doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2010.03.007

参数化 CAD 中参数有效范围的算法研究①

张杏莉②　王红娟　卢新明

(山东科技大学信息科学与工程学院　青岛 266510)

摘　要　为了解决在参数化 CAD 系统中由于参数赋值不合理而导致的几何实体重建失败的问题,提出了确定一类二维参数化 CAD 模型中参数有效范围的代数算法。该算法可以实时求解所有简单多边形中距离约束参数的有效取值范围,并利用几何变换简化求解规模,提高求解效率。研究结果表明,该算法提供的有效取值范围内的任一赋值,均可保证重建后几何实体的拓扑形状不发生改变,在一定程度上提高了参数化 CAD 软件的设计效率和人机交互的智能化水平。同时对算法复杂度进行了分析,该算法的复杂度为 $O(n^2)$。

关键词　参数化 CAD, 参数有效范围, 几何变换, 参数化模型

0　引　言

参数化计算机辅助设计(CAD)软件中的参数驱动技术是其核心技术。参数驱动的基本原理是通过修改图形对象的约束参数或标注尺寸来改变图形对象的定位及尺寸,重新生成所需图形。采用该设计方法,可以快速有效地进行产品开发。然而,由于参数化 CAD 软件未给出参数取值的有效参考范围,直接导致了用户只能盲目不断地输入参数值。当赋值不合理时,所生成的几何实体的拓扑形状会发生改变,甚至无法生成新的几何实体。如果在用户改变某个参数值之前,参数绘图系统能实时地给出该参数的有效取值范围的参考信息,将会大大提高设计效率,降低设计难度,同时增加软件的人性化和智能化程度。

目前,参数化 CAD 软件中参数有效取值范围的求解问题已引起国内外许多学者的关注。蒋鲲等[1]将几何实体限定为只包含水平直线和垂直直线的封闭且不自交的多边形,将求解对象限定为水平距离约束和垂直距离约束,给出了求解每个参数有效取值范围的代数算法。Hoffman 和 Kim[2]对二维环境中只包含水平线段和垂直线段的闭合、不自交、良约束的直线多边形做了一些研究,但只允许包含水平方向和垂直方向的距离约束,他们确定了在保证线段间拓扑结构不变的情况下相关直线上下移动的范围。此外,他们还指出了同一时间只能考虑一个距离参数的取值范围。Arinyo 等[3]对尺规可构造性问题给出了有效的方法。Van der Meiden 和 Bronsvoort[4]提出的求解方法考虑了三维环境中基于点的距离约束和角度约束的良约束几何约束系统,他们将几何约束系统中的几何实体分解成三角形和四面体子问题,在计算某个距离约束参数的取值范围时,找出问题的退化子问题并根据退化子问题求出参数的临界值。本文提出了确定简单多边形中距离约束参数的有效取值范围的求解算法,该算法提供的有效范围内的任一赋值,均可保证重建后几何实体的拓扑形状不发生改变。并在实现此目标的基础上利用几何变换对计算规模做了最大程度的简化,提高了求解效率。

1　参数化模型

本文研究对象为二维环境中完整约束的简单多边形的参数化模型(对于过约束的或欠约束的模型,可将其转化成一个完整约束的参数化模型[5]),提出的算法用于求解模型中距离约束参数的有效取值范围。参数有效范围是指使得参数化模型有效的参数值的范围,在该范围内,由参数化模型重建生成的几何实体的拓扑形状不发生改变。

