

一种基于多播路由图的最小子树图搜索算法^①

王 静^② 刘向阳* 王新梅

(西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室 西安 710071)

(* 西安通信学院军事综合信息网教研室 西安 710106)

摘 要 提出了一种基于网络编码的新的多播路由算法,该算法在搜索信源节点到各接收者路径族的过程中,考虑了不同路径族之间链路的共享,以降低带宽资源消耗,提高网络性能。基于得到的多播路由图,提出了一种最小子树图搜索算法,并利用最小子树图的性质,对相应于多播路由图的子树图进行化简。最后,在最小子树图上进行有效的网络编码,所有的网络编码问题可以简化为搜索多播网络的最小子树图问题。

关键词 网络编码,多播路由图,资源消耗,信息流,最小子树图

0 引 言

由于通信新业务的飞速增长和网络用户的急剧增加,现有网络资源已经变得非常宝贵,多播传输的作用也日益显著。目前的多播传输方法往往不能最大限度地利用已有网络资源,因为链路资源不能被多个接收者同时利用,在通往某个接收者的路径上往往有个容量瓶颈,导致多播速率较低。

Li 等人在 2000 年首次提出了网络编码理论^[1],其核心思想是网络中的节点可采用不加冗余的编码,以充分利用已有网络资源进行更加有效的数据传输。此思想突破了数据传输的固定模式,为进一步提高目前的网络传输速率奠定了基础。基于网络编码的多播传输,其传输速率可以达到最大流,即网络流量的理论上限值。随后,文献[2-6]提出了一些网络编码设计方案,给出了网络节点具体的编码算法,详细说明了为获得多播速率所采用的具体网络操作。Fragouli 和 Soljanin 提出了基于网络编码信息流分解的观点^[7,8],主要思想是通过得到多播网络的最小子树图来确定网络的多播结构。该方法将多播路由图转化为子树图,从子树图的角度设计多播网络的网络编码,容易适应网络的实时变换,即节点(或链路)的增加和删除。相同的通信网络使用不同的路由算法搜索得到不同的多播路由图,不同的多播路由图对应不同的子树图,具有不同的网络资源

消耗。

本文首先提出一种基于网络编码的多播路由算法,该算法在搜索信源节点到各接收者路径族的过程中,考虑了不同路径族之间链路的共享,有效地减少冗余链路和节点;对得到的多播路由图进行网络信息流的分解,得到子树图;根据最小子树图的性质,删除子树图中冗余链路和节点得到最小子树图。最后,在最小子树图上进行有效的网络编码,所有的网络编码问题可以简化为搜索多播网络的最小子树图问题。

1 网络编码模型和网络信息流分解

用有向图 $G = (V, E)$ 表示通信网络,其中 V 是节点集, $E \subseteq V \times V$ 是链路集。假定多播网络具有 h 个单位速率信息源 $S_1, \dots, S_h$ 和 N 个接收者 $R_1, \dots, R_N$, 网络中所有链路具有单位容量和零延迟。网络的最小切为 h , h 个单位速率信息源同时多播信息到 N 个接收者。

对接收者 $R_j (1 \leq j \leq N)$, 可以选择从信源节点出发的 h 条离散路径,用 $(S_i, R_j) (1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq N)$ 标记。接收者离散路径的选择不是唯一的,不同的离散路径具有不同的网络编码复杂度。称包含 hN 条路径 $(S_i, R_j) (1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq N)$ 的子图 G' 为多播路由图。网络编码详细描述多播路由图 G' 中每一节点具体的编码操作。

① 863 计划(2007AA01Z215)和国家自然科学基金(60502046, 90604009, 60573034)资助项目。

② 女, 1982 年生, 博士生; 研究方向: 网络编码; 联系人, E-mail: jingwang@mail.xidian.edu.cn
(收稿日期: 2008-01-15)

多播路由图 G' 中链路上传输的符号可以用一个 h 维编码向量表示。如果对每一个接收者, h 条输入链路上的 h 个编码向量线性无关, 则接收者可以正确译出信源信息。多播路由图 G' 中, 确保接收者译出信源信息, 链路上编码向量的分配称为一个有效的网络编码。

