

三维受限刚体的摩擦接触分析^①徐从启^② 戴一帆 解旭辉 李圣怡

(国防科技大学机电工程与自动化学院机电系 长沙 410073)

摘 要 首先建立了摩擦接触约束条件下三维刚体的动力学模型,利用线性互补问题(LCP)理论对其进行了降阶处理,讨论了其解的存在性和唯一性问题,然后利用 Kelvin 接触模型和奇异摄动理论揭示了受限刚体降阶模型接触力稳定性的附加条件,最后以单接触细长杆为例,分别从滑动接触和滚动接触两种情况讨论了运动的稳定性,验证了理论分析的正确性。

关键词 受限刚体, 线性互补问题(LCP), 奇异摄动, 摩擦接触

0 引言

目前,解决多刚体系统接触和碰撞问题主要用三种理论方法^[1,2],一是基于经典刚体动力学理论的空间机构学分析方法,二是基于 St. Venant 工作中的波动传播理论法,三是基于接触域离散化的有限元法。对受限刚性机器人^[3-5]的动力学建模已有不少研究成果,McClamroch^[6]在不考虑摩擦接触的前提下,利用经典动力学理论建立了平面受限刚体的动力学模型。Dupont^[7]在只考虑滑动摩擦接触的前提下,解决了平面受限刚体系统的正向动力学建模问题并给出了系统稳定性的条件。上述研究是在基于刚性假设和 Coulomb 摩擦定律的前提下进行的,系统产生了“负惯性”,接触点的正压力产生相反方向的加速度,从而导致系统在求解广义加速度及接触力时出现了多解或无解的情况,即 Painlevé 疑难^[8]。为解决该问题, Song^[9]等人使用顺从接触模型建立了平面受限刚体系统存在唯一解的动力学方程,并给出了其附加条件。Liu 等^[10]借助于线性互补理论得到了单边接触约束多体系统出现 Painlevé 疑难的一般性条件。姚文莉等^[11]研究了含有摩擦约束的平面多体系统的接触碰撞问题,得到了考虑 Coulomb 摩擦时空离散系统动力学的求解方法。

本文全面考虑了滑动摩擦接触和滚动摩擦接触,对三维受限刚体进行了动力学建模,然后利用线性互补理论、Kelvin 接触模型以及奇异摄动理论揭示了三维受限刚体降阶模型接触力稳定性的附加条

件,该条件对判断受限刚体系统的稳定性相对简单,且对机器人的后续控制具有重要的指导意义。

1 三维受限刚体的动力学建模

为了不失一般性,假设如下:

①系统共有 n 个自由度,并由广义坐标 $\mathbf{q}$ 表示;

②受限刚体总共有 $p(p = r + s)$ 个摩擦接触,其中包括 r 个滚动接触和 s 个滑动接触,且均为点接触;

③记 $\phi_i(\mathbf{q})$ 为第 i 个接触处刚体与接触面的最小距离函数,则刚体系统受到 m 个单侧的摩擦接触约束,可以表示为

$$\Phi(\mathbf{q}) = [\phi_1(\mathbf{q}), \phi_2(\mathbf{q}), \dots, \phi_m(\mathbf{q})]^T \geq 0 \quad (1)$$

④受限刚体接触面的法线是严格确定的,在广义坐标空间中是线性无关的;

⑤受限刚体所有接触面处的摩擦均符合库仑摩擦规律,方向总切于接触面;

⑥刚体所有接触均为单侧的完整约束。

这样,根据上述假设,得到受限刚体的动力学微分方程如下^[6]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u} + \Phi_q^T(\mathbf{q}, t)\lambda \quad (2)$$

其中: $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 是一个 $n \times n$ 维的正定惯性矩阵, $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是一个关于非线性惯性力的 n 维列矢量, $\mathbf{u}$ 表示外部的广义输入力及力矩组成的矢量, $\lambda = \text{col}\{\lambda_j\} \in \mathcal{R}^m$ 表示约束力矢量, Φ_q 是 $m \times n$ 维的雅可比矩

① 863 计划(2007AA04Z256)和部委预研项目(51318020310)资助。

② 男,1981 年生,博士生;研究方向:精密工程与计算机控制;联系人, E-mail: xcqndt@126.com
(收稿日期:2008-11-03)

阵($\Phi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$)。

引入下脚标 N 、 T 和 O 分别表示法线和两切线接触方向上的各个变量的数值, S 和 R 分别表示滑动接触和滚动接触, 式(2)中的雅可比矩阵 Φ_q 和约束力 λ 可以表示如下:

$$\begin{cases} \Phi_q = [\Phi_{Sq}^T & \Phi_{NRq}^T & \Phi_{TRq}^T & \Phi_{ORq}^T]^T \\ \Phi_{Sq} = [\Phi_{NSq} + \mu_{Ts}\Phi_{TSq} + \mu_{Os}\Phi_{OSq}] \\ \lambda = [\lambda_{NS}^T & \lambda_{NR}^T & \lambda_{TR}^T & \lambda_{OR}^T]^T \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\mu_{(T,O)s} = -\text{diag}(\mu_{(T,O),i} \times \text{sgn}(\dot{\phi}_{(T,O),i}))$,

$$\mu_{(T,O),i} = \frac{x_{(T,O),i}}{\sqrt{x_{T,i}^2 + x_{O,i}^2}} \mu_i, \mu_i \text{ 为各滑动接触点摩擦}$$

