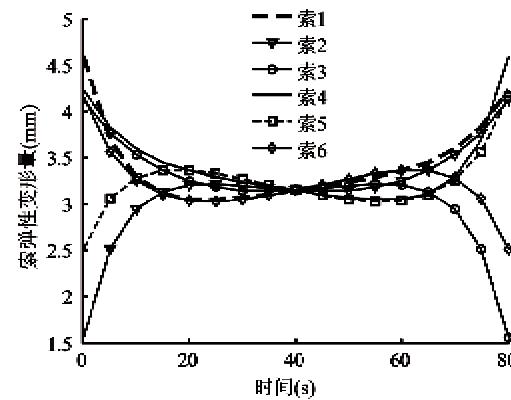
### 3.3 基于索弹性变形的误差补偿方法

索支撑系统的端点误差是由于悬链线变形与索弹性变形叠加引起的,但悬链线变形在控制时是减少了索的输出长度,而索弹性变形是增加了索的输出长度。因此,可以将悬链线模型采用直线模型来简化,不考虑悬链线变形,端点误差模型通过引入弹性变形量权重因子来直接进行补偿,避免了悬链线方程的迭代计算,实现索并联机构的实时控制。为此提出如下误差补偿方法:

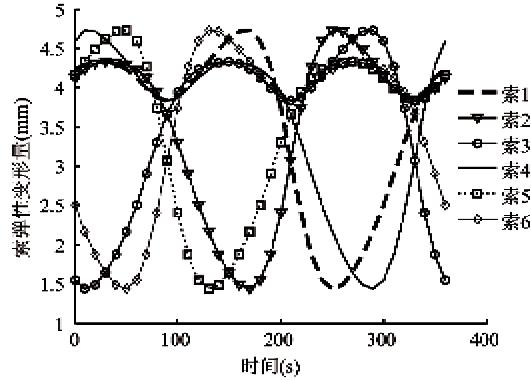
$$L_{\text{out}} = L_{\text{line}} - \epsilon \Delta s \quad (25)$$

其中  $L_{\text{out}}$  为补偿后索驱动空间索长,  $L_{\text{line}}$  采用直线模型的无弹性变形的索长,由式(10)给出,  $\Delta s$  为直线模型下的索弹性变形量,  $\epsilon$  为权重因子,该因子可

以调整各路径的误差补偿精度。 $L_{\text{line}}$  由式(3)计算,  $\Delta s$  由式(11)给出。路径 1 和 2 下,  $\Delta s$  变化如图 6 所示,采用直线模型,路径 1 和 2 下的最大弹性变形量分别是 4.6mm 和 4.7mm。



(a) 工作路径 1 索变形量



(b) 工作路径 2 索变形量

图 6 直线模型索弹性变形量

根据式(25),  $\epsilon$  不同取值对终端位置的误差影响很大,下面将给出不同  $\epsilon$  取值时,索支撑系统终端误差情况。图 7 所示为分别考虑索支撑系统在上述两条典型路径下,不同  $\epsilon$  取值时的系统终端跟踪误差。对比误差图 5 和图 7 可知,采用该误差补偿方法后,可以明显地提高索支撑系统的终端精度。路径 1 下终端误差的误差均方根平均值分别为 3.90mm, 5.14mm, 1.64mm;在路径 2 下终端误差的误差均方根平均值分别为 5.60mm, 5.68mm, 1.62mm。当  $\epsilon$  取上述 3 个影响因子时,都可以满足天文观测要求误差均方根平均值小于 10mm 的精度要求。但是,当取  $\epsilon = 0.5$  时,索支撑系统的终端误差相对更小,具体权重因子的选取还需要进一步的优化,本文只讨论误差补偿方法,不对权重因子做进一步的讨论。