下面用图 1 所示的网络拓扑图 G 介绍网络信息流的分解^[7-9]。图 G 中存在 2 个信源 (S_1, S_2) 和 3 个接收者 (R_1, R_2, R_3), 得到相应的多播路由图 G' , 示于图 2(a)。在路由图 G' 中, 分别存在从信源到接收者 R_1, R_2 和 R_3 的 2 条离散路径: $S_1A \rightarrow AC \rightarrow CD \rightarrow DK$, $S_2B \rightarrow BK$; $S_1A \rightarrow AG \rightarrow EG \rightarrow GM$, $S_2B \rightarrow BC \rightarrow CD \rightarrow DG$; $S_1A \rightarrow AE \rightarrow EG \rightarrow GM$, $S_2B \rightarrow BD \rightarrow DM$ 。相应于多播路由图 G' 的线图 $L(G')$ 示于图 2(b)。在线图 $L(G')$ 中, 具有节点集 $E(G')$ 。相应路由图 G' 中信源输出链路的节点称为源节点, 如节点 S_1A 和 S_2B 。像节点 CD 和 GM 这样具有两条或多条输入链路的节点称为编码节点。每一接收者 R_i , 在 $L(G')$ 中存在相应于路由图 G' 两条输入链路的两个相关节点, 称为接收者 R_i 的接收节点。在图 2(b) 中, 节点 BK 和 DK 是接收者 R_1 的两个接收节点。

将图 2(b) 中的节点分成不同的子集 T_i , 每个子

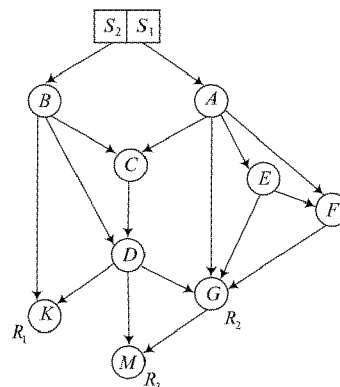


图 1 具有两个信源和三个接收者的网络拓扑

集包含一个源节点或者编码节点, 其它节点属于 T_i 当且仅当它的父编码节点或者源节点属于 T_i 。节点集的分割结果用图 2(b) 中的椭圆曲线来表示。子集 T_i 称为子树, 对线图 $L(G')$ 进行分割得到的分割图称为子树图, 用 Γ 标记。用 $T(S_i)$ ($1 \leq i \leq 2$) 标记源子树, 它包含相应于信源 S_i 输出链路的源节点; T_i 标记包含编码节点的编码子树, 示于图 2(b)。容易得出一个子树中的节点具有相同的编码向量, 即具有相同的信息流。只要子树 T_i 包含相应于接收者 R_i 输入链路的 h 个接收节点中的一个, 称子树 T_i 包含接收者 R_i 。

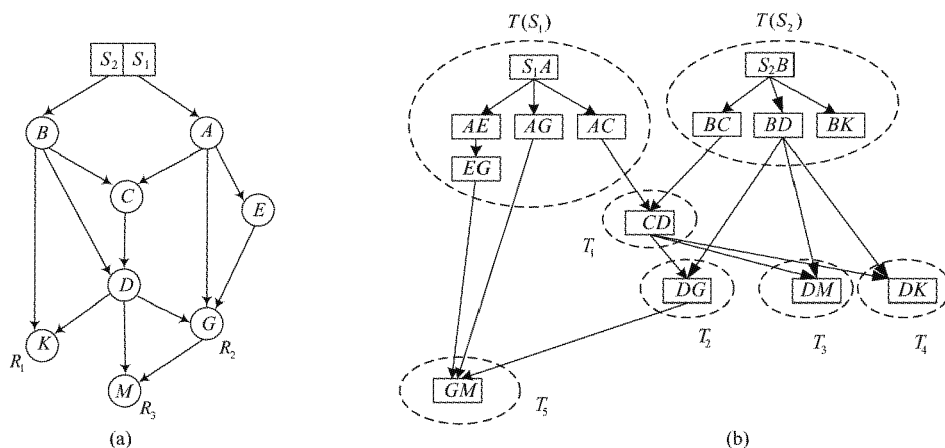


图 2 一个两信源多播网络的信息流分解

2 最小子树图及其性质

多播路由图 G' 的选择非唯一, 对具体的多播路由图, 可能存在一些冗余链路和节点。删除这些冗余链路和节点, 信源仍可实现速率 h 的多播传输, 完成网络编码, 相应的子树图将消耗较少的资源。

图 2(a) 中, 链路 AE 和 EG 显然是冗余的。在其子树图 Γ 中, 存在对应的冗余链路和节点。

定义 1: 如果一个子树图不具有冗余链路和节点, 则称它为最小子树图。也就是说, 删除最小子树图上的任意链路和节点, 得到的子树图不存在有效的网络编码。

删除子树图 Γ 中的冗余链路和节点, 得到最小

子树图。最小子树图具有较小的资源消耗,且具有较少的编码节点,降低了网络编码设计的复杂性。下面给出最小子树图的一些特性。

定理 1^[9]:最小子树图具有下述特性:

(1) 如果一个子树和它的父子树具有相同的编码向量,不存在有效的网络编码;

(2) 如果一个子树的父子树上编码向量不满足线性无关性,不存在有效的网络编码;

(3) 如果存在子树编码向量属于其父子树编码向量的子空间,不存在有效的网络编码;

(4) 每一个编码子树最多具有 h 个父子树;

(5) 如果一个编码子树具有 $2 \leq P \leq h$ 个父子树,从源节点到该子树的最小切为 P 。

在子树图 Γ 中,对每一个接收者 R_i ,如果存在从 h 个源节点到 h 个接收节点的 h 条节点离散路径,则接收者 R_i 满足多播特性。如果每一个接收者满足多播特性,子树图 Γ 满足多播特性。

在子树图中,如果一个子树的编码节点具有来自同一个父子树的几条输入链路,只保留这些输入链路中的一条,删除冗余链路和相应的父节点,不影响该子树图的网络编码。根据定理 1,源子树以外的子树至少具有两个父子树,当子树具有唯一的父子树时,将该子树与其父子树合并。在图 2(b)中,子树 T_5 中的编码节点 GM 具有两条来自父子树 $T(S_1)$ 的输入链路,即节点 AG 和 EG 具有相同的编码向量。可以删除链路 $AG \rightarrow GM$ 和节点 AG ,或者链路 $EG \rightarrow GM$ 和节点 EG 。

3 基于网络编码的多播路由算法

3.1 路由算法介绍

本小节介绍基于网络编码的多播路由算法,搜索网络 $G = (V, E)$ 的多播路由图 G' 。只考虑有线网络的情况。

定义 2(离散路径)^[10]:从信源 s 到接收者 t 的两条或多条路径相互离散当且仅当它们不具有共享链路。

在网络 G 中,存在 h 个单位速率信息源 $S_1, \dots, S_h$ 和 N 个接收者 $R_1, \dots, R_N$ 。假定对每个接收者要搜索 h 条基于网络编码的离散路径,多播速率为 R ,这里 h 不大于网络 G 中信源节点到各接收者离散路径数目的最小值。基于网络编码的多播路由算法如下:

(1) 将网络 G 中每一条链路 $(i, j) \in E$ 的距离

d_{ij} 设为 1。

(2) 在网络 G 中,使用 Dijkstra 路由算法重复搜索从信源到接收者 $R_i (i \in [1, N])$ 的 h 条最短路径,将多播速率 R 平均分配到这 h 条离散路径上。在搜索从信源到 R_i 的路径族的过程中,不考虑前 $i - 1$ 组路径族,并将前 $i - 1$ 组路径族中所有链路的距离设为 0。

(3) 重复第(2)步的操作直到对所有接收者找到 N 组路径族。

上述算法将网络 G 中每一条链路 $(i, j) \in E$ 的距离 d_{ij} 设为 1,是因为在有线网络中以带宽消耗作为标准,若每条链路上传输相同的信息比特,则一条路径包含的链路越少其消耗的带宽资源也就越少。

3.2 带宽消耗分析

采用 C++ 语言进行仿真实验,借助文献[11]中的方法产生随机网络模型。平均带宽消耗用 $W = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij}/R$ 来计算,这里 w_{ij} 表示链路 (i, j) 上的资源消耗,即在当前传输中被消耗的带宽, R 为多播速率。仿真过程中, R 采用 100 比特/单位时间。

仿真结果按下述方法确定。节点度数一定时,分别产生 1000 个具有 30 个节点和 5 个接收节点的随机网络,即每个数据点都进行了 1000 次仿真,仿真数据的置信度大于 95%。图 3 的仿真结果表明,提出的基于网络编码的多播路由算法消耗的带宽资源在 3 种算法中是最小的。Prim 算法的带宽消耗几乎是最小费用多播算法^[12]的 2 倍, Dijkstra 算法的平均带宽消耗差不多是最小费用多播算法的 1.5 倍或者更多,而基于网络编码的多播路由算法的带宽资源消耗非常接近最小费用多播算法。