系数, $x_{(T,O),i} = \begin{cases} \dot{\phi}_{(T,O),i} & i = 1, 2, \dots, s \\ \ddot{\phi}_{(T,O),i} & i = s+1, \dots, p \end{cases}, \text{sgn}(\cdot)$

是符号函数。 Φ_{Sq} 是 $s \times n$ 维的矩阵, 表示与滑动接触相关的雅可比阵, Φ_{NRq} 、 Φ_{TRq} 和 Φ_{ORq} 均为 $r \times n$ 维的矩阵, 分别表示与滚动接触相关的法向和两切向雅可比阵; λ_{NS} 是关于滑动接触法线方向上的约束力, 是一 s 维向量, λ_{NR} 、 λ_{TR} 和 λ_{OR} 是关于滚动接触中法线方向和两切线方向的约束力, 都是 r 维向量。由式(3)可知受限刚体系统所受的单侧接触约束总数 $m = 3r + s$ 。

在如图 1 所示的库仑摩擦锥模型中, 满足以下条件:

$$\lambda_{T,i}^2 + \lambda_{O,i}^2 \leq \mu_i^2 \lambda_{N,i}^2 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4)$$

由库仑摩擦定律, 在摩擦锥面上有^[14]

$$\begin{cases} \mu_i \lambda_{N,i} x_{T,i} + \lambda_{T,i} \sqrt{x_{T,i}^2 + x_{O,i}^2} = 0 \\ \mu_i \lambda_{N,i} x_{O,i} + \lambda_{O,i} \sqrt{x_{T,i}^2 + x_{O,i}^2} = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, p \quad (5)$$

其中: 下脚标 $i = 1, 2, \dots, s$ 对应所有的滑动接触,

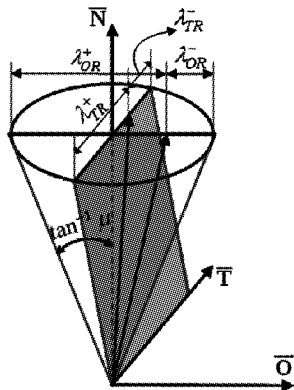


图 1 库仑摩擦锥模型

下脚标 $i = s+1, s+2, \dots, p$ 对应所有的滚动接触, $\dot{\phi}_{(T,O),i}$ 和 $\ddot{\phi}_{(T,O),i}$ 分别表示两切线方向的速度和加速度。

在多刚体系统中, 对于刚体间的单侧接触, 加速度函数和相应的约束力之间构成约束互补对。如果在超过一个有限的时间间隔内, 没有新的有效接触, 则在这个时间间隔内, 法向加速度 $\ddot{\phi}_{N,i}(q)$ 和法向约束力 $\lambda_{N,i}$ 满足如下条件^[14]:

$$\ddot{\phi}_{N,i}(q) \geq 0, \lambda_{N,i} \geq 0, \ddot{\phi}_{N,i}(q) \lambda_{N,i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

类似地, 在接触处的切线方向, 假设库仑摩擦定律是有效的, 则有

$$\begin{cases} \mu_{(T,O),i} \lambda_{N,i} - |\lambda_{(T,O),i}| \geq 0 \\ \dot{\phi}_{T,i}(q) (\mu_{(T,O),i} \lambda_{N,i} - |\lambda_{(T,O),i}|) = 0 \\ \dot{\phi}_{T,i}(q) \lambda_{(T,O),i} \leq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

此外, 如果第 i 个接触处具有相对滑动, 即此时 $\dot{\phi}_{(T,O),i} \neq 0$, 根据库仑摩擦定律有

$$\lambda_{(T,O),i} = -\mu_{(T,O),i} \lambda_{N,i} \text{sgn}(\dot{\phi}_{(T,O),i}) \quad i = 1, \dots, s \quad (8)$$

对于滚动接触, 有

$$\ddot{\phi}_{(T,O),i}(q) (\mu_{(T,O),i} \lambda_{N,i} - |\lambda_{(T,O),i}|) = 0$$

$$i = s+1, s+2, \dots, p \quad (9)$$

多刚体系统动力学问题约束力 λ 的确定, 对于单侧的接触约束, 可以降低为形如式(10)所示的线性互补问题^[12]:

$$x \geq 0, y = Ax + B \geq 0, y^T x = 0 \quad (10)$$

式中: $x \in \mathcal{R}^s, A \in \mathcal{R}^{s \times s}, B \in \mathcal{R}^s, y \in \mathcal{R}^s$ 。

对于形如式(10)的线性互补问题, 当且仅当矩阵 A 正定时, 对所有的向量 B 存在着唯一的解 x , 如果矩阵 A 非正定, 对某些特殊选择的向量 B 而言, 可能存在唯一的解 x , 但对其它的向量 B , 可能无解或者解并不唯一。