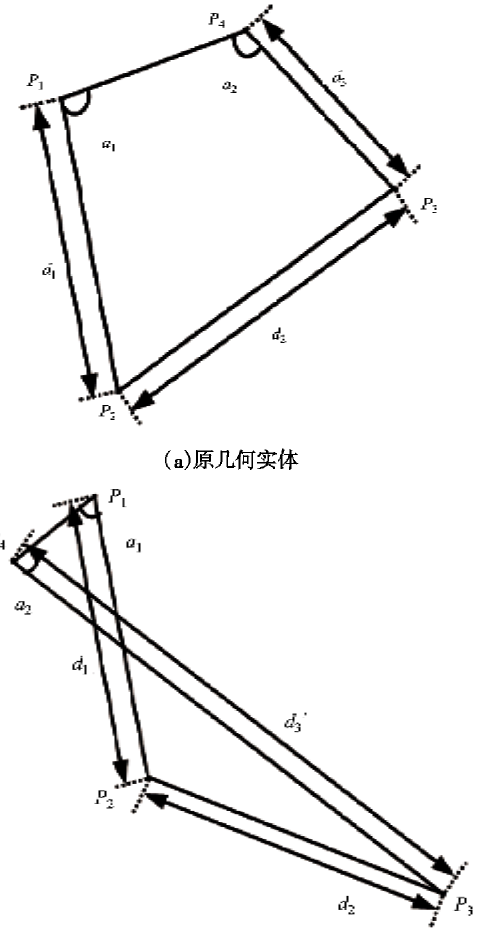
完整约束的简单多边形定义为:设 $P_0,\cdots,P_{n-1}$ 为平面上 n 个点。以 P_i 为顶点的简单多边形存在 n 个顶点,n 条边。完整约束下距离约束和角度约

①　863 计划(2009AA062700)资助项目。
②　女,1981 年生,博士,讲师;研究方向:计算机辅助软件工程,计算机图形学;联系人,E-mail: xlzhang_only@163.com
(收稿日期:2009-04-27)

束总个数为 $2n-3$,$2n-3$ 个约束中只包含两种约束:(1)距离约束:$|P_iP_{i+1}|$ 已知;(2)角度约束:线段 P_iP_{i+1} 和线段 P_wP_{w+1} 之间的角度已知(下标模 n)。

用 $\{(g_1,g_2,\cdots,g_m),(c_1,c_2,\cdots,c_n)\}$ 表示一个完整约束的几何实体的参数化模型。其中 g_i 是指几何实体中包含的基本几何元素,即构成简单多边形的点及直线;c_i 是指几何实体中包含的几何约束关系,即简单多边形中直线的距离约束和直线间的角度约束。

拓扑形状不变是指重建后几何实体中的点与线、线与线的拓扑位置关系保持不变。本文给出了一个拓扑形状发生改变的实例,如图1所示。图1(a)表示的几何实体是由3个距离约束和2个角度约束确定的简单多边形,P_4 点位于有向线段 P_1P_2 的左侧;图1(b)表示为 d_3 重新赋值为 d_3' 后生成的几何实体,P_4 点位于有向线段 P_1P_2 的右侧,新生成的几何实体拓扑形状发生了改变。



(a)原几何实体

(b)参数驱动后的几何实体

图1 几何实体拓扑形状发生改变的实例

2 算法

本文提出的算法是基于无向图表示[6],并采用邻接表的方式进行存储。

对简单多边形中距离约束参数有效取值范围的求解通过两个步骤来完成。首先根据简单多边形的约束情况以及要求解的参数对其进行简化,然后再通过简化后的参数化模型对参数有效范围进行求解。

2.1 简化参数化模型算法

根据当前简单多边形中包含的距离约束和角度约束,以及要求解的距离约束参数,使用三种几何变换[7]对多边形的参数化模型进行简化。这一功能由算法1来完成。简化的方法是对不包括求解参数所约束直线段在内的其他几何元素进行几何变换。如图2(a)所示的几何实体是由4个距离约束和3个角度约束确定的简单多边形。假设要求解线段 L_4 的距离约束参数 d_4 的有效取值范围,首先对线段 P_3P_4、线段 P_3P_2 及两线段之间的夹角 a_3 做刚体变换,用新线段 P_2P_4 代替线段 P_3P_2、线段 P_3P_4 和点 P_3,并计算新线段 P_2P_4 的长度为8.6888,刚体中的角度 $a_4=35°$,刚体如图2(b)所示。对角度 a_2 做角度变换,此时 $a_2'=a_2-a_4=88°-35°=53°$,刚体变换后的几何图形如图2(c)所示。接下来可继续对图2(c)做刚体变换,直到多边形不再可以进行刚体变换为止。算法的具体描述如下:

算法1:简化简单多边形的参数化模型算法

输入:邻接表,约束参数对应的线段 L_i

输出:简化后的参数化模型

步骤1:(角度变换)生成直线的等价类 $AL_1,\cdots,AL_s$,使得同一 AL_i 中的两直线之间的角度可以计算[7]。置邻接表当前指针 p 的初始值指向第一个头节点。

步骤2:v 是邻接表当前指针 p 所指结点。若 v 为空,即所有结点搜索完毕,程序终止。若 v 不为空且满足(a) v 是一直线,且 $v\neq L_i$,(b) v 上只有两个端点 P_{vs} 和 P_{ve},无其他点,(c) 线段 v 长度已知,则进行步骤3,否则邻接表指针 p 指向下一个头结点,返回步骤2。

步骤3:从 v 出发,临时指针 q 指向 v 的下一个头结点。

步骤4:临时指针 q 指向结点 s,若 s 不为空且若满足(a) s 是一直线,且长度已知,(b) 直线 s 上除

两端点外无其他点,且 $s \neq L_i$,(c) 直线 v 与直线 s 的夹角已知,即直线 v 和 s 在同一等价类中,则进行步骤 5,否则临时指针 q 指向下一个头结点,返回步骤 4。

步骤 5:若 $v \neq s$,且 v 与 s 有一个共同的端点 P_{vs}(或 P_{ve}),则对 v, s, P_{vs} 作刚体变换。把新引入的直线加到邻接表的结尾,新引入的直线长度已知,在直线 v 的等价类中加入新直线,并删去直线 v, s 和点 P_{vs}(或 P_{ve}),同时邻接表指针 p 指向下一个头结点,返回步骤 2。记录该刚体包含的直线 v, s 和点 P_{vs}(或 P_{ve}),约束,参数,以及加入的新直线的距离约束参数值。

步骤 6:若 $v \neq s$,且 v 与 s 没有共同端点,对指针 p 与指针 q 间(包括指针 q 指向的直线段 s)的直线段结点对应的直线段上的端点作平移变换。把新引入的直线 L_w' 加到邻接表的结尾,用 L_w' 替换平移前的直线段 L_w,并替换相应的点。同时邻接表指针 p 指向下一个头结点,返回步骤 2。

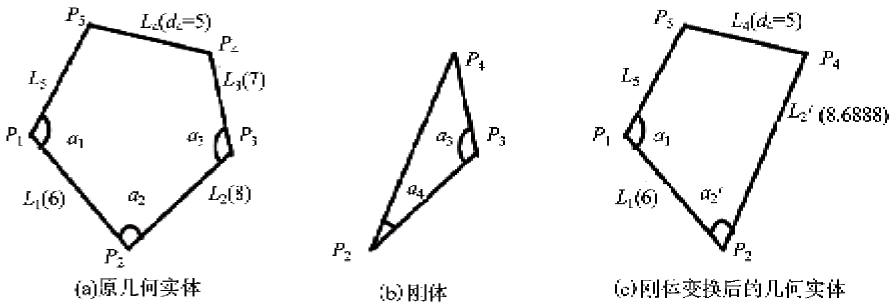


图 2 刚体变换实例

2.2 参数有效范围的确定算法

利用算法 2 求某距离约束参数有效范围时,首先要选择两个不动点,且两个点之间必须存在一个已知且不发生改变的距离约束参数值(类似于几何约束求解时确定一个基点和一条基线)。然后根据简化后的多边形的参数化模型中包含的几何元素及元素间的约束关系列出相应的方程式。另外,根据当前几何图形中点与线的拓扑关系,给出各点的方位约束方程式。因为距离约束参数的有效范围与几何图形的拓扑形状有着直接的关系,这一点在图 1 中已经有所表示,因此,这也是算法 2 中非常重要的一步。下面给出算法 2 的具体描述。