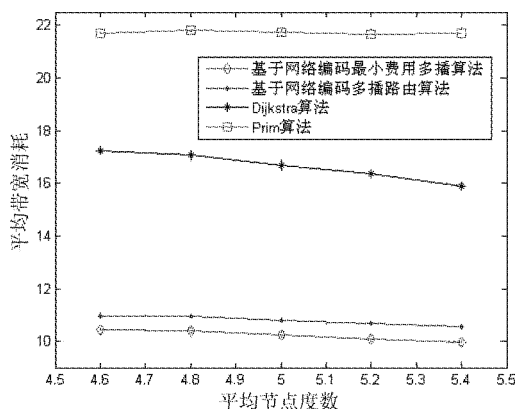


图 3 不同算法的平均带宽资源消耗

该算法考虑不同路径族之间链路的共享,提高链路共享度,减小网络资源消耗。仿真结果表明提出的算法在具有较多共享链路的网络上性能更好。

4 最小子树图搜索算法

在得到多播路由图的基础上,本节给出一种最小子树图搜索算法。

最小子树图搜索算法如下:

(1) 根据网络信息流分解原理,得到多播路由图 G' 的子树图 Γ 。对每一个编码节点,删除冗余输入链路及其父节点确保只存在来自不同父子树的 $P(2 \leq P \leq h)$ 条输入链路。用 K 标记子树图中编码子树的数目,对所有编码子树编号确保从子树 T_j 到 $T_i(1 \leq i < j \leq K)$ 不存在路径。令 $n = K$ 。

(2) 用 $S(T)$ 表示子树 T 中接收者的集合, $T_{n,1}, \dots, T_{n,P}$ 标记子树 T_n 的 P 个父子树, $e_{n,1}, \dots, e_{n,P}$ 标记从父子树 $T_{n,1}, \dots, T_{n,P}$ 到 T_n 的链路。根据 T_n 和 $T_{n,1}, \dots, T_{n,P}$ 之间的关系,进行如下操作:

(a) 如果 $S(T_{n,1}) \cap S(T_n) \neq \Phi, \dots, S(T_{n,P}) \cap S(T_n) \neq \Phi$, 保留链路 $e_{n,1}, \dots, e_{n,P}$ 。

(b) 如果 $S(T_{n,1}) \cap S(T_n) = \Phi, \dots, S(T_{n,P}) \cap S(T_n) = \Phi$, 存在如下情况:

(i) 在 $S(T_{n,1}) \neq S(T_{n,2}) \neq \dots \neq S(T_{n,P})$ 或者 $S(T_{n,1}) = S(T_{n,2}) = \dots = S(T_{n,P})$ 情况下,如果 $T_{n,i}$ 是源子树,将子树 T_n 合并到父子树 $T_{n,i}$ 中,并删除多余链路;如果在 $T_{n,1}, \dots, T_{n,P}$ 中不存在源子树,随机选择 $T_{n,i}$, 进行上述操作。

(ii) 如果 $S(T_{n,i}) \supset S(T_{n,j})(1 \leq i, j \leq P, i \neq j)$, 将 T_n 合并到父子树 $T_{n,i}$ 中并删除多余链路。

(c) 如果 T_n 的父子树 $T_{n,i}(1 \leq i \leq P)$ 中存在和 T_n 相同的接收者,父子树 $T_{n,j}(1 \leq j \leq P, i \neq j)$ 中不存在,删除 $T_{n,i}$ 与 T_n 之间的链路,从 $T_{n,j}(1 \leq j \leq P, i \neq j)$ 中随机选择一个子树,确保得到的子树具有最小的资源消耗,将 T_n 合并到所选择的子树中并删除多余链路。

(3) 令 $n = n - 1$, 如果 $n \geq 1$, 转入第(2)步。

(4) 删除子树图中既不是接收节点也不具有子节点的节点。

(5) 对每一个接收者 $R_i(1 \leq i \leq N)$, 确保子树图中存在从源节点到接收节点的 h 条离散路径。如果得到的子树图不满足该特性,继续进行第(2)-(4)步的操作。

采用第(2)步中(a),(b),(c)操作对子树 T_n 和其父子树 $T_{n,i}(1 \leq i \leq P)$ 中的接收节点进行修正,确保每一个接收者可以满足多播特性。经过上述算法约简得到的最小子树图具有有效的网络编码。

例 1 对图 1 中的网络图 G , 采用提出的多播路由算法得到多播路由图 G' , 示于图 4。由于提出的多播路由算法考虑不同路径族之间链路的共享,得到的多播路由图比图 2(a) 中的路由图具有更少的链路和更低的资源消耗。