将式(1)对时间求一阶和二阶导数, 得到速度和加速度约束方程:

$$\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) = \Phi_q(q, t) \dot{q} \quad (11)$$

$$\ddot{\Phi}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \Phi_q(q, t) \ddot{q} + \dot{\Phi}_q(q, \dot{q}, t) \dot{q} \quad (12)$$

联立式(2)、(3)、(12), 加速度约束方程可写为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\Phi}_{NS} \\ \ddot{\Phi}_{NR} \\ \ddot{\Phi}_{TR} \\ \ddot{\Phi}_{OR} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \lambda_{NS} \\ \lambda_{NR} \\ \lambda_{TR} \\ \lambda_{OR} \end{bmatrix} + \tilde{B} \quad (13)$$

其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \Phi_{NSq} \\ \Phi_{NRq} \\ \Phi_{TRq} \\ \Phi_{ORq} \end{bmatrix} M^{-1} [\Phi_{Sq} \quad \Phi_{NRq} \quad \Phi_{TRq} \quad \Phi_{ORq}],$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \Phi_{NSq} \\ \Phi_{NRq} \\ \Phi_{TRq} \\ \Phi_{ORq} \end{bmatrix} M^{-1}(u - G) + \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{NSq} \\ \dot{\Phi}_{NRq} \\ \dot{\Phi}_{TRq} \\ \dot{\Phi}_{ORq} \end{bmatrix} \dot{q}$$

如图 1 所示, 定义变量 $\lambda_{(T,O)R}^+$ 、 $\lambda_{(T,O)R}^-$ 、 $\ddot{\Phi}_{(T,O)R}^+$ 和 $\ddot{\Phi}_{(T,O)R}^-$ 如下:

$$\begin{cases} \lambda_{(T,O)R}^+ = \mu_{(T,O)} \lambda_{NR} + \lambda_{(T,O)R} \geq 0 \\ \lambda_{(T,O)R}^- = \mu_{(T,O)} \lambda_{NR} - \lambda_{(T,O)R} \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \ddot{\Phi}_{(T,O)R} = \ddot{\Phi}_{(T,O)R}^+ - \ddot{\Phi}_{(T,O)R}^- \\ \ddot{\Phi}_{(T,O)R}^+ \lambda_{(T,O)R}^+ = 0 \\ \ddot{\Phi}_{(T,O)R}^- \lambda_{(T,O)R}^- = 0 \\ \ddot{\Phi}_{(T,O)R}^+ \geq 0, \ddot{\Phi}_{(T,O)R}^- \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

于是, 根据线性互补问题理论, 式(13)可以写成如下的线性互补问题(linear complementarity problem, LCP)形式:

$$0 \leq \begin{bmatrix} \lambda_{NS} \\ \lambda_{NR} \\ \lambda_{TR}^+ \\ \lambda_{OR}^+ \\ \ddot{\Phi}_{TR}^- \\ \ddot{\Phi}_{OR}^- \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \ddot{\Phi}_{NS} \\ \ddot{\Phi}_{NR} \\ \ddot{\Phi}_{TR}^+ \\ \ddot{\Phi}_{OR}^+ \\ \lambda_{TR}^- \\ \lambda_{OR}^- \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \lambda_{NS} \\ \lambda_{NR} \\ \lambda_{TR}^+ \\ \lambda_{OR}^+ \\ \ddot{\Phi}_{TR}^- \\ \ddot{\Phi}_{OR}^- \end{bmatrix} + \bar{B} \geq 0 \quad (16)$$

其中:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Phi_{NSq} M^{-1} \Phi_{Sq}^T & 0 & & & & \\ 0 & \Phi_{NRq} M^{-1} (\Phi_{NRq}^T - \mu_T \Phi_{TRq}^T - \mu_O \Phi_{ORq}^T) & & & & \\ 0 & \Phi_{TRq} M^{-1} (\Phi_{NRq}^T - \mu_T \Phi_{TRq}^T - \mu_O \Phi_{ORq}^T) & & & & \\ 0 & \Phi_{ORq} M^{-1} (\Phi_{NRq}^T - \mu_T \Phi_{TRq}^T - \mu_O \Phi_{ORq}^T) & & & & \\ 0 & 2\mu_T & & & & \\ 0 & 2\mu_O & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & \Phi_{NRq} M^{-1} \Phi_{TRq}^T & \Phi_{NRq} M^{-1} \Phi_{ORq}^T & 0 & 0 & \\ & \Phi_{TRq} M^{-1} \Phi_{TRq}^T & \Phi_{TRq} M^{-1} \Phi_{ORq}^T & 1 & 0 & \\ & \Phi_{ORq} M^{-1} \Phi_{TRq}^T & \Phi_{ORq} M^{-1} \Phi_{ORq}^T & 1 & 0 & \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{NSq} \dot{q} + \Phi_{NSq} M^{-1}(u - G) \\ \dot{\Phi}_{NRq} \dot{q} + \Phi_{NRq} M^{-1}(u - G) \\ \dot{\Phi}_{TRq} \dot{q} + \Phi_{TRq} M^{-1}(u - G) \\ \dot{\Phi}_{ORq} \dot{q} + \Phi_{ORq} M^{-1}(u - G) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 稳定性分析