算法 2:求解距离参数有效范围算法

输入:简化后的参数化模型,参数 d_L

输出:参数 d_L 的有效取值范围

步骤 1:选择两个不动点,这两个点之间必须存在一个已知且不发生改变的距离约束参数值,给出这两个点的坐标方程式。

步骤 2:除第一步选定的两点组成的线段之外,剩余线段均生成相应的两点距离方程式。假如线段 L_i 的两端点为 P_i 和 P_{i+1},点 P_i 与 P_{i+1} 之间存在距离约束值为 d_i,则生成方程式:$(x_i - x_{i+1}) \times (x_i - x_{i+1}) + (y_i - y_{i+1}) \times (y_i - y_{i+1}) = d_i \times d_i$;假如线段 L_w 的两端点为 P_w 和 P_{w+1},点 P_w 与 P_{w+1} 之间无距离约束,则需要构造变量 d_w,生成方程式:$(x_w - x_{w+1}) \times (x_w - x_{w+1}) + (y_w - y_{w+1}) \times (y_w - y_{w+1}) = d_w \times d_w$。

步骤 3:将所有角度约束转化成方程式。假如线段 $P_{i-1}P_i$ 与 P_iP_{i+1} 之间的角度约束值为 a,线段 $P_{i-1}P_i$ 的长度为 d_{i-1},线段 P_iP_{i+1} 的长度为 d_i,生成方程式:$\cos(a) = ((x_{i-1} - x_i) \times (x_{i+1} - x_i) + (y_{i-1} - y_i) \times (y_{i+1} - y_i))/(d_{i-1} \times d_i)$。

步骤 4:根据当前图形中点与线的拓扑关系,给出各点的方位约束方程式。如线段 $P_{i-1}P_i$ 与 P_iP_{i+1},共同点为 P_i,若 P_i 位于有向线段 $P_{i-1}P_{i+1}$ 的右侧,则生成方程式:$(x_{i+1} - x_{i-1}) \times (y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_{i-1}) \times (x_i - x_{i-1}) < 0$;若 P_i 位于有向线段 $P_{i-1}P_{i+1}$ 的左侧,则生成方程式:$(x_{i+1} - x_{i-1}) \times (y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_{i-1}) \times (x_i - x_{i-1}) > 0$。

步骤 5:对第 1 步到第 4 步生成的非线性方程式组进行极值求解,求出参数 d_L 的有效取值范围。

算法中还对一些图形中特殊位置的参数做了特殊处理,如某些参数的取值范围可能是$(0, \infty)$,不用列出方程式,直接给出取值范围。

算法复杂度分析。假设简单多边形的边数为 n。算法 1 中,步骤 1 的复杂度为 $O(n + e)$[7]。从步骤 2 到步骤 6 是主循环。其中,步骤 2 为外循环,步骤 4 为内循环。算法 1 的算法复杂度可以从其内循环和外循环中使用的两个指针来进行分析。指针

p 作为外循环中使用的指针,最多遍历的结点为 $2n$ 个,指针 q 作为临时指针,在内循环中使用,最多遍历 $n-1$ 个直线段结点,所以步骤 2 到步骤 6 的复杂度应为 $O(2n(n-1)) = O(n^2)$。因此,算法 1 的复杂度为 $O(n^2)$。