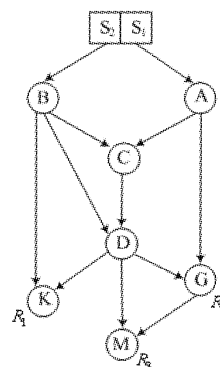


图 4 图 1 网络的多播路由图 G'

图 5(a) 给出了相应于图 4 中多播路由图的子树图。显然,通过移除图 2(b) 子树图中的链路 $EG \rightarrow GM, AE \rightarrow EG$ 和节点 AE, EG , 得到图 5(a) 中的子树图。对图 5(a) 中所有编码子树编号,得到每一个子树 T 包含的接收者的集合 $S(T)$ 。对子树 T_5 进行步骤(2)中的操作,得到图 5(b) 中的子树图,继续对子树 T_4, T_3, T_2, T_1 进行步骤(2)中的操作,最终得到图 5(c) 中的子树图。接着进行步骤(4),得到图 5(d)。可以看出图 5(d) 中的子树图满足多播特性和定理 1 中最小子树图特性,图 5(d) 就是所求的最小子树图。

对图 5(d) 中的最小子树图分配编码向量,图 6 给出了相应的多播路由图 G' 上的信息流分布。显然 G' 中链路 BD 是冗余的,在多播传输中不需要考虑。图 6 中用相同的线条表示链路具有相同的信息流。可以看出为了实现多播速率 2 的信息传输,节点 C 必须采用网络编码。

从图 3 可以看出,提出的基于网络编码多播路由算法的资源消耗接近最小费用多播算法,所提算法得到的最小子树图在一定意义上说是最小的,不存在冗余的链路和节点。需要指出,不排除存在一些最小子树图,比提出的算法具有更少的资源消耗。