根据前面分析, 对于单侧的接触约束, 受限刚体系统的动力学模型可降阶为线性互补问题。上述分析并没有指出刚体系统的稳定性问题, 下面探讨对于全阶模型, 包括弹簧和阻尼, 用奇异摄动分析来确定, 在什么条件下刚体降阶模型是稳定且正确的。根据 Kelvin 模型, 可将 λ 写成如下形式:

$$\lambda_i = -[C\dot{\Phi} + K\Phi]_{ii} \quad (17)$$

其中, $C, K \in R^{m \times m}$ 是对角的阻尼及刚性阵。

2.1 奇异摄动分析^[13]

根据奇异摄动理论可以将系统模型分成降阶模型(慢响应)和临界层模型(快响应), 系统的响应由受限模型描述, 即由慢响应和快响应组成。若临界层是渐近稳定的, 则快响应将收敛于零, 且可忽略高频接触动力学问题。若边界层模型是不稳定的, 则不可忽略高频接触动力学问题。

在对角的阻尼及刚性矩阵中引入一个小的常数 $1 \gg \epsilon > 0$, 对任意接触 $c > 0, k > 0$, 及单位矩阵 $I_m \in R^{m \times m}$, 满足下式:

$$C = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} I_m, K = \frac{k}{\epsilon} I_m \quad (18)$$

于是, 式(17)可写为

$$\lambda_i = -[\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \dot{\Phi} + \frac{k}{\epsilon} \Phi]_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

则式(2)可改写为

$$M(q)\ddot{q} + G(q, \dot{q}) = u - \Phi_q^T [\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \dot{\Phi} + \frac{k}{\epsilon} \Phi] \quad (20)$$

为展开式(20)的两个时间域, 必须写成按快、慢变化的标准形式。定义新的变量集合

$$\begin{bmatrix} \epsilon z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_N(q_1, q_2) \\ \Phi_{TR}(q_1, q_2) \\ \Phi_{OR}(q_1, q_2) \\ q_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n \quad (21)$$

式中: $q \supset q_1 \in \mathcal{R}^m, q \supset q_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$ 。

为使新的变量集合 $\begin{bmatrix} \varepsilon \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$ 实现对变量选择的有效性和正确性,要求 Jacobian 矩阵

$$J(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \Phi_{Nq(p \times n)} \\ \Phi_{TRq(r \times n)} \\ \Phi_{ORq(r \times n)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n} \quad (22)$$

是非奇异的,即矩阵 $\begin{bmatrix} \Phi_{Nq(p \times n)} \\ \Phi_{TRq(r \times n)} \\ \Phi_{ORq(r \times n)} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ 必须是满秩的,由于法向接触和切向滚动必然是线性无关的,因此上述结论显然成立。利用逆函数原理可得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \Omega(\varepsilon \mathbf{z}, \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \varepsilon \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中:矩阵 Ω 是矩阵 J 的逆矩阵,即 $\Omega = J^{-1}$ 。

于是式(20)可以用新的变量集合及其一阶、二阶导数重新表示如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon \ddot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} &= \Omega^{-1} M^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{G}) - \Omega^{-1} \dot{\Omega} \begin{bmatrix} \varepsilon \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\ &\quad - \Omega^{-1} M^{-1} \Phi_q^T [c\sqrt{\varepsilon} \dot{\mathbf{z}} + k\mathbf{z}] \end{aligned} \quad (24)$$

上式表示的微分代数方程组中,前 m 个方程对应于快变量 $\varepsilon \mathbf{z}$,剩下的 $(n-m)$ 个方程对应于慢变量 $\mathbf{x}$ 。

定义符号:

$$(\mathbf{A})_{mn} = [a_{ij}], i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (25)$$

故受限刚体系统快速动力学方程可写成

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{\mathbf{z}} &= (\Omega^{-1} M^{-1})_{mn} (\mathbf{u} - \mathbf{G}) - (\Omega^{-1} \dot{\Omega})_{mn} \begin{bmatrix} \varepsilon \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\ &\quad - [\Omega^{-1} M^{-1} \Phi_q^T]_{mn} [c\sqrt{\varepsilon} \dot{\mathbf{z}} + k\mathbf{z}] \end{aligned} \quad (26)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,若方程(26)有 $m \geq 1$ 个孤立的实根 $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$,则式(24)就是奇异摄动模型的标准型。只要矩阵 $[\Omega^{-1} M^{-1} \Phi_q^T]_{mn}$ 可逆,则可以通过式(26)求出解 $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ 。然后将 $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ 代入式(24)剩余的 $(n-m)$ 个方程中,可以求得慢变量 $\mathbf{x}$ 。

为了研究临界层的稳定性问题,在快变量 $\varepsilon \mathbf{z}$ 对应的动力学方程式(26)中引入时间尺度变换 $\tau = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$,同时进行坐标变换 $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}$,记'为对 τ 的微分,则式(26)可以写为

$$\mathbf{y}'' + [\Omega^{-1} M^{-1} \Phi_q^T]_{mn} [c\mathbf{y}' + k\mathbf{y}] = \mathbf{0} \quad (27)$$