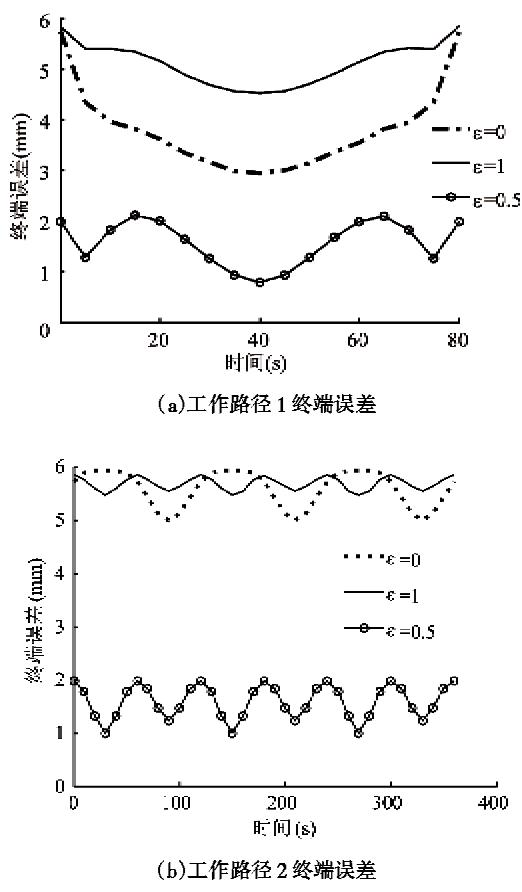


图7 补偿后索支撑系统终端误差

## 4 结论

本文在完成40米口径射电望远镜索支撑系统的运动学和静力学分析基础之上,建立了兼顾绳索弹性变形的馈源终端误差模型。针对天文规划给定的两条典型路径,分析了索弹性变形对馈源终端的误差,并给出了一种有效的误差补偿方法。

## Error analysis and compensation of cable driven parallel manipulators for the forty-meter aperture radio telescope

Qu Lin, Tang Xiaoqiang, Yao Rui, Chen Xu

(Department of Precision Instrument and Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084)

### Abstract

This paper mainly analyzes the error and its compensation of the cable driven system in a forty-meter aperture radio telescope, and presents a real-time error compensation method based on cable's elastic deformation. Kinematics and statics of the cable driven parallel manipulator are analyzed, an error model considering cable's elastic deformation is established and the impact of elastic deformation of cables on the feed precision is indicated. Based on cable's elastic deformation and the control of cable driven manipulator, an error compensation method without iteration for big span cable driven parallel manipulators is presented for two typical paths. The simulation results prove that the error compensation method can improve the feed precision and satisfies the design requirement of forty-meter aperture radio telescope.

**Key word:** large radio telescope, cable-driven parallel manipulator, error model, error compensation

(1) 索支撑系统终端误差在工作空间中间时较小,在边缘时较大。索的弹性变形对索支撑系统的终端误差影响较大,在考虑弹性变形带来的终端误差条件下,其终端误差均方根平均值将超出10mm,不能满足天文观测要求。

(2) 提出一种基于索弹性变形的误差补偿方法,该方法不需要迭代、计算量小,易于满足终端误差实时补偿,仿真计算表明其终端均方根误差可达1.64mm,满足天文观测的要求。

### 参考文献

- [1] 南仁东. 500m 反射面射电望远镜 FAST. 中国科学, 2005, 35(5): 499-466
- [2] Pham C B, Yeo S H, Yang G L. Workspace analysis and optimal design of cable-driven planar parallel manipulators. In: Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Robotics Automation and Mechatronics, Singapore, 2004. 219-224
- [3] Ottaviano E, Ceccarelli M, Pelegalli P. A performance analysis of a 4 cable-driven parallel manipulator. In: Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, Bangkok, Thailand, 2006. 169-174
- [4] 姚蕊, 唐晓强, 李铁民等. 大射电望远镜馈源定位3T索牵引并联机构分析与设计. 机械工程学报, 2007, 43(11): 105-109
- [5] Tang X Q, Wang J S, Zhang H, et al. On the analysis of active reflector supporting mechanism for large spherical radio telescope. *Mechatronics*, 2004, 14(9): 1037-1053
- [6] Hiller M, Fang S Q, Mieleczarek S. Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 2005, 4(40): 429-445
- [7] Bosscher P, Riechel A T, Ebert-Uphoff I. Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(5): 890-902
- [8] 郑亚青. 绳牵引并联机构若干关键理论问题及其在风洞支撑系统中的应用研究:[博士学位论文]. 泉州:华侨大学机电及自动化学院, 2004. 42-100
- [9] Krishna P. Cable-Suspended Roofs. New York: McGraw-Hill, 1978. 27-65
- [10] 斯明君, 张志国. 悬链线柔索索长的计算. 铁道标准设计, 2004, 9(2): 9-11