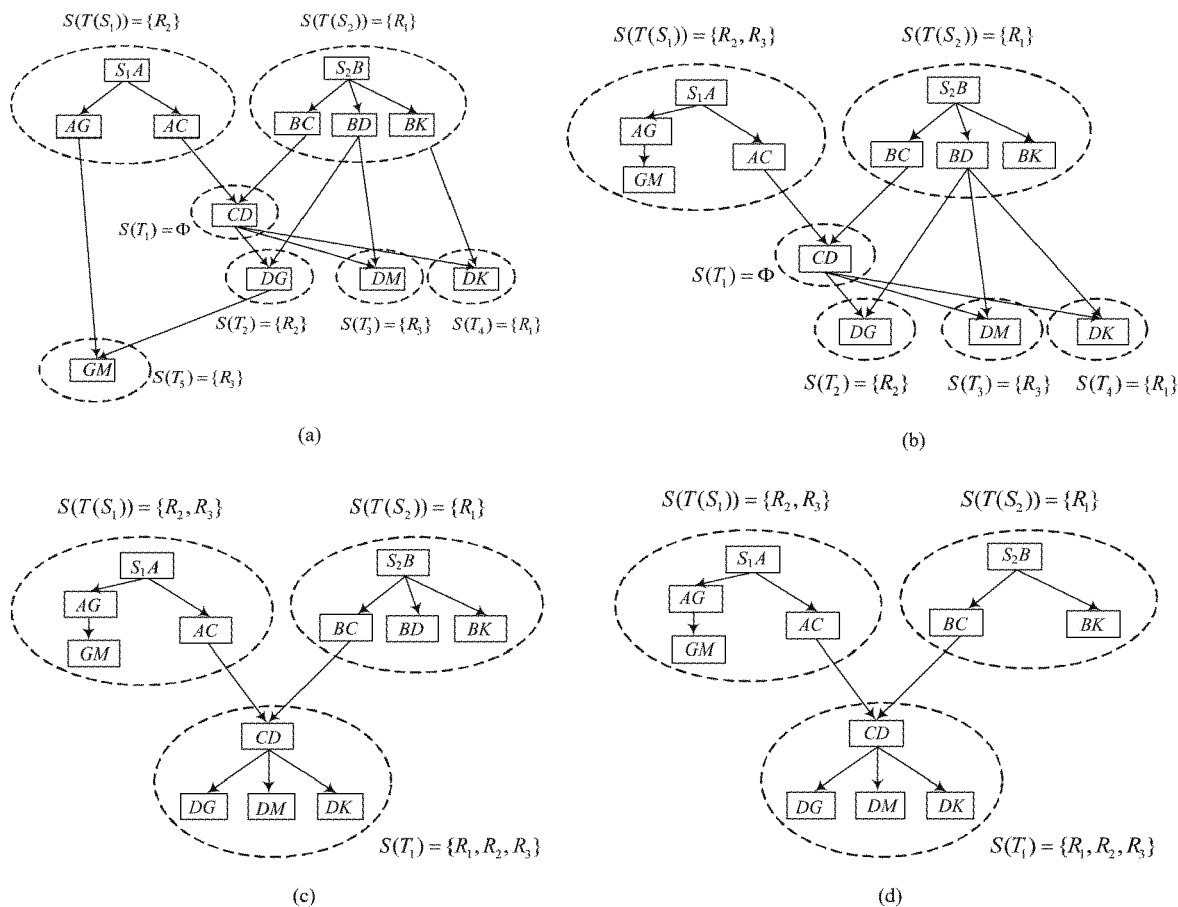


图 5 最小子树图的构造过程

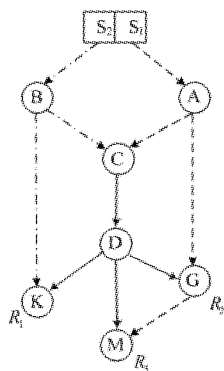


图 6 多播路由图 G' 上的信息流分布

5 结论

本文提出一种基于网络编码的新多播路由算法,得到多播路由图。基于得到的多播路由图,进行信息流分解获得子树图。根据最小子树图的性质,删除子树图中冗余链路和节点得到最小子树图。仿真结果表明,提出的多播路由算法比传统路由算法具有更少的资源消耗,接近最小费用多播算法,得到的最小子树图具有较少的资源消耗。最后,在最小

子树图上进行有效的网络编码,所有的网络编码问题可以简化为搜索多播网络的最小子树图问题。

参考文献

- [1] Ahlswede R, Cai N, Li S Y R, et al. Network information flow. *IEEE Trans Inform Theory*, 2000, 46(4): 1204-1216
- [2] Li S Y R, Yeung R W, Cai N. Linear network coding. *IEEE Trans Inform Theory*, 2003, 49(2): 371-381
- [3] Koetter R, Medard M. An algebraic approach to network coding. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 2003, 11(5): 782-795
- [4] Sanders P, Egner S, Tolhuizen L. Polynomial time algorithms for network information flow. In: *Proceedings of the 15th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures*, San Diego, California, USA, 2003
- [5] Jaggi S, Chou P A, Jain K. Low complexity algebraic multicast network codes. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, Yokohama, Japan, 2003. 368-368
- [6] Jaggi S, Sanders P, Chou P A, et al. Polynomial time algorithms for multicast network code construction. *IEEE Trans Inform Theory*, 2005, 51(6): 1973-1982

- [7] Fragouli C, Soljanin E. Network coding based on subtree decomposition. DIMACS Technical Report, Rutgers University, 2003
- [8] Fragouli C, Soljanin E, Shokrollahi A. Network coding as a coloring problem. In: Proceedings of IEEE Annual Conference on Information Sciences and Systems, Princeton, NJ, USA, 2004. 1-6
- [9] Fragouli C, Soljanin E. Information flow decomposition for network coding. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52(3): 829-848
- [10] Zhu Y, Li B C, Guo J. Multicast with network coding in application-layer overlay networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2004, 22(1): 107-120
- [11] Waxman B M. Routing of multipoint connections. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1988, 6(9): 1617-1622
- [12] Lun D S, Ratnakar N, Medard M, et al. Minimum-cost multicast over coded packet networks. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52(6): 2608-2623

An algorithm for search of minimal subtree graphs based on multicast routing graphs

Wang Jing, Liu Xiangyang^{*}, Wang Xinmei

(State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an 710071)

(^{*} Military Comprehensive Information Network Teaching Office, Xi'an Communication College, Xi'an 710106)

Abstract

This paper presents a new multicast routing algorithm based on network coding. In the process of searching the routing groups from source nodes to each receiver, the algorithm considers link-sharing between different path groups to decrease bandwidth resource consumption and improve network performances. And a scheme for search of minimal subtree graphs is presented based on the multicast routing graphs obtained. By using some properties of minimal subtree graphs, the subtree graphs corresponding to multicast routing graphs are reduced to get minimal subtree graphs. Finally, it can effectively construct network coding in minimal subtree graphs, and all the network coding problems can be equivalent to search the minimal subtree graphs.

Key words: network coding, multicast routing graph, resource consumption, information flow, minimal subtree graph