在时间域 τ 内,时间量 t 和慢变量 $\mathbf{x}$ 变化缓慢,当 $\varepsilon = 0$ 时,方程(27)降阶为自治系统,其平衡点为 $\mathbf{y} =$

0。

由式(22)、(23)得

$$[\Omega^{-1}]_{mn} = [J]_{mn} = \begin{bmatrix} \Phi_{Nq} \\ \Phi_{TRq} \\ \Phi_{ORq} \end{bmatrix} \quad (28)$$

于是,式(27)可改写为

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{D}[c\mathbf{y}' + k\mathbf{y}] = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Phi_{Nq} \\ \Phi_{TRq} \\ \Phi_{ORq} \end{bmatrix} M^{-1} \Phi_q^T \quad (30)$$

2.2 临界层稳定性

定理 1:给定二阶系统,形如

$$\ddot{\mathbf{x}} + a\mathbf{H}\dot{\mathbf{x}} + b\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (31)$$

其中: $\mathbf{x} = \text{col}(x_i) \in \mathcal{R}^n$, $a, b > 0$, $\mathbf{H}$ 是一个 $n \times n$ 维的正定矩阵,则式(31)所示的系统在平衡位置 $\mathbf{x} = 0$ 处渐近稳定。

证明:利用稳定性理论,取 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 如下所示:

$$V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (b\mathbf{H}) \mathbf{x} \quad (32)$$

当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) > 0$, 则沿任一轨迹有

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{x}}^T (\ddot{\mathbf{x}} + b\mathbf{H}\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{x}}^T (a\mathbf{H}) \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad (33)$$

则根据 Lyapunov 稳定性定理可判定系统(31)在平衡位置 $\mathbf{x} = 0$ 处渐近稳定。

通过上述分析,可知式(29)所示的受限刚体系统的动力学方程的稳定性取决于矩阵 $\mathbf{D}$ 的特征值以及 c, k 的取值。设 $a + bi$ ($i^2 = -1$) 为矩阵 $\mathbf{D}$ 的特征值,根据定理 1 可知,只有当 $\mathbf{D}$ 为正定矩阵时,即当 $a > 0, b = 0$ 时,临界层系统才是渐近稳定的。

3 实例分析

考察如图 2 所示的长为 $2l$ 的受限细长杆,其下端与地面发生接触。受限杆运动时具有 5 个自由度,分别用质心的 x, y, z 坐标及欧拉角 θ, Ψ ($0 < \theta, \Psi < \frac{\pi}{2}$) 来描述,故有广义坐标 $\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \theta \ \Psi]^T$,设杆质量为 m ,对应两欧拉角的转动惯量分别为 J_1, J_2 并集中于质心。 (x_c, y_c, z_c) 为接触点的坐标, $\lambda_N, \lambda_T, \lambda_0$ 分别为接触点处的法向和切向约束力。 $\mathbf{u}^T = [F_x \ F_y \ F_z \ F_\theta \ F_\Psi]$ 表示外部输入矢量。根据刚体动力学相关理论可知: $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \text{diag}(m, m, m, J_1, J_2)$, $\mathbf{G} = \mathbf{0}_{5 \times 1}$ 。下面分滑动接触和滚动接触两种情况进行讨论。

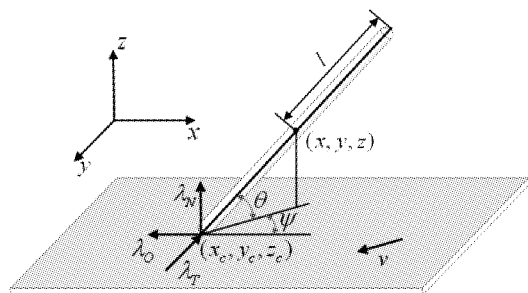


图 2 单接触三维受限细长杆的分析模型

3.1 滑动接触

此时,由前面分析,根据式(2)、(3)有

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_{NS} = \lambda_N \\ \Phi_q^T = \Phi_{Sq}^T = [\mu_s \cos \Psi \quad \mu_s \sin \Psi \quad 1 \quad l(\mu_s \sin \theta - \cos \theta) \quad 0]^T \end{cases} \quad (34)$$

式中 $\mu_s = -\mu \times \text{sgn}(\dot{x}_c)$, μ 为接触处的滑动摩擦系数。

于是根据式(16),此时可以写成如下 LCP 形式:

$$\ddot{\Phi}_N = A\lambda_N + B, \lambda_N \geq 0, \ddot{\Phi}_N \lambda_N = 0 \quad (35)$$

$$\text{其中: } A = \frac{1}{m} + \frac{l^2 \cos \theta (\cos \theta - \mu_s \sin \theta)}{J_1}$$

$$B = l\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{F_z}{m} - \frac{l \cos \theta F_\theta}{J_1}$$

由前面边界层稳定性分析可知,

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} \Phi_{Nq} \\ \Phi_{TRq} \\ \Phi_{ORq} \end{bmatrix} M^{-1} \Phi_q^T = \Phi_{NSq} M^{-1} \Phi_{Sq}^T = A \\ &= \frac{1}{m} + \frac{l^2 \cos \theta (\cos \theta - \mu_s \sin \theta)}{J_1} \end{aligned} \quad (36)$$