算法 2 中,每一步的复杂度都不超过 $O(n)$, 所以算法 2 的复杂度为 $O(n)$。

对简单多边形中距离约束参数的有效取值范围进行求解,整个算法的复杂度为 $O(n^2)$。

3 实例

图 3(a)为一个简单六边形,该六边形处于满约束状态,现要求解参数 d_5 的有效取值范围。

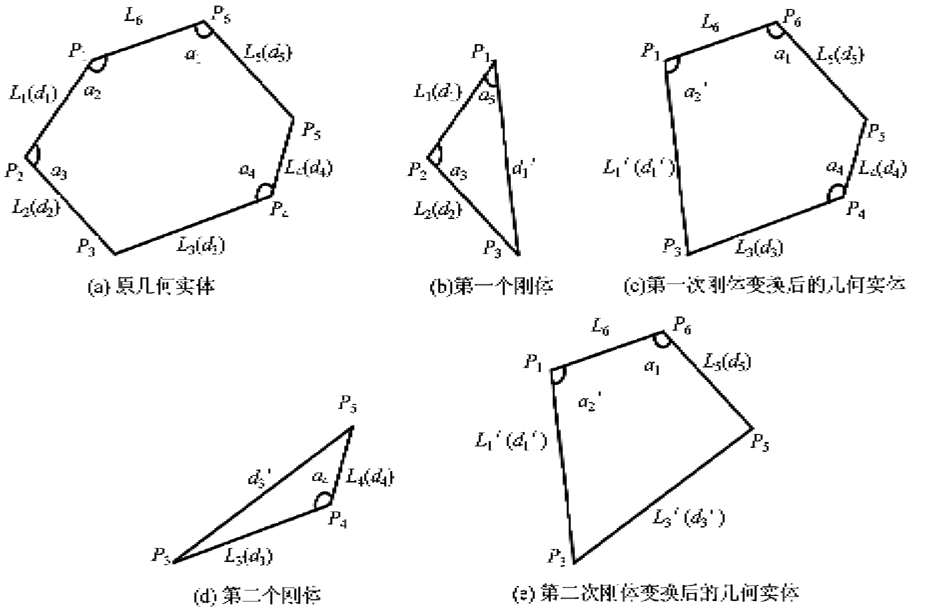


图 3 实例

首先给出该六边形的约束描述(其中两点距离描述为 DisPP(P_i, P_{i+1}, d_i),两线段角度描述为 AngleLL(L_i, L_{i+1}, a_i): DisPP(P_1, P_2, d_1), DisPP(P_2, P_3, d_2), DisPP(P_3, P_4, d_3), DisPP(P_4, P_5, d_4), DisPP(P_5, P_6, d_5), AngleLL(L_5, L_6, a_1), AngleLL(L_6, L_1, a_2), AngleLL(L_1, L_2, a_3), AngleLL(L_3, L_4, a_4),其中, $d_1 = 6, d_2 = 8, d_3 = 10, d_4 = 5, d_5 = 9, a_1 = 121°, a_2 = 153°, a_3 = 95°, a_4 = 114°$。

使用算法 1 对六边形进行简化。首先对线段 P_1P_2 与线段 P_2P_3 做刚体变换,在原图形中用 L_1' 代替该刚体,计算得线段 L_1' 的长度 $d_1' = 10.4422, a_5 = 50°$。对线段 L_6 与 L_1' 的夹角做角度变换为 $a_2' = a_2 - a_5 = 103°$。刚体如图 3(b)所示,刚体变换后的图形如图 3(c)所示。进一步对图 3(c)做刚体变换,产生的刚体和简化后的几何图形分别如图 3(d)和图 3(e)所示,其中线段 L_3' 的长度 $d_3' = 12.8869$。图 3(e)中的几何图形不能继续简化,接下来使用算法 2 对图 3(e)中 d_5 的有效取值范围进行求解。

步骤 1:选择点 P_1 和 P_3 为不动点。用方程式表示点 P_1 与 P_3 的坐标值: $x_1 = 31.8255, y_1 = 24.6522, x_3 = 33.4245, y_3 = 14.3332$。

步骤 2:给出除 P_1 和 P_3 两点组成的线段 L_1' 之外的其他线段的两点距离方程式:

$$d_1' = 10.4422$$
$$(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 = d_3'^2$$
$$d_3' = 12.8869$$
$$(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 = d_5^2$$
$$d_5 = 9$$

因为点 P_1 与点 P_6 之间无距离约束,因此需要构造一个变量,变量名为 d_6, 则生成方程式 $(x_1 - x_6)^2 + (y_1 - y_6)^2 = d_6^2$。

步骤 3:经角度变换计算 $a_5 = 50°, a_2' = 103°$, 因此有方程式

$$\cos(103°) = ((x_3 - x_1) \times (x_6 - x_1) + (y_3 - y_1) \times (y_6 - y_1))/(d_1' \times d_6)$$
$$\cos(a_1) = ((x_1 - x_6) \times (x_5 - x_6) + (y_1 - y_6) \times (y_5 - y_6))/(d_5 \times d_6)$$
$$a_1 = 121°$$