根据 2.2 临界层稳定性分析可知,如果 $D = A > 0$,图 2 所示的受限细长杆系统是渐近稳定的。又因为当细长杆与地面不发生接触时,即处于自由状态时,很明显系统是稳定的,于是可以得到如表 1 所示的关于单滑动接触细长杆系统法向约束力解的情况以及稳定性情况。

为计算方便,取 $m = 1, J_1 = l^2/3, 0 < \theta < \pi/2$, 且用步长 $\pi/60$ 进行迭代计算,根据临界层稳定性条件得如图 3 所示的运动稳定性图,横坐标表示 $\mu \text{sgn}(\dot{x}_c)$, 纵坐标表示 θ , 图中存在符号“×”的区域表示 $D = A \leq 0$ 的区域,为不稳定区域,剩余空白区域为稳定区域。这与文献[7]的分析结果一致,从而验证了理论分析的正确性。

表 1 单滑动接触三维细长杆的 LCP 和稳定性结果

条件	解的存在性和唯一性	是否稳定
$A > 0, B \geq 0$	非接触解 ($\lambda_N = 0$)	稳定
$A > 0, B < 0$	接触解 ($\lambda_N = -\frac{B}{A}$)	稳定
$A = 0, B > 0$	非接触解 ($\lambda_N = 0$)	稳定
$A = 0, B = 0$	无穷多组解	
$A = 0, B < 0$	无解	
$A < 0, B > 0$	非接触解 ($\lambda_N = 0$)	稳定
	接触解 ($\lambda_N = -\frac{B}{A}$)	不稳定
$A < 0, B = 0$	非接触解 ($\lambda_N = 0$)	稳定
$A < 0, B < 0$	无解	

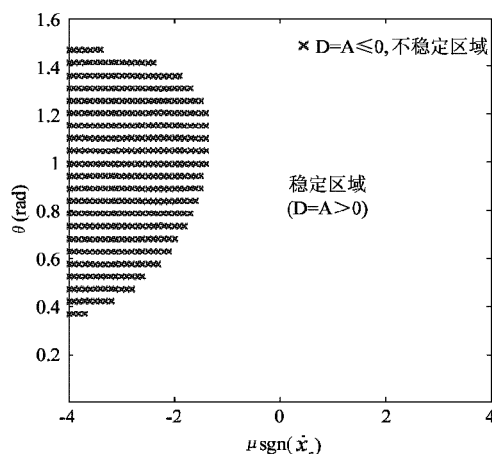


图 3 滑动接触时的受限细长杆运动稳定性图

根据表 1,当 $A < 0, B > 0$ 时,式(34)有两组满足 LCP 条件的解。很明显,其非接触解 ($\lambda_N = 0$) 是稳定的;对于接触解,根据奇异摄动理论边界层稳定性分析,因为 $A < 0$, 故此时系统是不稳定的。

3.2 滚动接触

此时,根据式(2)、(3)有

$$\begin{cases} \lambda = [\lambda_{NR}^T \quad \lambda_{TR}^T \quad \lambda_{OR}^T]^T = [\lambda_N^T \quad \lambda_T^T \quad \lambda_O^T]^T \\ \Phi_q = [\Phi_{NRq}^T \quad \Phi_{TRq}^T \quad \Phi_{ORq}^T]^T \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l \sin \theta \sin \Psi & -l \cos \theta \cos \Psi \\ 1 & 0 & 0 & l \sin \theta \cos \Psi & l \cos \theta \sin \Psi \end{bmatrix} \end{cases} \quad (37)$$

于是根据式(16),此时可以写成如下 LCP 形式:

$$0 \leq \begin{bmatrix} \lambda_N \\ \lambda_T^+ \\ \lambda_O^+ \\ \ddot{\Phi}_T^- \\ \ddot{\Phi}_O^- \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \ddot{\Phi}_N \\ \ddot{\Phi}_T^+ \\ \ddot{\Phi}_O^+ \\ \lambda_T^- \\ \lambda_O^- \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda_N \\ \lambda_T^+ \\ \lambda_O^+ \\ \ddot{\Phi}_T^- \\ \ddot{\Phi}_O^- \end{bmatrix} + B \geq 0 \quad (38)$$

其中: $\lambda_{(T,0)}^+$ 、 $\lambda_{(T,0)}^-$ 、 $\ddot{\Phi}_{(T,0)}^+$ 、 $\ddot{\Phi}_{(T,0)}^-$ 的定义参见式 (14)、(15),

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{l^2 \cos \theta (\cos \theta + \mu \sin \theta)}{J_1} & -\frac{l^2 \sin \theta \cos \theta \sin \Psi}{J_1} & -\frac{l^2 \sin \theta \cos \theta \cos \Psi}{J_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu \sin \Psi}{m} - \frac{l^2 \sin \theta \sin \Psi (\cos \theta + \mu \sin \theta)}{J_1} & \frac{1}{m} + \frac{l^2 \sin^2 \theta \sin^2 \Psi}{J_1} + \frac{l^2 \cos^2 \theta \cos^2 \Psi}{J_2} & l^2 \sin \Psi \cos \Psi \left(\frac{\sin^2 \theta}{J_1} - \frac{\cos^2 \theta}{J_2} \right) & 1 & 0 \\ -\frac{\mu \cos \Psi}{m} - \frac{l^2 \sin \theta \cos \Psi (\cos \theta + \mu \sin \theta)}{J_1} & l^2 \sin \Psi \cos \Psi \left(\frac{\sin^2 \theta}{J_1} - \frac{\cos^2 \theta}{J_2} \right) & \frac{1}{m} + \frac{l^2 \sin^2 \theta \cos^2 \Psi}{J_1} + \frac{l^2 \cos^2 \theta \sin^2 \Psi}{J_2} & 1 & 0 \\ 2\mu \sin \Psi & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu \cos \Psi & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{Nq} \dot{q} + \Phi_{Nq} M^{-1} (u - G) \\ \dot{\Phi}_{Tq} \dot{q} + \Phi_{Tq} M^{-1} (u - G) \\ \dot{\Phi}_{Oq} \dot{q} + \Phi_{Oq} M^{-1} (u - G) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{F_z}{m} - \frac{l \cos \theta F_\theta}{J_1} \\ l \cos \theta \sin \Psi (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{F_y}{m} + \frac{l \sin \theta \sin \Psi F_\theta}{J_1} - \frac{l \cos \theta \cos \Psi F_\Psi}{J_2} \\ l \cos \theta \cos \Psi (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{F_x}{m} + \frac{l \sin \theta \cos \Psi F_\theta}{J_1} + \frac{l \cos \theta \sin \Psi F_\Psi}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可验证矩阵 A 非正定, 因此对于滚动接触, 式 (39) 解的情况需要根据 B 来判断。

由前面边界层稳定性分析可知:

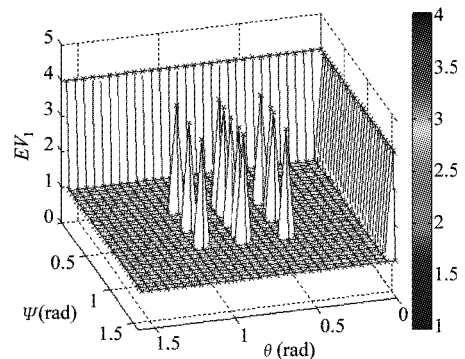
$$D = \begin{bmatrix} \Phi_{NRq} \\ \Phi_{TRq} \\ \Phi_{ORq} \end{bmatrix} M^{-1} \Phi_q^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{J_1} & -\frac{l^2 \sin \theta \cos \theta \sin \Psi}{J_1} & -\frac{l^2 \sin \theta \cos \theta \cos \Psi}{J_1} \\ -\frac{l^2 \sin \theta \cos \theta \sin \Psi}{J_1} & \frac{1}{m} + l^2 \left(\frac{\sin^2 \theta \sin^2 \Psi}{J_1} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \Psi}{J_2} \right) & l^2 \sin \Psi \cos \Psi \left(\frac{\sin^2 \theta}{J_1} - \frac{\cos^2 \theta}{J_2} \right) \\ -\frac{l^2 \sin \theta \cos \theta \cos \Psi}{J_1} & l^2 \sin \Psi \cos \Psi \left(\frac{\sin^2 \theta}{J_1} - \frac{\cos^2 \theta}{J_2} \right) & \frac{1}{m} + l^2 \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Psi}{J_1} + \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \Psi}{J_2} \right) \end{bmatrix} \quad (39)$$

利用 Matlab 7.0 求得矩阵 D 的三个特征值(记为 EV_1 、 EV_2 和 EV_3)为

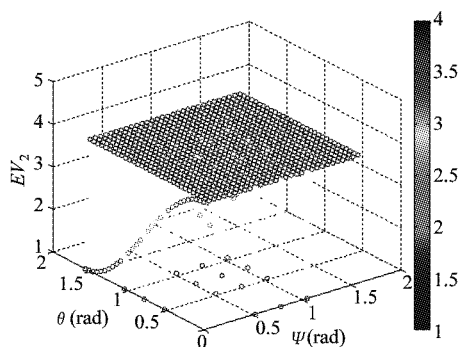
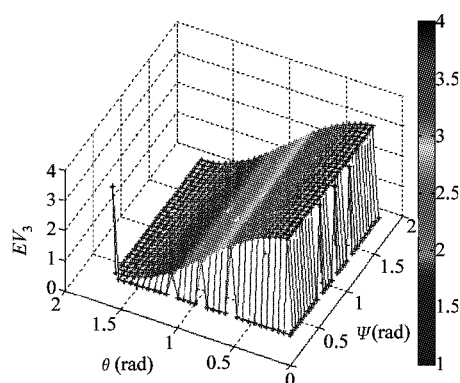
$$\begin{cases} EV_1 = \frac{1}{m} > 0, EV_2 = \frac{1}{m} + \frac{l^2}{J_1} > 0 \\ EV_3 = \frac{1}{m} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{J_2} > 0 \end{cases} \quad (40)$$