步骤 4:点 P_3 位于有向线 P_1P_5 的右侧,则有方程式

$$(x_5 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (y_5 - y_1) \times (x_3 - x_1) < 0$$

点 P_6 位于有向线 P_1P_5 的左侧,则有方程式

$$(x_5 - x_1) \times (y_6 - y_1) - (y_5 - y_1) \times (x_6 - x_1) > 0$$

点 P_1 位于有向线 P_3P_6 的左侧,则有方程式

$$(x_6 - x_3) \times (y_1 - y_3) - (y_6 - y_3) \times (x_1 - x_3) > 0$$

点 P_5 位于有向线 P_3P_6 的右侧,则有方程式

$$(x_6 - x_3) \times (y_5 - y_3) - (y_6 - y_3) \times (x_5 - x_3) < 0$$

步骤 5:使用拟牛顿法计算 d_5 的最小值为 0,最大值为 18.1634,因此在不改变图形元素之间的拓扑关系并保证生成新图形的情况下,d_5 的有效取值范围为(0, 18.1634]。当对 d_5 的赋值满足 $d_5 > 18.1634$ 或 $d_5 \leqslant 0$ 时,则导致新生成的几何实体的拓扑形状改变。

4 结 论

本文针对由于参数赋值不合理而导致几何实体重建失败的情况,提出了一种解决算法。该算法可以实时求解所有简单多边形中距离约束参数的有效取值范围,并保证有效取值范围内的任一赋值,均使重建后的几何实体的拓扑形状不发生改变。该算法使用几何变换简化求解规模,将满足刚体变换的两个距离约束及一个角度约束变换为一个距离约束,实现了对参数化模型的简化,减少了求解过程中的计算量。在求解过程中,几何实体中点、线间拓扑关系的方程式必须正确,这将关系到求解得到的有效取值范围是否准确无误。实验结果表明,本文提出的算法能够显著提高设计效率和参数化 CAD 软件人机交互的智能化水平。下一步的工作是对算法解决的参数化模型进行扩展,解决更多、更复杂几何实体中约束参数的有效范围的求解问题。

参考文献

[1] 蒋鲲,朱长才,高小山. 参数化 CAD 中参数的有效范围. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003,5(8):1016-1020

[2] Hoffmann C M, Kim K J. Towards valid parametric CAD models. *Computer-Aided Design*, 2001, 33:81-90

[3] Arinyo R J, Mata N. Applying constructive geometric constraint solvers to geometric problems with interval parameters. *Nonlinear Analysis*, 2001, 47: 213-224

[4] Van der Meiden H A, Bronsvoort W F. A constructive approach to calculate parameter ranges for systems of geometric constraints. *Computer-Aided Design*, 2006, 38: 275-283

[5] Latham R S, Middleditch A E. Connectivity analysis: A tool for processing geometric constraint. *Computer-Aided Design*, 1994, 28 (11): 917-928

[6] Fudos I, Hoffmann C M. A graph-constructive approach to solving systems of geometric constraints. *ACM Transactions on Graphics*, 1997, 16(2): 179-216

[7] 高小山,黄磊东,蒋鲲. 求解几何约束问题的几何变换法. 中国科学(E 辑),2001,31(2): 182-192

Research on an algorithm for solving valid range of parameters in parametric CAD

Zhang Xingli, Wang Hongjuan, Lu Xinming

(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510)

Abstract

To resolve the problem that in parametric CAD systems, unreasonable parameter values in a parametric model often result in an improper shape of a geometric object, the paper proposes an algebraic algorithm for determining the valid range of parameter values in certain 2-dimensional parametric CAD models. This algorithm can solve the valid value range of distance constraint parameters in all simple polygons in real time, and make use of the geometric transformation to simplify the solving scale and improve the solving efficiency. The result of the study shows that all values within the valid range provided by this algorithm can ensure that the topological shape of a geometric object does not change after reconstruction, and to some extent, this algorithm can improve the efficiency of parametric CAD software design and the intellectual level of human-computer interaction. The analysis shows the complexity of this algorithm is $O(n^2)$.

Key words: parametric CAD, valid parameter value, geometric transformation, parametric model