为计算方便, 取 $m = 1, J_1 = J_2 = l^2/3, 0 < \theta < \pi/2, 0 < \Psi < \pi/2$ 且用步长 $\pi/60$ 进行迭代计算, 得如图 4 所示的矩阵 D 的三个特征值随 θ 、 Ψ 的变化曲线。从图中可看出, 无论 θ 、 Ψ 怎样变化, 始终有 $EV_1 > 0$ 、 $EV_2 > 0$ 和 $EV_3 > 0$, 根据临界层稳定性条件知, 图 2 所示的单滚动接触三维细长杆始终是渐近稳定的, 同时验证了理论分析的正确性。



(a) EV_1 随 θ 、 Ψ 的变化曲线

图 4 矩阵 D 的三个特征值随 θ 、 Ψ 的变化曲线

(b) EV_2 随 θ 、 Ψ 的变化曲线(c) EV_3 随 θ 、 Ψ 的变化曲线图 4 矩阵 D 的三个特征值随 θ 、 Ψ 的变化曲线

4 结论

本文根据三维受限刚体运动的特点,充分考虑滑动摩擦接触和滚动摩擦接触的影响,建立了其动力学模型。利用 LCP 理论分析了三维受限刚体降阶模型法向接触力解的存在性和唯一性,当且仅当矩阵 A 正定时,对于任意输入力和力矩 u ,法向接触力存在且唯一。利用奇异摄动理论研究了三维受限刚体运动的稳定性,提出了三维受限刚体有摩擦接触的稳定性分析理论,其稳定性取决于矩阵 $D =$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{Nq} \\ \Phi_{TRq} \end{bmatrix} M^{-1} \Phi_q^T \text{ 的特征值以及 } c、k \text{ 的取值,即当 } D$$

为正定矩阵, $c、k > 0$ 时,系统渐近稳定。以单接触三维受限细长杆为例,从滑动接触和滚动接触两种情况分析讨论了 LCP 解的存在性和唯一性以及运动稳定性,验证了理论分析的正确性。

参考文献

- [1] Schiehlen W, Seifried R. Three approaches for elastodynamic contact in multibody systems. *Multibody system dynamics*, 2004, 12: 1-16
- [2] Zhao Z, Liu C S, Chen B. The numerical method for three dimensional impact with friction of multi-rigid-body system. *Sci China Ser Phys Astr*, 2006, 49(1): 102-118
- [3] 袁楚明,张雷,陈幼平等. 模具曲面机器人智能抛光系统的研究. *高技术通讯*, 2001, (9): 76-80
- [4] 李海超,高洪明,吴林等. 基于立体视觉的机器人焊接遥操作研究. *高技术通讯*, 2006, 16(6): 591-595
- [5] 邓宗全,陈军. 六独立轮驱动管内检测牵引机器人. *机械工程学报*, 2005, 41(9): 67-72
- [6] McClamroch N H. A Singular Perturbation Approach to Modeling and Control of Manipulators Constrained by a Stiff Environment. In: *Proceedings of the 28th Conference on Design & Control*, Tampa FL, USA, 1989. 2407-2411
- [7] Dupont P E, Yamajako S P. Stability of frictional contact in constrained rigid-body dynamics. *IEEE Trans on Robotics & Automation*, 1997, 13(2): 230-236
- [8] Mason M T, Wang Y. On the inconsistency of rigid-body frictional planar mechanics. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Philadelphia, USA, 1988. 524-528
- [9] Song P, Kraus P, Kumar V, et al. Analysis of rigid-body dynamic models for simulation of systems with frictional contacts. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, 68: 118-128
- [10] Liu C S, Zhao Z, Chen B. The bouncing motion appearing in a robotic system with unilateral constrain. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 49: 217-232
- [11] 姚文莉. 含摩擦的多刚体系统动力学问题研究: [博士学位论文]. 北京: 北京大学力学与工程科学系, 2005
- [12] Cottle R, Pang J, Stone R. *The Linear Complementarity Problem*. Boston, MA: Academic, 1992
- [13] Khalil H K. *Nonlinear Systems*. 3rd edition. New York: MacMillan, 2002
- [14] Trinkle J, Pang J S, Sudarsky S, et al. On dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction. *ZAMM*, 1995, 77(4): 267-280

Frictional contacts analysis of 3-D constrained rigid-body

Xu Congqi, Dai Yifan, Xie Xuhui, Li Shengyi

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract

A dynamic model of 3-D constrained rigid-body with frictional contact was established first. Then the reduced-order rigid-body model was obtained with the linear complementarity problem (LCP) theory. Then existence and uniqueness of the solutions to the model were discussed. And the contact force was modeled according to the Kelvin's Model. A singular perturbation was used to reveal the additional necessary conditions to ensure the contact force stability in the reduced rigid-body model. At last the stability of a slender rod with one frictional contact was discussed for the cases of sliding contact and rolling contact, respectively, which proved the correctness of the theoretical analysis.

Key words: constrained rigid-body, linear complementarity problem (LCP), singular perturbation, frictional contacts